

# Moderne Physik

gelesen von Prof. Batke

Sommersemester 2007

LaTeX von Maximilian Michel

— zum Teil korrektur gelesen—

19. Juli 2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Relativitätstheorie</b>	<b>5</b>
1.1	Klassische Mechanik	5
1.1.1	Grundlagen, Grundbegriffe:	5
1.1.2	Newton'sche Axiome	5
1.1.3	Newton'sche Bewegungsgleichung in Lagrange- und Hamiltonform	7
1.1.4	Galilei-Transformation	12
1.2	Die Lichtgeschwindigkeit	15
1.2.1	Messung der Lichtgeschwindigkeit	16
1.2.2	Der Äther	17
1.2.3	Das Michelson – Morley Experiment	18
1.3	Die Einstein'schen Postulate	18
1.4	Die Lorentz-Transformation und ihre Folgerungen	19
1.4.1	Bestimmung des Lorentztransformationfaktors	19
1.4.2	Vakuumlichtgeschwindigkeit als Grenzwert	21
1.4.3	Längenkontraktion	21
1.4.4	Zeitdilatation	22
1.4.5	Relativität der Gleichzeitigkeit	23
1.4.6	Beispiele	24
1.4.7	Lorentz -Transformation Michelson Moreley-Experiment	26
1.4.8	Relativistische Geschwindigkeitstransformation	28
1.4.9	Relativistische Beschleunigung	30
1.5	Relativistische Dynamik	32
1.5.1	Impulserhaltungssatz und Massenveränderlichkeit	32
1.5.2	Masse – Energie Äquivalenz	35
1.5.3	Der relativistische Energie Impuls Satz	36
1.5.4	Invarianz und Transformation von Energie und Impuls	37
1.6	Das euklidische Raum-Zeit-Kontinuum	38
1.6.1	Ereignis, Kontinuum, Weltlinie	38
1.6.2	Geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation	40

1.7	Der relativistische Dopplereffekt . . . . .	49
1.8	Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	51
1.8.1	Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere . . . . .	52
1.8.2	Raum-Zeit-Gravitation . . . . .	53
1.9	Experimentelle Prüfung der ART . . . . .	58
1.9.1	Gravitations-Rotverschiebung . . . . .	58
1.9.2	Ablenkung von EM-Wellen im Gravitationsfeld . . . . .	59
1.9.3	Periheldrehung der Planetenbahnen . . . . .	60
1.9.4	Gravitationswellen . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Die Quantisierung der Ladung</b>	<b>63</b>
2.1	Das Elektron . . . . .	64
2.1.1	Entdeckung und spezifische Ladung $\frac{e}{m_0}$ des Elektrons . . . . .	64
2.1.2	Die Ladung des Elektrons . . . . .	66
2.1.3	Die Größe des Elektrons . . . . .	68
2.2	Die Ionen und ihre Isotope . . . . .	69
2.2.1	Massenspektroskopie . . . . .	69
2.2.2	Die natürlichen Nuklide . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Phänomenologische Quantenphysik</b>	<b>73</b>
3.1	Temperaturstrahlung . . . . .	73
3.2	Der Photoelektrische Effekt . . . . .	81
3.3	Bremsstrahlung (inverse photoelektrischer Effekt) . . . . .	83
3.4	Die Compton-Streuung . . . . .	84
3.5	Die spezifische Wärme von Festkörpern . . . . .	85
3.6	Das Atom . . . . .	87
3.6.1	Klassische Ergebnisse . . . . .	87
3.6.2	Rutherford-Streuung . . . . .	92
3.6.3	Spektrallinien und Bohrsches Atommodell . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Materiewellen</b>	<b>128</b>
4.1	Freies Teilchen . . . . .	128
4.1.1	Die Hypothese von Louis de Broglie . . . . .	128
4.1.2	Welle- Teilchen- Dualismus . . . . .	136
4.1.3	Schrödinger-Gleichung . . . . .	142
4.1.4	Wellenpakete . . . . .	145
4.2	Gebundene Teilchen . . . . .	153
4.2.1	Teilchen im unendlich (???) Kastenpotential . . . . .	153
4.2.2	Schwingungsgleichung mit Potential . . . . .	155
4.2.3	Beispiele für exakte Lösungen der stationären Schrödinger Gleichungen . . . . .	157

4.2.4	Die formale Theorie der Quantenmechanik . . . . .	165
4.3	Das Wasserstoffatom . . . . .	169
4.3.1	Die Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten . . . . .	169
4.3.2	Lösen des Winkelproblems . . . . .	172
4.3.3	Aufhebung der $\ell$ Entartung . . . . .	186
4.3.4	Aufhebung der m-Entartung . . . . .	187

# Kapitel 1

## Relativitätstheorie

### 1.1 Klassische Mechanik

#### 1.1.1 Grundlagen, Grundbegriffe:

- Klassische Teilchen:

Punktkörper, keine innere Struktur keine erkennbare Größe, hat Masse  $m$  und Ladung  $q$

- Zustandscharakterisierung

Positionsvektor  $\vec{r}$ , Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  genau mess- und bestimmbar

- Klassische Auffassung:

Raum ist eine Art Behälter, in dem die Dinge eingelagert sind und in zeitlicher Folge ablaufen. Raum und Zeit können unabhängig von Masse existieren. An jedem Ort  $(x,y,z)$  herrscht die gleiche Zeit.

#### 1.1.2 Newton'sche Axiome

- Trägheitsprinzip (keine Veränderung des Bewegungszustandes ohne Krafteinwirkung)
- Aktionsprinzip

$$\text{Bewegungsgleichung } \vec{F} = \underbrace{m(t)}_{(trge)Masse} \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\text{Impuls } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\text{Kinetische Energie } E_{kin} = T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\text{Kraft } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Konservative Kraft: } \vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$V = E_{pot}$$

Wichtige Kraft in Atom-, Kern- und Hochenergiephysik:

$$\text{Lorentzkraft: } \vec{F} = q \underbrace{\vec{\epsilon}}_{\text{el. Felder}} + q\vec{v} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{magn. Felder}}$$

- Reaktionsprinzip (Kräfte treten immer Paarweise auf)

**Beispiel. a)**

- $\vec{\epsilon} = \text{konst.}, \vec{B} = \text{konst.}$
- $m\vec{a} = q\vec{\epsilon}$
- für  $\vec{\epsilon} \parallel$  zur x-Richtung konstantes  $a_x = \frac{q\epsilon}{m}$
- Geschwindigkeit  $v_x = a_x t = \frac{q\epsilon}{m} t$
- Weg  $x = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{q\epsilon}{2m} t^2$

$$T = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{m} \epsilon^2 t^2 = \underbrace{\underbrace{x}_{\text{Weg}} \underbrace{q\epsilon}_{\text{Kraft}}}_{\text{Arbeit}} = E_{pot} = q \underbrace{x\epsilon}_{\text{Potential}}$$

- In Hochenergiephysik werden Energie in eV gemessen

$$1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} C \cdot 1V$$

$$= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{Joule}$$

**Beispiel. b)**

- $\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{konst.}$
- $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$
- $\vec{a} \perp$  auf  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$

- konstante Beschleunigung, wenn  $\vec{v} = \text{konst.}$

$\Rightarrow$  gleichförmige Kreisbewegung,  $r=?$

Zentripetalkraft = Lorentzkraft

$$m \frac{v^2}{r} = |q|vB$$

$$r = \frac{mv}{|q|B} - \text{Zyklotronradius}$$

$$\text{Umlauffrequenz } \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

$$\text{Zyklotronfrequenz: } \omega = 2\pi\nu = \frac{|q|B}{m}$$

### 1.1.3 Newton'sche Bewegungsgleichung in Lagrange- und Hamiltonform

Newton'sche Bewegungsgleichung für Systeme aus  $n$  Punktteilchen mit Masse  $m_i (i = 1, \dots, n)$  im kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$   
 $(i = 1, \dots, n)$

$$\left. \begin{array}{l} m_i \ddot{x}_i = F_{x_i} \\ m_i \ddot{y}_i = F_{y_i} \\ m_i \ddot{z}_i = F_{z_i} \\ \ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \end{array} \right\} \text{neue Form der Bewegungsgleichung}$$

**Ziel:** Formulierung der Bewegungsgleichung in universeller Form

#### 1. Kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \end{aligned}$$

#### 2. Beschränkung auf konservative Kräfte

$$E_{pot} = V = V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

$$\Rightarrow F_{x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$F_{y_i} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

$$F_{z_i} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

$$m_i \ddot{x}_i = 0 = \left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \end{array} \right\} (i=1, \dots, n)$$

Wobei  $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$

### 1.1.3.1 Einführung einer neuen Funktion, der Lagrange – Funktion

- $L = T - V = T(x_1, \dots, z_n) - V(x_1, \dots, z_n)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- Koordinatentransformation Kartesische Koordinaten  $\rightarrow$  verallgemeinert Koordinaten

$$\underbrace{(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)}_{3n} \rightarrow q_1, \dots, q_{3n}$$

wobei

$$x_i = f(q_1, \dots, q_{3n})$$

$$y_i = f(q_1, \dots, q_{3n})$$

$$z_i = f(q_1, \dots, q_{3n})$$

Bsp: Kartesische Koordinaten  $\rightarrow$  Kugelkoordinaten  $(x, y, z \rightarrow r, \theta, \varphi)$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

### 1.1.3.2 Bewegungsgleichung in Lagrange – Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, 3n$$

Gleichungssystem ist unabhängig von einer speziellen Wahl der Koordinaten

#### Fundamentales Postulat der klassischen Mechanik

Impuls des k-ten Teilchens in x-Richtung (kartesische Koordinaten):

$$P_{x_k} = m_k \dot{x}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}$$

Analog definiert man zur Koordinate  $\alpha$  den Impuls  $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}$

Der zu den verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 3n$ ) gehörende (konjugierte) verallgemeinerte Impuls

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, k = 1, \dots, 3n$$

um die Bewegungsgleichung in Lagrange Form lautet

$$\dot{P}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, k = 1, \dots, 3n$$

Aus den beiden Gleichungen folgen  $6n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung, die Äquivalent sind zu den  $3n$  Lagrange-Gleichungen 2. Ordnung

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = f(q_1, \dots, q_1, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_1)$$

Aus  $P_k$  (siehe oben)

- $\Rightarrow 3n$  Relationen zwischen  $P_k, q_k$  und  $\dot{q}_k$
- $\Rightarrow$  die  $3n$  Geschwindigkeiten können eliminiert werden und das System kann über die  $3n$  Koordinaten  $q_k$  und  $3n$  konjugierte Impulse beschrieben werden.

Hamilton (1834)

$$H(q_1, \dots, q_{3n}, p_1, \dots, p_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k))$$

Bewegungsgleichung in Hamilton Form

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \end{array} \right\} k=1, \dots, 3n$$

Kann zeigen: Konservatives System:

1.  $H = T + V =$  Gesamtenergie
2.  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , da Erhaltungsgröße

zu 2.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^{3n} (p_k \dot{q}_k - L) \right) = \sum_{k=1}^{3n} (p_k \ddot{q}_k + \dot{p}_k \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k) = 0$$

, da  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = p_k$  bzw.  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{p}_k$

### Beispiele von genereller Bedeutung

2 Punktteilchen mit Masse  $m_1$  und  $m_2$  bewegen sich unter Einfluss einer anziehenden Kraft, die durch eine potentielle Energie  $V(r)$  beschrieben wird, die nur vom Abstand  $r$  der Teilchen abhängt.

$$\Rightarrow L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V(r)$$

Koordinatentransformation

$$(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \rightarrow \left( \underbrace{x, y, z}_{\text{Massenzentrum}}, \underbrace{r, \theta, \varphi}_{\text{Relativbewegung}} \right)$$

- Koordinaten des Massenzentrums:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= (m_1 + m_2) x \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 &= (m_1 + m_2) y \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 &= (m_1 + m_2) z \end{aligned} \right\}$$

- Koordinaten für Relativbewegung

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y_2 - y_1 &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z_2 - z_1 &= r \cos(\theta) \end{aligned} \right\}$$

- Eliminierung von  $x_2, y_2, z_2$  in den Gleichungssystemen 1.1.3.2 und 1.1 (siehe oben)

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y_1 &= y - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z_1 &= z - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \cos(\theta) \end{aligned}$$

- Eliminierung von  $x_1, y_1, z_1$  analog

$$\begin{aligned}x_2 &= x + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\y_2 &= y + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\z_2 &= z + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \cos(\theta)\end{aligned}$$

- Einsetzen der zeitlichen Ableitung in (1)  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$  ( $\mu$  ist hier die reduzierte Masse)

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

- konjugierte Impulse zu  $x, y, z, r, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} \\p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} \\p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2)\dot{z} \\p_r &= \mu\dot{r} \\p_\theta &= \mu r^2 \dot{\theta} \\p_\varphi &= \mu r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$  Hamilton Funktion

$$\begin{aligned}H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \\&= (m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2) - L \\&= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{\text{kinetische Energie des Massenzentrums}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)}_{\text{kinetische Energie der Relativbewegung}} \\&\quad - \underbrace{V(r)}_{\text{pot. Energie}}\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung

$$\left. \begin{aligned}\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_y &= 0 \\ \dot{p}_z &= 0\end{aligned} \right\} \text{Massenzentrum bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\varphi^2}{r^3 \sin^2(\theta)} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ \dot{p}_\theta &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{p_\varphi^2 \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)^3} \right) \\ \dot{p}_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Bewegung eines Teilchens der Masse } \mu \\ \text{relativ zu einem fixierten Zentrum} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m_1 + m_2} \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m_1 + m_2} \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m_1 + m_2} \\ \dot{r} &= \frac{p_r}{\mu} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{\mu r^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{\mu r^2 \sin^2(\theta)} \end{aligned} \right\} \text{definieren die Impulse}$$

### 1.1.4 Galilei-Transformation

( $S'$  bewegt sich mit  $v_x$  relativ zu  $S$ )

- $t = 0$ : beide Ursprünge  $O$  und  $O'$  liegen zusammen
- In beiden Systemen  $S$  und  $S'$  läuft die Zeit gleich ab, d.h.:  $t = t'$
- Maßstäbe in beiden Systemen sind gleich
- Punkt  $P$  hat die Koordinaten:

$$\text{in } S': x' y', z'$$

$$\text{in } S: z = z', y = y', x = x' + vt$$

$$\text{Rücktransformation: } z' = z, y' = y, x' = x - vt$$

- Transformation der Geschwindigkeit

$$u = \frac{x}{t} \text{ und } u' = \frac{x'}{t'}$$

$$\boxed{u = u' + v;}$$

$$\boxed{u' = u - v}$$

- Länge  $L = x_2 - x_1 = (x_2' + vt) - (x_1' + vt) = x_2' - x_1' = L'$
- Beschleunigungen = Geschwindigkeitsänderungen:  
 $\Delta u = u_2 - u_1 = u_2' + v - (u_1' + v) = u_2' - u_1' = \Delta u'$   
 $\Rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta u'}{\Delta t}$  bzw.  $\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} \Rightarrow a = a' \Rightarrow F = F'$

#### Galilei'sches Relativitätsprinzip

Gelten die Gesetze der Mechanik in einem System  $S$ , dann gelten sie auch für alle anderen Systeme  $S'$ , die sich Relativ zu  $S$  gleichförmig und geradlinig bewegen.

#### Beispiel. Fluss mit Strömungsgeschwindigkeit $v=0$

Fragestellung: Beobachtete Zeiten für  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$ , Geschwindigkeit  $c$

1. Fall: Ruhendes Gewässer, d.h.  $v=0$

$$l = 300m, c = 10 \frac{m}{s}$$

$$\text{Hinweg } \overline{AB} = l \Rightarrow \tau_1 = \frac{l}{c} = 30s$$

$$\text{Rückweg } \overline{BA} = l \Rightarrow \tau_2 = \frac{l}{c} = 30s$$

$$\Rightarrow t_1 = \tau_1 + \tau_2 = 60s$$

$$\text{Hinweg } \overline{AC} = l \Rightarrow \tau_3 = \frac{l}{c} = 30s$$

$$\text{Rückweg } \overline{CA} = l \Rightarrow \tau_4 = \frac{l}{c} = 30s$$

$$\Rightarrow t_2 = \tau_3 + \tau_4 = 60s$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

2. Fall: Strömendes Gewässer

$$v = 5 \frac{m}{s}, l = 300m, c = 10 \frac{m}{s}$$

$$\text{Hinweg } \overline{AB} = l \Rightarrow \tau_1 = \frac{l}{c+v} = \frac{300m}{15 \frac{m}{s}} = 20s$$

$$\text{Rückweg } \overline{BA} = l \Rightarrow \tau_2 = \frac{l}{c-v} = \frac{300m}{5 \frac{m}{s}} = 60s$$

$$\Rightarrow t_1 = \tau_1 + \tau_2 = 80s$$

$$\text{Hinweg } \overline{AA'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{A'C}^2$$

$$(c\tau_3)^2 = l^2 + (v\tau_3)^2$$

$$\text{Rückweg } \tau_3 = \tau_4$$

$$\text{Gesamtweg } t_2 = 2\tau_3 = \dots = 2\sqrt{\frac{(300m)^2}{(10^2-5^2)(\frac{m}{s})^2}} = 69,3s$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 10,7s$$

### 3. Fall: Strömendes Gewässer

$$c' = 10\frac{m}{s}$$

A,B,C fest miteinander Verbundene Punkte, die mit der Strömung treiben

Mitbewegter Beobachter findet Fall 3 ist Fall 1 gleichwertig

4. Fall Ruhendes Gewässer, Bewegung des Systems der Punkte A,B,C mit der Geschwindigkeit  $v = 5\frac{m}{s}$ ,  $l = 300m$ ,  $c = 10\frac{m}{s}$ , gleichwertig Fall 2 d.h.  $\Delta t = 10,7s$

Zusammenfassung der 4 Bewegungsaufgaben

Bewegung parallel zur Strömung

$$t_1 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{lc+lv+lc-lv}{c^2-v^2} = \frac{2lc}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Abkürzung:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{t}{1-\beta^2}$$

$$t = \frac{2l}{t} \quad \text{Zeitdauer, wenn keine Strömung}$$

Bewegung  $\perp$  zur Strömung folgt

$$\left(c \frac{t_2}{2}\right)^2 = \left(v \frac{t_2}{2}\right)^2 + l^2$$

$$\Rightarrow t_2^2 = 4l^2 \frac{1}{c^2 - v^2}$$

$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 = \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\delta t = t_2 - t_1 = t \left[ \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] \neq 0 \text{ wenn } v \neq 0$$

## 1.2 Die Lichtgeschwindigkeit

- 1860. Maxwell'sche Gesetze = Zusammenfassung von Elektrizität und Magnetismus
- Maxwell - Gleichung:  $\Rightarrow$  el. magn. Wellen
  - Wellenlänge  $\lambda$
  - Frequenz  $\nu$
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\underline{c = \lambda \nu}$
- el. magn. Welle im Vakuum = Transversalwelle (Wellenvektor  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ )
- Wellengleichung:
 
$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = c^2 \left( \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} + \frac{d^2 \vec{E}}{dy^2} + \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} \right)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8, \frac{m}{s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \text{ Dielektrizitätskonstante} \\ \mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot kg}{C^2} \text{ Permeabilität} \end{array} \right\} \text{ des Vakuums}$$

- im Medium  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  und  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu}} = \frac{c}{n}$$

### 1.2.1 Messung der Lichtgeschwindigkeit

1849: Methode von Fizeau (Zahnradmethode)

1.2.1 Messung der Lichtgeschwindigkeit  
1849 Methode von Fizeau

Beobachter teildurchlässige Glasscheibe Lichtquelle Spiegel  
Zahnkranz rotierend mit  $z$ -Zähnen

Periode  $T$   
 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$

Zeit bis eine Lucke an die vorhergehende tritt  
 $\Delta t = \frac{\Delta L}{\omega} = \frac{2\pi}{z} \cdot \frac{1}{\omega}$

Lichtgeschwindigkeit  $c = \frac{2L}{\Delta t}$

$L \simeq 8,6 \text{ km}$

$\Rightarrow (315300 \pm 500) \frac{\text{km}}{\text{s}}$

### 1.2.2 Der Äther

Analogieschluss: hypothetisches Medium = Äther ist Träger von Lichtteilchen  
Aber Äther:

1. müsste masselos sein, andernfalls  $\Rightarrow$  Gravitationswirkung

2. darf Bewegung der Himmelskörper nicht beeinflussen  
 $\rightarrow$  kein Reibungswiderstand

3. müsste fester Körper sein, da

Licht = Transversalwelle (bekannt nur für Wellen in festen Stoffen)

$c$  sehr groß  $\Rightarrow$  Stoff muss sehr kompakt sein

### 1.2.3 Das Michelson – Morley Experiment

1.2.3 Das Michelson-Morley Experiment  
(analog Beispiel Boote (Bojen) im Fluss)

Michelson-Interferometer

monodirektional Licht

Lichtquelle

$c-v$

teildurchlässiger Spiegel

Spiegel 2

Spiegel 1

$AB=AC=l$

$c+v$

Erde bewegt sich mit  $v \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}} \ll c$

Zeit  $t_1$  für AB und zurück

$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}$

$t_1 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$t_2 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Ableserfernrohr oder Schirm

Interferenzstreifen

Erwartung nach Galilei:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left( \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\approx \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$v \ll c$

$$\approx \frac{l}{c} \frac{v^2}{c^2}$$

$\Rightarrow$  Wegunterschied  $\Delta s = \Delta t \cdot c = l \frac{v^2}{c^2}$

45° Drehung: kein Wegunterschied für Teilstrahlen

90° Drehung: Wegunterschied  $2l \frac{v^2}{c^2}$

in Einheiten Lichtwellenlänge  $\frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$

$\Rightarrow$  Wechsel zwischen hell und dunkel bei Drehung um 90°:  $2 \times$  Zahl der Lichtwellenlängen

$$= \frac{4l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

## 1.3 Die Einstein'schen Postulate

Michelson Versuch:

- Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist stets gleich groß, in welcher Richtung zur Erdumlaufbahn sie auch gemessen wird

1. Das Relativitätspostulat:

Die Gesetze der Physik gelten für Beobachter in *allen* Inertialsystemen gleichermaßen. Kein System ist dem anderen gegenüber bevorzugt

- Alle gleichförmig geradlinig bewegten Bezugssysteme sind gleichwertig
- Die Naturgesetze haben in diesen Systemen die gleiche mathematische Form
- Es existiert kein absolut ruhendes System. Es gibt nur relativ zueinander ruhende Systeme
- Jede Art von Bewegung ist relativ

2. Das Prinzip von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

Im Vakuum breitet sich Licht in allen Richtungen und in allen inertialen Bezugssystemen mit derselben Geschwindigkeit  $c$  aus.

- $c$  ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit  $v$  der Bezugssysteme
- In der Natur gibt es eine Höchstgeschwindigkeit  $= c$
- Masselose Teilchen (Licht, Neutrinos,...) breiten sich mit  $c$  aus, massebehaftete Teilchen können  $c$  nicht erreichen, egal wie sehr sie auch beschleunigt werden

## 1.4 Die Lorentz-Transformation und ihre Folgerungen

$\vec{F} = m\vec{a}$  Galilei – Transformation, Gesetz forminvariant (kovariant)

Maxwell-Gleichung Galilei – Transformation, Gesetz nicht forminvariant (nicht kovariant)

Widerspruch, da alle Inertialsysteme gleichberechtigt sein sollten.

Maxwellgleichung bzgl. Lorentz-Transformation kovariant.

### 1.4.1 Bestimmung des Lorentztransformationsfaktors

$\gamma$  Annahme:  $x' = \gamma(x - vt)$  (\*) (Galilei – Transformation)

- Randbedingung:  $c = c'$

- Koordinatenursprünge fallen zur Zeit  $t = t' = 0$  zusammen
  - Lichtsignal wird ausgesendet
  - ruhender Beobachter:  $x = ct$
  - bewegter Beobachter:  $x' = ct'$
- ⇒ mit (\*):

$$x' = \gamma \left( x - \frac{v}{c} x \right) = \gamma x \left( 1 - \frac{v}{c} \right) = \gamma x (1 - \beta) \quad (1.1)$$

$$\text{Rücktransformation } x = \gamma \left( x' + \frac{v}{c} x' \right) = \gamma x' \left( 1 + \frac{v}{c} \right) = \gamma x' (1 + \beta) \quad (1.2)$$

aus 1.1 · 1.2 folgt:  $\Rightarrow x'x = \gamma^2 x'x (1 - \beta)(1 + \beta) = \gamma^2 x x^2 (1 - \beta^2)$   
 $\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x'}{c} = \frac{\gamma}{c} (x - vt) \\ &= \frac{\frac{x}{c} - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \Rightarrow t = \frac{x}{c} &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Analog:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Zusammenfassung:

$$\begin{array}{lcl} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \Leftrightarrow \text{relativistische Vertauschung} & x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y & & y = y' \\ z' = z & & z = z' \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} & & t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array}$$

$S$  und  $S'$  können miteinander vertauscht werden, wenn gleichzeitig die Relativgeschwindigkeit das Vorzeichen ändert.

### 1.4.2 Vakuumlichtgeschwindigkeit als Grenzwert

Für  $v > c$  wird  $\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  imaginär  
 $\Rightarrow$  betreffende Größe hat keinen physikalischen Sinn

### 1.4.3 Längenkontraktion

- Galilei – Längemaß

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 = l \Rightarrow \text{bleibt konstant}$$

- Längenmessung

Messstab wird an einer zu Messenden Strecke angelegt und die Zahl der Maßeinheiten abgelesen, die in einem *bestimmten Moment* mit den Enden der Messstrecke zusammenfallen.

- Lorentz

$$\text{Ruhendes System: } l = x_2 - x_1$$

$$\text{Bewegtes System: } l' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Zeitern  $t_1$  und  $t_2$  sind so zu bestimmen, dass im System  $S'$  Anfangs und Endpunkte des Masstabes *im selben Moment* gemessen werden, d.h.:

$$\begin{aligned} t'_2 &\stackrel{!}{=} t'_1 \\ t'_2 &= \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \text{Gleichsetzen} \Rightarrow t_2 - t_1 &= \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \\ \Rightarrow l' &= \frac{x_2 - x_1 - v \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Bewegter Beobachter sieht kleinere Längen! Das selbe Ergebnis stellt auch der im anderen System befindliche Beobachter für Längen im ersten System fest:

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{folgt aus der relativistischen Vertauschung}$$

Kein Widerspruch, verschiedene Ereignispaare im System

$$S(x_1, t_1), (x_2, t_2) \quad \text{und} \quad S'(x'_1, t'_1), (x'_2, t'_2)$$

$$x'_1 - x'_2 = (x_1 - x_2) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{für } t_1 = t_2$$

$$x_1 - x_2 = (x'_1 - x'_2) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{für } t'_1 = t'_2$$

### 1.4.4 Zeitdilatation

Eine Uhr gebe am Ort  $x'_1 (= x'_2)$  im bewegten System Zeichen im Intervall

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Ruhendes System:

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 &= \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \Delta t &= \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Dem ruhenden Beobachter erscheinen die Intervalle gedehnt, bewegte Uhren gehen langsamer.

Kein System ist ausgezeichnet, d.h. es findet auch der Beobachter im  $S'$  System:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

#### **Beispiel.** Myonen in der Höhenstrahlung

*Myonen* entstehen durch Höhenstrahlungsprozesse in der Erdatmosphäre in einer Höhe von ca. 20 km.

- Ruhemasse der Myonen:  $m_M \cong 207m_e$
- Mittlere Lebensdauer:  $\tau_M = 2,2\mu s$
- Energie:  $E = 5GeV \cong E_{kin} \Rightarrow v < c \quad 1 - \frac{v}{c} = 2 \cdot 10^{-4}$

Klassisch zurückgelegte Wegstrecke:

$$s_{kl} = c \cdot \tau_M = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 2,2 \cdot 10^{-6} s = 660m$$

Myonen sind aber auf der Erdoberfläche nachweisbar, da:

$$s_{rel} = v \cdot \underbrace{\Delta t}_{\text{ruhender Beob.}} = v \frac{\overbrace{\Delta t'}^{\tau_M}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c\tau_M}{\sqrt{(1 + \frac{v}{c})(1 - \frac{v}{c})}} = 33km$$

**Beispiel.** Mesonenerfall im Labor

Im Laboratorium bestimmt man die mittlere Lebensdauer der *Mesonen* entweder am ruhenden ( $\tau$ ) oder an bewegten ( $\tau_2$ ) Mesonen.

Unterschied  $\tau_2 - \tau$  kann mit der relativen Zeitdilatation erklärt werden.

$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad \text{da } v = \frac{x}{t}$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\frac{x}{v\tau_2}}$$

$$\begin{aligned} \text{\Pi}^+ \text{Mesonen } v = 0,75c \text{ und } N(8,5m) &= \frac{N_0}{e} \\ \text{aus } 8,5m = 0,75c \cdot \tau_2 \Rightarrow \tau_2 &= 3,8 \cdot 10^{-8} s \end{aligned}$$

ruhendes  $\text{\Pi}^+$  Meson:

$$\tau = \tau_2 \sqrt{1 - \beta^2} = \tau_2 \cdot 0,66 = 23\mu s$$

### 1.4.5 Relativität der Gleichzeitigkeit

Im Rahmen der Lorentztransformation verliert die Zeit ihre Unabhängigkeit und wird ortsabhängig.

$\Rightarrow$  Forderung der Gleichzeitigkeit im System  $S$  (d.h.  $t_1 = t_2$ ) an dem Ort  $x_1$  und  $x_2$  ( $x_1 = x_2$ ) bedeutet nicht, dass auch im System  $S'$  das Ereignis zur selben Zeit stattfindet.

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Aus  $t_2 = t_1$  folgt:  $t'_1 \neq t'_2$

Allgemein:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 + \frac{v}{c^2} \overbrace{(x_1 - x_2)}^{\text{folgt zeitl. Verschiebung}}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{v}{c} \rightarrow 0 \quad v \rightarrow 0 \text{ oder } c \rightarrow \infty$$

Aufgrund der Relativität der Gleichzeitigkeit wird jedes Ereignis nicht nur durch Angabe eines Ortes, sondern auch durch den Zeitpunkt in dem es geschieht gekennzeichnet.

Ereignis im System  $S \rightarrow$  Wertepaar  $(x_1, t_1)$   
 gleiches Ereignis im System  $S' \rightarrow$  Wertepaar  $(x'_1, t'_1)$

Zweites Ereignis in  $S \rightarrow$  Wertepaar  $(x_2, t_2)$   
 Zweites Ereignis in  $S' \rightarrow$  Wertepaar  $(x'_2, t'_2)$

Zeitintervall zwischen den Ereignissen:

$$\begin{aligned}
 t_1 - t_2 &= \frac{t'_1 - t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} && \text{für } x'_1 = x'_2 \\
 \text{und } t'_1 - t'_2 &= \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} && \text{für } x_1 = x_2
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

### Uhrenparadoxon

*Zwillingsparadoxon:* Anwendung des Uhrenparadoxon auf eine Weltraumreise.

Zwilling **A** unternimmt mit einer gegen  $c$  nicht vernachlässigbaren Geschwindigkeit  $v$  eine Reise.

Zwilling **B** bleibt auf der Erde zurück. Nach einer Gesamtreisezeit von  $t'$  Jahren trifft **A** wieder mit dem in seinem Inertialsystem verbliebenen Bruder **B** zusammen. Der Bruder ist inzwischen  $t$  Jahre älter geworden.

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \text{Altersunterschied } \Delta t = t - t' = t' \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

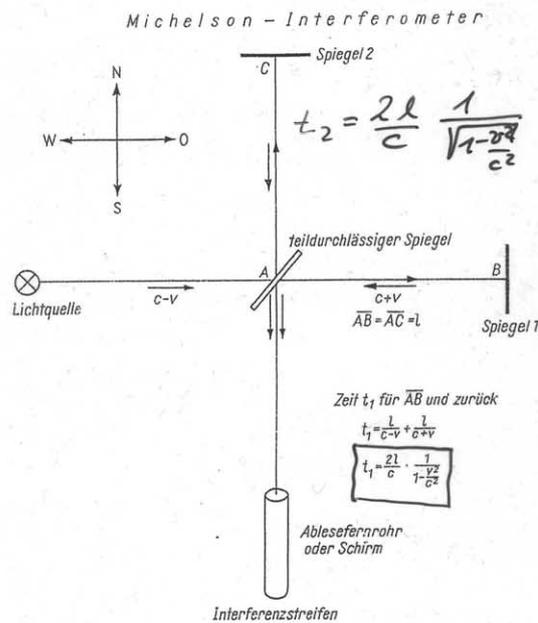
### 1.4.6 Beispiele

(stehen noch aus)

#### 1.4. DIE LORENTZ-TRANSFORMATION UND IHRE FOLGERUNGEN 25

## 1.4.7 Lorentz - Transformation Michelson Moreley-Experiment

## 1.4.7 Lorentz - Transformation und Michelson - Moreley Experiment



Ann  $\overline{AC}$  = ruhendes System  $S$   
 Ann  $\overline{AB}$  = bewegtes System  $S'$

Klassische Berechnung benutzt gleiche Maßeinheiten für die Strecken und Zeiten in beiden Systemen  
 $\Rightarrow \Delta t = t_1 - t_2 \neq 0$

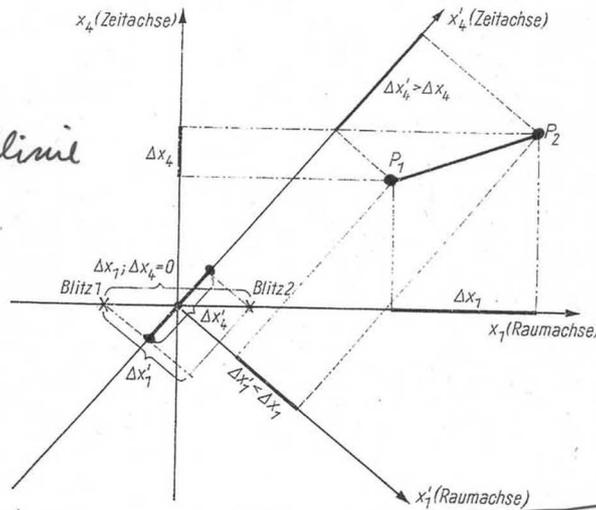
von  $S$  betrachtet ist Ann  $\overline{AB}$  verkleinert  $l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}$   
 $\Rightarrow t_1^* = \frac{2l_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c (1-\beta^2)} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = t_2 (l \rightarrow l_0)$   
 $\Rightarrow \Delta t = 0$

von  $S'$  betrachtet ist die Zeit im Ann  $\overline{AC}$  gedehnt  
 $\Rightarrow t_2^* = \frac{t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{1-\beta^2}$   
 $\Rightarrow \Delta t = t_1 - t_2^* = \frac{2l_0}{c} \left( \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{1-\beta^2} \right) = 0$

1.4. DIE LORENTZ-TRANSFORMATION UND IHRE FOLGERUNGEN 27

2 rechtwinklige Koordinatensysteme  $(x_1, x_4)$  und  $(x_1', x_4')$  um Winkel gegeneinander verdreht  
 $P_1, P_2$  Ereignisse (Weltpunkte) im Raum-Zeit-Kontinuum

Verbindung  
 $\overline{P_1 P_2} = \text{Weltlinie}$



Pythagoras (4D)  $\Rightarrow \overline{P_1 P_2} = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2}$   
 Abstand  $\overline{P_1 P_2}$  wird in beiden Systemen gleich bewertet

$$\overline{P_1 P_2} = \Delta s = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_4^2} = \sqrt{\Delta x_1'^2 + \Delta x_4'^2} = \text{invariant}$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

Verallg.:  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2$

Quadrat des Weltlinienelements ist Invariante  
 $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - c^2 dt'^2$

Beziehung wird auch als LT bezeichnet,  
 beide Seiten der Gleichung stellen Rechtecke,  
 mit Pochen  $ct$  bzw.  $ct'$  dar, deren Mittel-  
 punkte im Koordinatenursprung liegen  
 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2$ ;  $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2 t'^2$

### 1.4.8 Relativistische Geschwindigkeitstransformation

Galilei: Geschwindigkeiten werden linear addiert

$$u = u' + v$$

$$u' = u - v$$

Zwei Systeme  $S$  und  $S'$  bewegen sich parallel zur x-Achse mit der Relativgeschwindigkeit  $v$ . Im System  $S'$  bewege sich ein Punkt parallel zur x-Achse.

Beobachter im  $S'$ -System findet:  $u' = \frac{x'}{t'}$

beobachter im  $S$ -System findet  $u = \frac{x}{t}$

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2} t' + \frac{v}{c^2} x'} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2} x'} = \frac{t'(\frac{x'}{t'} + v)}{t'(1 + \frac{v}{c^2} \frac{x'}{t'})}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}$$

Mit relativistischer Vertauschung ( $v \rightarrow -v, u' \rightarrow u, u \rightarrow u'$ )

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}$$

Da  $1 + \frac{v}{c^2} u' > 1 \Rightarrow u_{relat} < u' + v$

und  $1 - \frac{v}{c^2} u < 1 \Rightarrow u_{relat} > u - v$

Geschwindigkeiten können *nicht* mehr linear addiert werden!

**Beispiel.** 1. Ergebnis Michelson Versuch

$$c + v_{Erde} = c$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'} \stackrel{u' = c}{=} \frac{c + v_{Erde}}{1 + \frac{v_{Erde} \cdot c}{c^2}} = \frac{c^2(c + v_{Erde})}{c^2 + v_{Erde} \cdot c} = c$$

2. Addition zweier Unterlichtgeschwindigkeiten

$$u' = 0,5c \quad v = 0,5c$$

$$u = \frac{0,5c + 0,5c}{1 + \frac{0,5c \cdot 0,5c}{c^2}} = \frac{c}{1 + 0,25} = \frac{c}{1,25} = 0,8c$$

3. Summe zweier Lichtgeschwindigkeiten

$$u = \frac{c + c}{1 + c^2/c^2} = \frac{2c}{2} = c$$

Bisher: Spezialfall, Geschwindigkeit des Punktes *parallel* zur x-Achse gerichtet

$$\begin{aligned} u_y &= 0, & u_z &= 0 \\ \Rightarrow u'_y &= 0, & u'_z &= 0 \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall: Geschwindigkeitsvektor hat drei Komponenten:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{t} \\ \frac{y}{t} \\ \frac{z}{t} \end{pmatrix}; \quad \vec{u}' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{t'} \\ \frac{y'}{t'} \\ \frac{z'}{t'} \end{pmatrix}$$

$$\frac{y}{t} = \frac{y' \sqrt{1 - \beta^2}}{t' + \frac{v}{c^2} x'} = \frac{y'}{t' (1 + \frac{v}{c^2} u_x)} = u'_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} & \Leftrightarrow \text{relativistische Vertauschung} & & u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u_y &= u'_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} & & & u'_y &= u_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u_z &= u'_z \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} & & & u'_z &= u_z \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \end{aligned}$$

Klassisches Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt *nicht* mehr!  
Galilei:

$$u = u' + v$$

Oder vektoriell:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$$

$$\vec{u}\vec{u} = (\vec{u}' + \vec{v})(\vec{u}' + \vec{v}) = \vec{u}'^2 + 2\vec{u}'\vec{v} + \vec{v}^2 = u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \varphi$$

Relativistisch:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}\vec{u} &= \vec{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \\
 u^2 &= \left( \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \right)^2 + \left( \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \right)^2 + \left( \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \right)^2 \\
 &= \frac{u_x'^2 + 2u'_x v + v^2 + u_y'^2(1 - \beta^2) + u_z'^2(1 - \beta^2)}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^2} \\
 &= \frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 + v^2 - u_y'^2 \frac{v^2}{c^2} - u_z'^2 \frac{v^2}{c^2} + 2u'_x v}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^2} \\
 \Rightarrow u &= \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \varphi - \left(\frac{vu' \sin \varphi}{c}\right)^2}}{1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \varphi}
 \end{aligned}$$

wobei gilt:  $-\frac{v^2}{c^2}(u_y'^2 + u_z'^2)$  mit  $u_y'^2 + v_z^2 = u'^2 - u'^2 \cos^2 \varphi$   
 $u'^2(1 - \cos^2 \varphi) = u'^2 \sin^2 \varphi$

### 1.4.9 Relativistische Beschleunigung

Geschwindigkeitsänderung  $du$  in der Zeiteinheit  $dt$

$$a = \frac{du}{dt} \quad \text{Galilei: } \vec{a} = \vec{a}'$$

Zwei Fälle: Beschleunigung in Richtung der Bewegung  $a_x$  bzw.  $a'_x$  und senkrecht zu der Richtung:  $a_y$  bzw.  $a'_y$

Bei Körpern im bewegten System  $S'$  :  $t' = 0$  misst man  $u'_x = 0$  bzw. ist  $t' = \Delta t'$  dann misst man  $\Delta u'_x$

Beobachter im System  $S$  (Relativgeschwindigkeit relativ zu  $S'$  ist  $v$ ) hingegen

1.4. DIE LORENTZ-TRANSFORMATION UND IHRE FOLGERUNGEN 31

findet  $u_x = v$  und  $u_x + \Delta u_x$

$$u_x + \Delta u_x = v + \Delta u_x =$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{add. Theorem}}{\cong} \frac{v + \Delta u'_x}{1 + \frac{v}{c^2} \Delta u'_x} \stackrel{\substack{\Delta u'_x \ll v \\ \frac{1}{1+x} \cong 1-x}}{\cong} (v \Delta u'_x) \left(1 - \frac{v}{c^2} \Delta u'_x\right) \\ & v + \Delta u'_x - \frac{v^2}{c^2} \Delta u'_x + \underbrace{\frac{v}{c^2} \Delta u'^2_x}_{=0} \end{aligned}$$

$$\Delta u_x = \Delta u'_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\text{mit } \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{\Delta u'_x}{\Delta t'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = a'_x \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$$

y-Komponente der Beschleunigung:

$$y' = y \Rightarrow \Delta y' = y$$

$$\Rightarrow \frac{\delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$u'_y = u_y \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{\Delta u'_y}{\Delta t'} = \frac{\Delta u_y}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta u_y}{\Delta t} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$a'_y = a_y \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\boxed{a_y = a'_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Analog folgt für z-Achse:

$$\boxed{a_z = a'_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

## 1.5 Relativistische Dynamik

- Galilei:

a) Masse ist Erhaltungsgröße

b) Erhaltungssatz für Impuls

- Lorentz:

Zu zeigen ist: Der Impulserhaltungssatz behält gewohnte Form, wenn die Masse eine Funktion der Geschwindigkeit wird

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad m_0 \text{ ist Ruhemasse}$$

### 1.5.1 Impulserhaltungssatz und Massenveränderlichkeit

Voraussetzung: vollkommen unelastischer Stoß

Im System  $S'$  bewegen sich längs der  $x'$ -Achse zwei vollkommen plastische Kugeln mit den Geschwindigkeiten  $u'$  bzw  $-u'$  aufeinander zu.

Sie führen einen idealen unelastischen Stoß aus, sodass sie beide nach dem Zusammenstoß im System  $S'$  in Ruhe sind  $u'_n = 0$

Impulserhaltung im System  $S'$

$$\begin{aligned} m'_1 u' + m'_2 (-u') &= (m'_1 + m'_2) \cdot 0 \\ (m'_1 - m'_2) u' &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Massengleichheit  $m'_1 = m'_2$  gilt auch, wenn die Massen in „Ruhe“ sind  $m'_{1,0} = m'_{2,0}$

Impulserhaltung im System  $S$  (bewegt sich Parallel zur  $x'$ -Achse mit der

Geschwindigkeit  $v$ )

$$\begin{aligned}
 m_1 u_1 + m_2 u_2 &= (m_1 + m_2)u \\
 \text{Additionstheorem: } u_1 &= \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} \\
 u_2 &= \frac{-u' + v}{1 - \frac{v}{c^2}u'} \\
 m_1 \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} + m_2 \frac{-u' + v}{1 - \frac{v}{c^2}u'} &= (m_1 + m_2)v \\
 m_1 \left( \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}} - v \right) + \left( \frac{-u' + v}{1 - \frac{v}{c^2}} - v \right) &= 0 \\
 m_1 \frac{u' + \cancel{v} - \cancel{v} - \frac{v^2}{c^2}u'}{1 + \frac{v}{c^2}u'} + m_2 \frac{-u' + \cancel{v} - \cancel{v} + \frac{v^2}{c^2}u'}{1 - \frac{v}{c^2}u'} &= 0 \\
 \Rightarrow m_1 \frac{u'(1 - \frac{v^2}{c^2})}{1 + \frac{v}{c^2}u'} = m_2 \frac{u'(1 - \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{v}{c^2}u'} &
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}u'}{1 + \frac{v}{c^2}u'}}$$

• Folgerungen:

a)  $u' \neq 0 \Rightarrow$  Kugeln haben in  $S$  verschiedene Massen  $m_1 > m_2$

b)  $u' = 0$ , d.h.  $u_1 = u_2 = v \Rightarrow m_1 = m_2$  Kugeln haben in  $S$  gleiche Massen, wenn sie die gleiche Geschwindigkeit haben. Speziell gilt für  $v = 0 \Rightarrow$  Ruhmassen gleich, d.h.  $m_{1,0} = m_{2,0}$

Wähle Relativgeschwindigkeit  $v = u'$

$$u_1 = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{und} \quad u_2 = 0 \quad \text{d.h. 2.Kugel in Ruhe} \quad \Rightarrow m_2 = m_{2,0}$$

$$\Rightarrow \frac{m_{2,0}}{m_1} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Da Ruhemassen gleich

$$\begin{aligned} \frac{m_{1,0}}{m_1} &= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \left(\frac{m_{1,0}}{m_1}\right)^2 &= \frac{1 + (\beta^2)^2 - 2\beta}{(1 + \beta^2)^2} \\ &= \frac{1 + (\frac{v^2}{c^2})^2 + 2\frac{v^2}{c^2} - 4\frac{v^2}{c^2}}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2} \\ &= 1 - \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{av^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}}_{u^2} \\ \left(\frac{m_{1,0}}{m_1}\right)^2 &= 1 - \frac{u_1^2}{c^2} \\ \text{bzw } \boxed{m_1 = \frac{m_{1,0}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}} &= m_0 + \Delta m \end{aligned}$$

Wobei  $\Delta m$  Massenveränderung bei Geschwindigkeitszunahme  $\propto$  kinetischer Energie ist.

Bewegt sich ein Körper der Ruhemasse  $m_0$  gegenüber einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit  $u$ , so misst man die Masse (*Impulsmasse*)

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

(Folie „Relativistischer Impuls“)

$$m - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \underset{v \ll c}{\simeq} m_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = m_0 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\substack{E_{kin,kl} \\ \Delta m}} \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta m c^2 = E_{kin,kl}}$$

• Folgerung:

a) kin. Energie ist einem Massenzuwachs proportional (und umgekehrt)

b) Masse und Energie sind äquivalent, wobei  $E_{kin,kl} \rightarrow E_{kin,relat}$

### 1.5.2 Masse – Energie Äquivalenz

$$E = mc^2$$

Ausgangspunkt:  $F = \frac{d}{dt}(m \cdot v) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Arbeit = kinetische Energie, die die Kraft verrichtet hat, um das Teilchen auf die Geschwindigkeit  $v$  zu bringen.

$$\begin{aligned} dA &= F \cdot ds \frac{dA}{dt} = f \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \overbrace{\frac{ds}{dt}}^v \right) \frac{ds}{dt} \frac{dA}{dt} \\ &= \left[ \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta \frac{d\beta}{dt} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v=c\beta} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}}_{c \cdot \frac{d\beta}{dt}} \right] \frac{ds}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{\beta c \beta}{1-\beta^2} \frac{d\beta}{dt} + c \frac{d\beta}{dt} \right) c\beta \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{1-\beta^2} \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow dA = m_0 \int \frac{\beta d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Substitution:

$$z = \sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \frac{dz}{d\beta} = -\frac{2\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta}{z} \Rightarrow \beta d\beta = -z dz$$

$$A = m_0 c^2 (-) \int \frac{dz}{z^2} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{z} + \text{const} \right)$$

$$A = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const } m_0 c^2$$

$$A = 0 \text{ für } v = 0 \text{ bzw. } \beta = 0$$

$$0 = m_0 c^2 + \text{const } m_0 c^2 \Rightarrow \text{const} = -1$$

$$A = E_{kin} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

$$= (m - m_0) c^2$$

$$= \Delta m c^2$$

Kinetische Energie ( $E_{kin}$ ) = Gesamtenergie ( $mc^2$ ) - Ruhemasse  $m_0 c^2$

### 1.5.3 Der relativistische Energie Impuls Satz

- Nach klassischer Physik gilt:  $p = mv$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

- In der Relativitätstheorie gilt hingegen:  $\underbrace{E^2}_{\text{Ges.Energie}} = \underbrace{E_0^2}_{\text{Ruheenergie}} + p^2c^2$

Wobei  $p = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
 \left(\frac{mc^2}{c^2}\right)^2 &= \left(\frac{m_0c^2}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \quad | \cdot (1-\beta^2) \\
 \frac{m^2c^4}{c^4}(1-\beta^2) &= \frac{m_0^2c^4}{c^4} \\
 \frac{m^2c^4}{c^4} - \frac{m^2c^4v^2}{c^4c^2} &= \frac{m_0^2c^4}{c^4} \quad | \cdot c^4 \\
 \underbrace{m^2c^4}_{E^2} - \underbrace{(mv)^2c^2}_{-p^2c^2} &= \underbrace{(m_0c^2)^2}_{E_0^2} \\
 E_2 &= E_0^2 + p^2c^2 \\
 \sin \varphi = \frac{pc}{E} = \frac{mv}{mc} &= \frac{v}{c} = \beta
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel.** Bestimmung der Geschwindigkeit eines Elektrons mit der Energie  $2,4MeV$  (Ruheenergie  $m_0c^2 = 0,511MeV$ )

$$\begin{aligned}
 p \cdot c &= \sqrt{E^2 - E_0^2} \\
 &= \sqrt{(2,4MeV)^2 - (0,511MeV)^2} = 2,34MeV
 \end{aligned}$$

$$\frac{pc}{E} = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{2,34MeV}{2,4MeV} = 0,975$$

**Beispiel.** Licht.

Da  $v = c$  ist  $\beta = 1$

$$E = p \cdot c \quad p = \frac{E}{c}$$

Also:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

—————Ende des bereits korrekturgelesenen Bereiches—————

### 1.5.4 Invarianz und Transformation von Energie und Impuls

- Relativistische Energiebilanz

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_0 \\ m(v)c^2 &= E_{kin} + m_0c^2 \end{aligned}$$

- Ruhenergie  $E_0 = m_0c^2$  ist in allen Bezugssystemen gleich (*Lorentz Invarianz*)
- Relativistische Energie-Impulsbeziehung

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Ist ebenfalls unabhängig von speziellen Koordinaten.

- Impuls und Energie (Masse) transformieren von einem System  $S$  in ein anderes System  $S'$  in analoger Weise wie  $x$  und  $t$

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \Rightarrow p_x &= \frac{p'_x - \frac{v}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\ p'_z &= p_z & p_z &= p'_z \\ \frac{E'}{c^2} &= \frac{\frac{E}{c^2} - \frac{v}{c^2} p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{E'}{c^2} &= \frac{\frac{E}{c^2} + \frac{v}{c^2} p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

- Impulserhaltung  $\Delta p = 0$  oder der Energieerhaltung  $\Delta E = 0$  für Beobachter im  $S$  System  $\Rightarrow$  Beobachter im  $S'$  System

$$\Delta p' = 0 \text{ und } \Delta E' = 0$$

## 1.6 Das euklidische Raum-Zeit-Kontinuum

### 1.6.1 Ereignis, Kontinuum, Weltlinie

- Raum:

3 dimensionales Kontinuum

Ort eines Punktes  $(x, y, z)$

- Spezielle Relativitätstheorie (SRT):

Zeit ist keine absolute Größe mehr,

Zeit ist mit Ort verknüpft

$$\Rightarrow (x, y, z, t) \Rightarrow \text{Raum-Zeit -Kontinuum}$$

- *Minkowski*:

4D-Raum-Zeit-Kontinuum kann in kann in maßgebenden formalen Eigenschaften wie das 3D Kontinuum des Euklidischen Raumes dargestellt werden.

- Verallgemeinerung:  $(x, y, z, t) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$  mit  $x_4 = \sqrt{-1}ct = ict$

(Folie Zeitachse-Raumachse)

- Pythagoras in 4 Dimensionen:

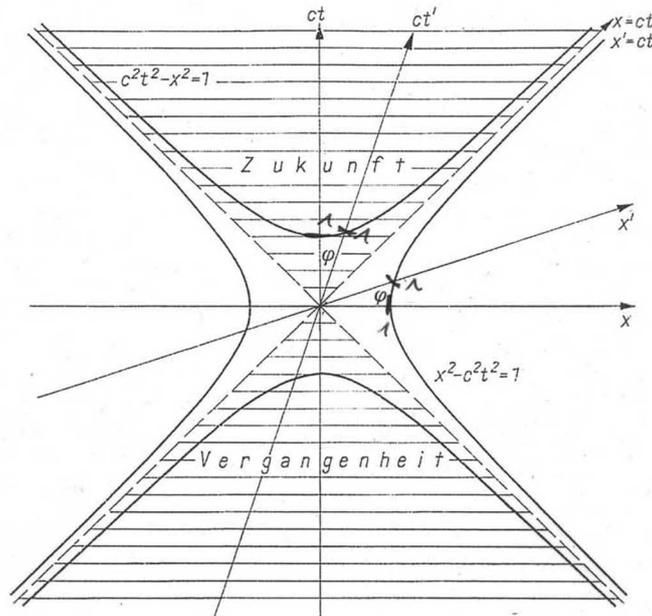
$$\overline{p_1 p_2} = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2}$$

(seien  $\Delta x_2^2 = \Delta x_3^2 = 0$ )

Lorentz-Transformation:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - c^2 dt'^2$$

LT: Transformation eines rechtwinkligen ( $x, ct$ )  
 $S$ -Systems, in ein schiefwinkl. Liniensystem ( $x', ct'$ )  
 $S'$ -System



Winkel  $x-x'$ -Achse:  $\varphi = \arctan \beta$

- " -  $ct-ct'$ -Achse:  $\varphi = \arctan \beta$

Metrik:  $x^2 - c^2t^2 = \pm 1 = x'^2 - c^2t'^2$

4 Bereiche zu unterscheiden, in denen ein Ereignis  $(x_1, x_2, x_3, ct)$  relativ zu  $(0, 0, 0, 0)$  stattfinden kann.

Vergangenheit:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < c^2t^2$ ;  $t < 0$

Zukunft:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < c^2t^2$ ;  $t > 0$

Lichtkegel:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2$

Zeigenwert:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > c^2t^2$

## 1.6.2 Geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation

$$S \rightarrow S'$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1', x_2', x_3', x_4')$$

Zu zeigen: Übergang von einem rechtwinkligen System  $S$  zu einem Schiefwinkligen System  $S'$ , vermittelt durch eine Drehung um einen imaginären Winkel  $\varphi$

Lorentz-Transformation in neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_4 &= ict & x_4' &= ict' \\ t &= \frac{x_4}{ic} & t' &= \frac{x_4'}{ic} \\ x_1 &= \frac{x_1' - i\frac{v}{c}x_4'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & x_1' &= \frac{x_1 + i\frac{v}{c}x_4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x_2 &= x_2' & x_2' &= x_2 \\ x_3 &= x_3' & x_3' &= x_3 \\ x_4 &= \frac{x_4' - i\frac{v}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & x_4' &= \frac{x_4 - i\frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine LT}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (\text{allgemeine LT})$$

$a_{ik}$  -Richtungskosinus des Systems  $S'$   
gegen die Achse des Systems  $S$

Forderung für die Metrik:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= c^2 t^2 \\ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 &= c^2 t'^2 \end{aligned}$$

Spezielle LT: 10  $a_{ik}$  Koeffizienten verschwinden

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}}_{a_{ik}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

Elementare Analytische Geometrie:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Aus Vergleich mit Koeffizientenmatrizen  $a_{ki}$  und  $a_{ik}$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sin \varphi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Winkel zwischen Abszissen  $x$  und  $x'$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = i\frac{v}{c} = i\beta \Rightarrow \varphi = \arctan i\beta$$

LT ist geometrisch als Drehung eines Koordinatensystems um einen imaginären Winkel aufzufassen.

Ansatz:  $\varphi = i\psi$ ,  $\psi$  -reell

$$\cos \varphi = \cos(i\psi) = \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\sin \varphi = \sin(i\psi) = i \sinh \psi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{i \sinh \psi}{\cosh \psi} = i \tanh \psi$$

$$\Rightarrow \tanh \psi = \beta$$

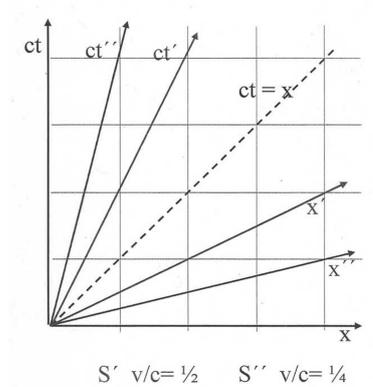
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & i \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Übergang zu reellen Größen:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x'_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{r^2 ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.4)$$

$$ct' = \frac{x_1 \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.5)$$



Verlauf der  $x'_1$ -Achse um  $(x_1, ct)$  Diagramm?

- Bedingung für  $x'_1$  Achse ist  $ct' = 0$

$$(1.5) \Rightarrow 0 = \frac{-\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{ct = \beta x} \quad \text{Gerade mit Steigung } \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Winkel zur  $x_1$ -Achse  $\varphi_1 = \arctan \beta$

- Verlauf der  $ct'$ -Achse im  $(x, ct)$ -Diagramm?

Bedingung  $x'_1 = 0$

$$(1.4) \Rightarrow 0 = \frac{x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{ct = \frac{x_1}{\beta}} \quad \text{Gerade mit Steigung } \frac{1}{\beta} = \frac{c}{v} > 1$$

Winkel zur  $x_1$ -Achse  $\varphi_2 = \arctan(\frac{1}{\beta})$

- Festlegung der Metrik (Maßeinheiten)

$$x_2^2 - c^2 t^2 = x_1'^2 - c^2 t'^2 = \pm 1 m^2$$

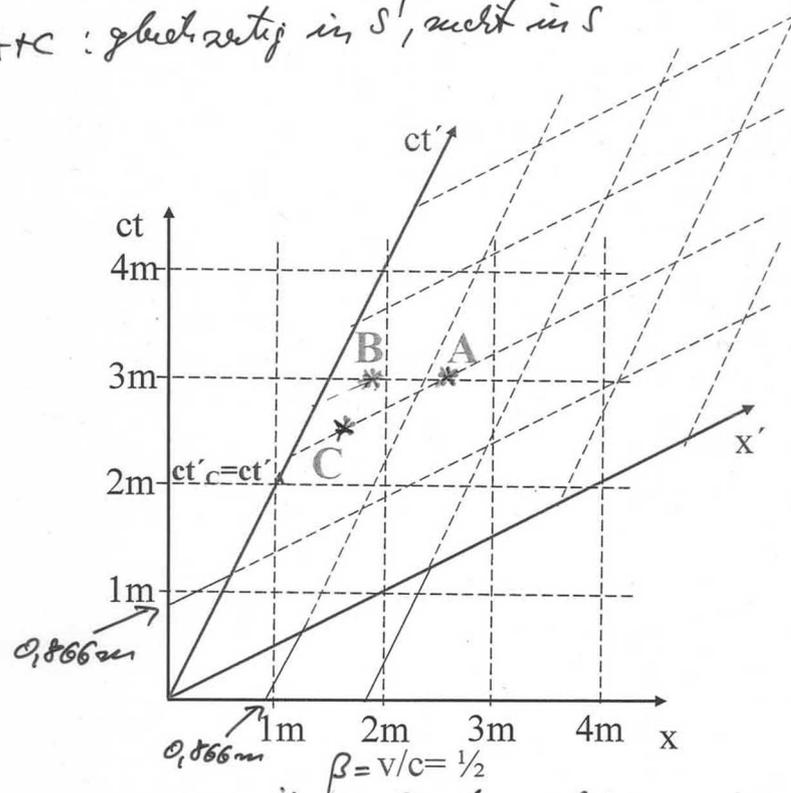
Für Licht gilt:  $x_1 = ct$  und  $x_1' = ct'$

$\Rightarrow$  Hyperbeln

gleichzeitigkeit und Achsenablesung der Bezugssysteme

A+B: gleichzeitig in S, weil  $ct_A = ct_B$   
nicht gleichzeitig in S', weil  $ct_B' > ct_A'$

A+C: gleichzeitig in S', nicht in S



Achsenabschnitte (= Raßstrecken)

Wo schneidet die Linie  $x' = 1m$  die  $x$ -Achse, d.h.

$ct = 0$ ?

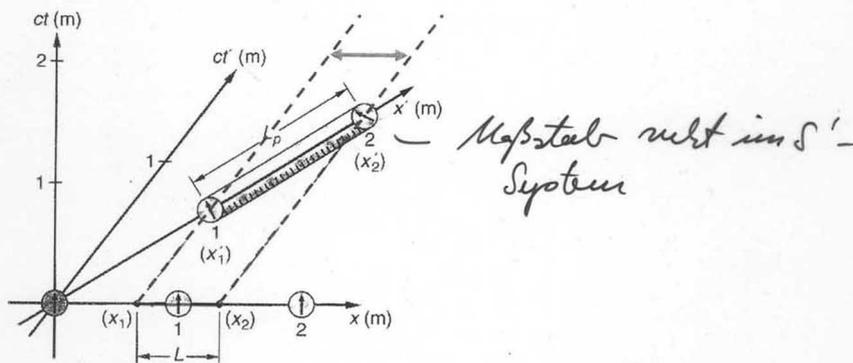
$$1m = x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ mit } t=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1m \Rightarrow x = \sqrt{1-\beta^2} = 0,866m$$

Wo schneidet die Linie  $ct' = 1m$  die  $ct$ -Achse, d.h.

$x = 0$ ?

$$1m = ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ mit } x=0 \Rightarrow ct = \sqrt{1-\beta^2} = 0,866m$$

## Längenkontraktion



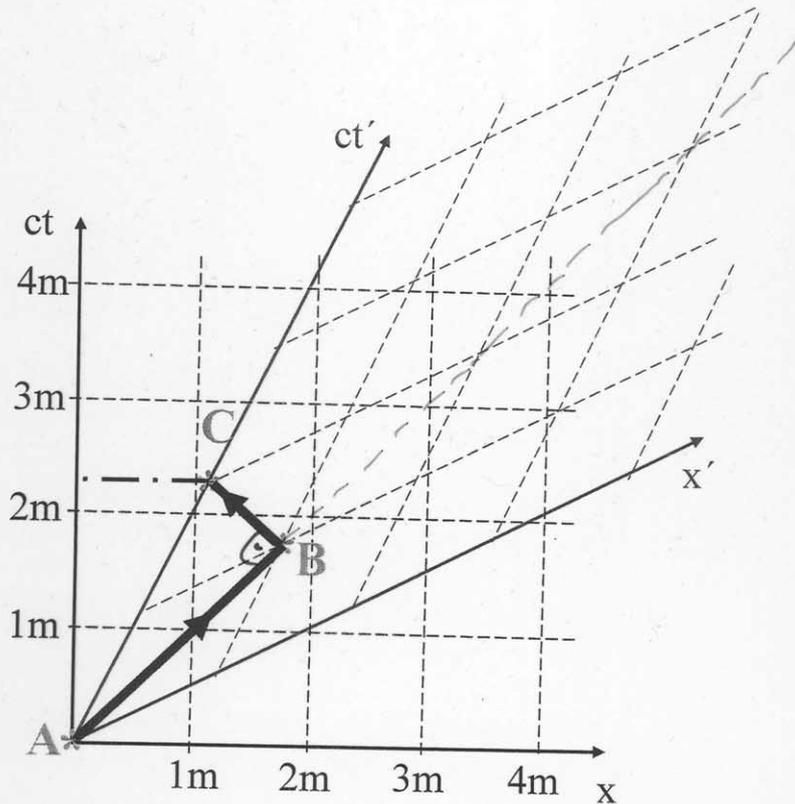
gemessene Länge des sich bewegendes Objekts =  
Eigenlänge  $L_0$

$$L_0 = x_2' - x_1' \quad \text{zur Zeit } t' = 0$$

System  $S$ :  $L = x_2 - x_1$ , wobei die Position der  
Stabenden zum selben  
Zeitpunkt  $t_1 = t_2$   
gemessen werden müssen.

$$\Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

## Zeitdilatation



Weltlinie des Lichtstrahls ist A-B-C

Ereignisse:

A = Erzeugung bei  $x_A \neq x'_A$  zum Zeitpunkt  
 $t_A = t'_A = 0$

B = Reflexion bei  $x'_B = 1m \neq x_B$

C = Auftreffen am Erzeugungspunkt  $x'_C = 0$

Steigung der Lichtgeraden: Hinweg:  $+45^\circ$   
 Rückweg:  $-45^\circ$

Zeitpunkt des Auftreffens bei  $x'_C = 0$

$$ct'_C = 2m$$

$$ct_C = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}} > ct'_C$$

**Beispiel.** Zeitdilatation

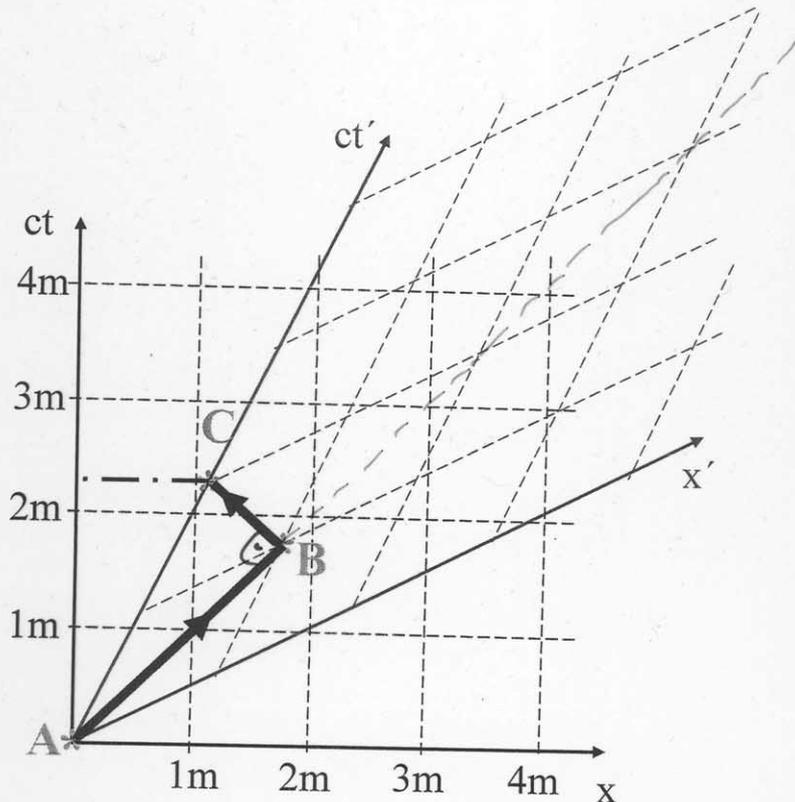
Raumschiff mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zum System  $S$

Lichtweg in  $S$  ist länger als in  $S'$

$$\Rightarrow \text{Zeitdauer } \Delta t > \Delta t'$$

Kürzestes Zeitintervall = *Eigenzeit*, wird von der Uhr gemessen, die sich am Ort der beiden Ereignisse befindet

## Zeitdilatation



Weltlinie des Beobachters ist A-B-C

Ereignisse:

A = Erzeugung bei  $x_A \neq x'_A$  zum Zeitpunkt  
 $t_A = t'_A = 0$

B = Reflexion bei  $x'_B = 1m \neq x_B$

C = Auftreffen am Erzeugungspunkt  $x'_C = 0$

Steigung der Lichtgeraden: Hinweg:  $+45^\circ$   
 Rückweg:  $-45^\circ$

Zeitpunkt des Auftreffens bei  $x' = 0$

$$ct'_C = 2m$$

$$ct_C = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}} > ct'_C$$

## 1.7 Der relativistische Dopplereffekt

- 1843 *Christian Doppler*:

Untersuchungen zur Schallausbreitung

- Beobachtungen:

Frequenzänderungen werden bei bewegter Schallquelle und/oder Schallempfänger gemessen

- Klassische Behandlung: 2 Grenzfälle

1. Empfänger/Beobachter bewegt sich mit  $v_B$  auf den ruhenden Sender zu bzw von ihm weg

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{v_s}{c_s}\right)$$

2. Empfänger ruht, der Sender bewegt sich mit  $v_\phi$  auf ihn zu bzw von ihm weg

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v_\phi}{c_s}}$$

3. Wenn der Sender und der Empfänger sich bewegen:

$$\Rightarrow \nu = \nu_c \frac{1 \pm \frac{v_B}{c_s}}{1 \mp \frac{v_\phi}{c_s}}$$

Als Bezugssystem dient in der Akustik das ruhende Medium.

Herleitung der Allgemeinen Beziehung für den Dopplereffekt

Ebene Welle im Vakuum:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} && \text{mit } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{\lambda})} \\ &= \vec{E}_0 e^{i2\pi\nu(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c})\omega} = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} \\ &= \vec{E}_0 e^{i\psi(t, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi' &= 2\pi\nu \left[ \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\cos\alpha(x' + vt')}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\cos\beta}{c \cdot y' - \frac{\cos\gamma z'}{c}} \right] \\
&= \frac{2\pi\nu(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[ t' - \frac{x'}{c} \frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} - \frac{y' \cos\beta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c} - \frac{z' \cos\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c} \right] \\
&= 2\pi\nu' \left[ t' - \frac{x'}{c} \cos\alpha' - \frac{y'}{c} \cos\beta' - \frac{z'}{c} \cos\gamma' \right]
\end{aligned}$$

dieselbe Bauart wie Phase für das ruhende System  
 $\Rightarrow$  Eine ebene Welle bleibt bei LT eine eben Welle

- Änderungen

a) Schwingungszahl

$$\nu = \nu_0 \frac{1 - \frac{v}{c} \cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

b) der Richtungen der Wellennormale (neuer Richtungskosinus)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha' &= \frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} \\
\cos\beta' &= \frac{\cos\beta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} \\
\cos\gamma' &= \frac{\cos\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha}
\end{aligned}$$

Lichtausbreitung in der x-Achse ( $\alpha = 0, \pi$ ),  $v$  liegt in der Sichtlinie

$$\begin{aligned}
\nu' &= \nu \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \nu \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})}} \\
&= \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \mp \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad \text{„longitudinaler“ Dopplereffekt}
\end{aligned}$$

- Vergrößert sich der Abstand zwischen Beobachter und Lichtquelle  $\Rightarrow$  *Rotverschiebung* von Spektrallinien
- Gleichförmige Verringerung des Abstandes  $\Rightarrow$  *Violettverschiebung* von Spektrallinien
- Lichtausbreitung  $\perp$  zur x-Achse ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ )  
 $\Rightarrow$  transversaler (quadratischer) Dopplereffekt.

Vorraussetzung: Statt Winkel  $\alpha$  wird der Winkel  $\alpha'$  im Bezugssystem des Beobachters eingesetzt:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha'}$$

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha'}$$

$$\stackrel{\alpha' = \frac{\pi}{2}}{=} \nu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\stackrel{v \ll c}{\cong} \nu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{quadratischer Dopplereffekt}$$

## 1.8 Allgemeine Relativitätstheorie

- SRT:  
 Sonderfall von zueinander gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssystem
- ART:  
 beliebige Bewegungen zueinander, auch beschleunigt
- Einstein:  
 verallgemeinerung des Relativitätsprinzip. Es gibt keine absolute Bewegung, sondern nur relative.  
 Die Naturgesetze bleiben in allen Systemen erhalten. Alle *beliebigen* gegeneinander bewegten Bezugssysteme sind zur Beschreibungen gleichberechtigt.

### 1.8.1 Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere

- klassische Physik:

träge Masse  $m_t$  und schwere Masse  $m_s$

Maß für die Fähigkeit eines Körpers einer Beschleunigung zu widerstehen. (Skizze Massenpunkt, Kraft)

Maß für die Fähigkeit eines Körpers, ein Gravitationsfeld zu erzeugen und/oder von einem solchen Beeinflusst zu werden (Skizze Massenanziehung Erde - Körper)

- Erfahrungstatsachen (Experimente)

$$\boxed{m_t = m_s}$$

Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Weltraum (Skizze Mensch in Kasten) Seil wird mit konstanter Kraft  $F$  gezogen.

Mensch im Kasten nimmt Gravitationsfeld wahr, während ein „ruhender“ Beobachter außerhalb des Kastens eine gleichförmig beschleunigte Bewegung feststellen würde.

⇒ Gleichförmig beschleunigte Bewegung und ein Gravitationsfeld können (für kleine Raumgebiete) wechselseitig ersetzt werden.

Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere

1. Krümmung der Lichtstrahlen

(Skizze bewegtes Bezugssystem, Licht senkrecht dazu)

Äquivalenzprinzip ⇒ Krümmung muss auch in einem Gravitationsfeld auftreten (Skizze Licht-Sonne)

2. Rotverschiebung im Gravitationsfeld (Skizze „Dopplereffekt“ vom Licht)

Wenn Lichtpuls Beobachter trifft hat er Momentangeschwindigkeit  $v$

Dopplereffekt:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}} \simeq \nu_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

$$\Delta\nu = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \simeq \frac{v}{c}$$

Äquivalenzforderung: Im System  $S$  mit der Gravitation  $\vec{g}$  muss sich ebenfalls eine Frequenzverschiebung einstellen.

3. Gravitationswirkung können durch passend gewählte Bewegung zum verschwinden gebracht werden.

**Beispiel.** Masse im Gravitationspotential

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &= \Delta E_{\text{pot}} = \int_{\infty}^r F_y dr = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \frac{1}{r} \Big|_{+\infty}^r \\ &= gMm \frac{1}{r} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \\ &\Rightarrow \boxed{v^2 = 2 \frac{GMm}{r}} \end{aligned}$$

Äquivalenzprinzip: Es ist gleichgültig, ob man annimmt, der Beobachter ruhe in der Entfernung  $r$  von  $M$  im Gravitationsfeld, oder ob man annimmt, das Gravitationsfeld fehle und der Beobachter hab dafür in der Entfernung  $r$  von  $M$  eine momentane Geschwindigkeit  $v$  Erdoberfläche:

$$\left. \begin{array}{l} G = 6,667 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{gs}^2} \\ M_E = 5,98 \cdot 10^{27} \text{g} \\ r_E = 6,37 \cdot 10^8 \text{m} \end{array} \right\} = v = 11,2 \frac{\text{Km}}{\text{s}} = \text{Entweichgeschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit)}$$

Sonne:

$$\left. \begin{array}{l} M_{\odot} = 1,98 \cdot 10^{33} \text{g} \\ r_{\odot} = 6,95 \cdot 10^{10} \text{m} \end{array} \right\} \quad v_{\odot} = 6,4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$c^2 = \frac{GM}{r_S} \quad r_S \leftrightarrow \text{Schwarzschildradius}$$

für  $r_S = R$  ( $R$ -Radius vom Objekt) liegen extrem *relativistische Objekte* vor („Schwarze Löcher“) Für die Sonne wäre  $r_S = 1,5 \text{km}$ .

## 1.8.2 Raum-Zeit-Gravitation

- klassische Physik:

Raum und Zeit existieren unabhängig voneinander

- SRT:

Raum-Zeit, zeitliches aufeinanderfolgen von Ereignissen ist nur in einem Raum denkbar und räumliche Beziehungen sind nicht anders denkbar als zu einer Zeit

- ART:

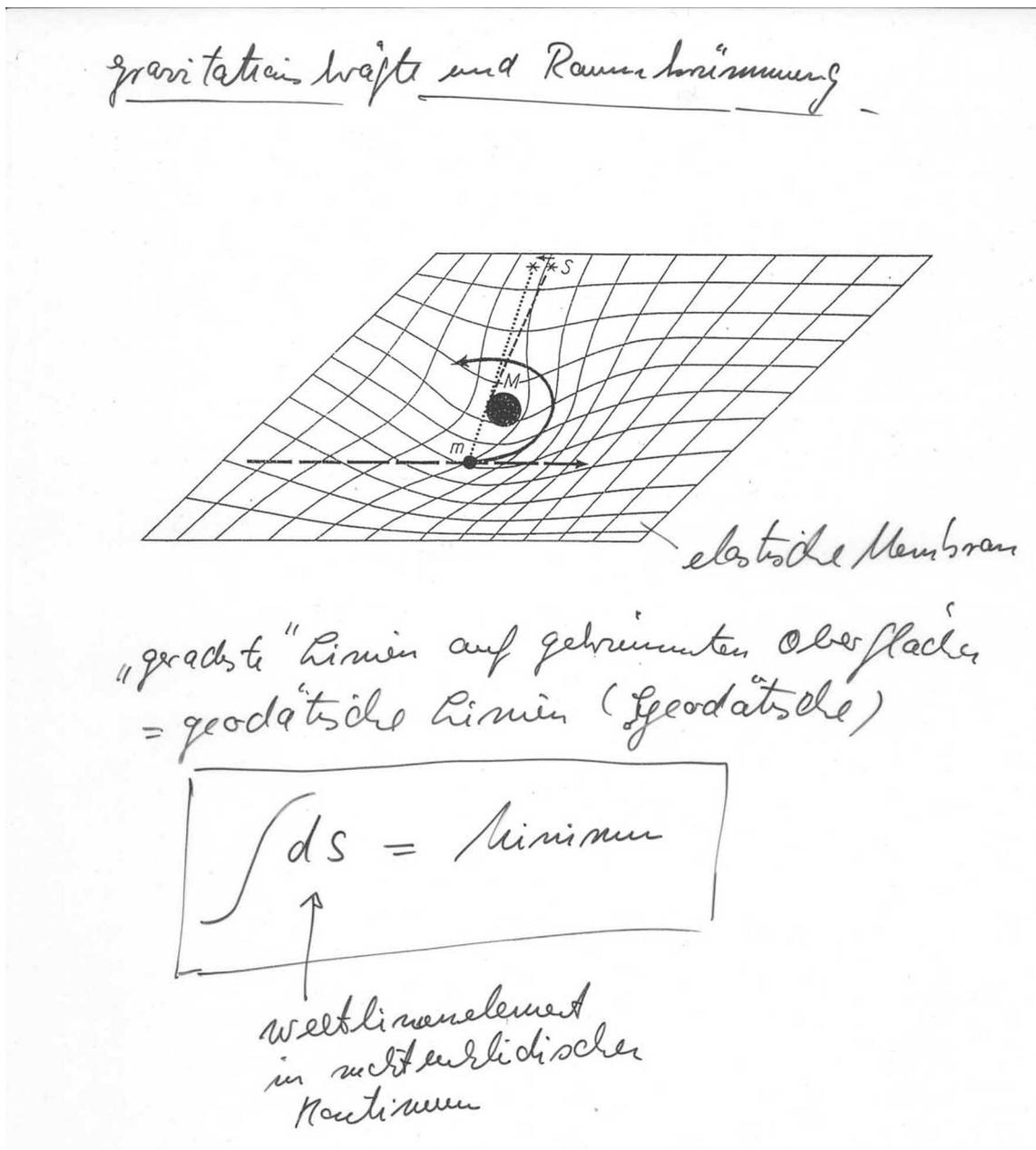
Nur die Einheit Raum-Zeit-Gravitation existiert selbstständig und hat Struktur. Aufgrund von Gravitationswirkung der Massen werden sich alle Körper auf „krumlinige“ (also beschleunigte) Bahnen bewegen. *Raumkrümmung* Steht in Zusammenhang mit einer Beschleunigung: Krümmung eine Kurve  $x = f(y)$  in der x-y-Ebene

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2x}{dy^2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)^3} \quad R \text{ -Krümmungsradius}$$

$$y = i \cdot ct$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d^2x}{(ic)^2 dt^2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{dx}{icdt}}\right)^3}$$

$$= -\frac{a_x}{c^2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3}$$



## 1.8.2.1 Uhren im Gravitationsfeld

SRT:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2GM/r}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1 - 2\frac{GM}{c^2 r}}}$$

⇒ Im Gravitationsfeld gehen Uhren langsamer

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2gh}{c^2}}} \approx t \left( 1 + \frac{gh}{c^2} \right)$$

### 1.8.2.2 Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld

- SRT:

$c$  ist eine absolute Größe

- ART:

$c$  hängt von Schwerkraft und der Richtung gegen die Schwerkraft ab

Experimentieren in einem beschleunigten Kasten -fern von Gravitationsfeldern- soll Lichtgeschwindigkeit messen.  
(Skizze)

$\overline{A_1B_2}$  aus Kosinussatz:

$$\vec{ct}_1 = \vec{l} + \vec{vt}_1$$

$$c^2t_1^2 = l^2 + v^2t_1^2 + 2lvt_1 \cos \varphi$$

$$0 = t_1^2 (c^2 - v^2) - 2lvt_1 \cos \varphi - l^2$$

$$0 = t_1^2 - \frac{2lv}{c^2 - v^2} t_1 \cos \varphi - \frac{l^2}{c^2 - v^2}$$

$$t_{1/2} = \frac{lv \cos \varphi}{c^2 - v^2} \pm \sqrt{\frac{l^2v^2 \cos^2 \varphi}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{l^2}{c^2 - v^2}}$$

,da  $\sqrt{\frac{l^2v^2 \cos^2 \varphi}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{l^2}{c^2 - v^2}} > \frac{lv \cos \varphi}{c^2 - v^2}$  und Zeit  $t > 0$  gilt

$$t = \frac{lv \cos \varphi}{c^2 - v^2} + \sqrt{\frac{l^2v^2 \cos^2 \varphi}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{l^2}{c^2 - v^2}}$$

$$\overline{A_3B_2} \Rightarrow \vec{ct}_2 = \vec{l} - \vec{vt}_2$$

$$c^2 t_2^2 = l^2 - v^2 t_2^2 - 2lv t_2 \cos \varphi$$

$$t_2 = -\frac{lv \cos \varphi}{c^2 - v^2} \pm \sqrt{\frac{l^2 v^2 \cos^2 \varphi}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{l^2}{c^2 - v^2}}$$

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= 2\sqrt{\frac{l^2 v^2 \cos^2 \varphi}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{l^2}{c^2 - v^2}} \\ &= \frac{2l}{c^2 - v^2} \sqrt{v^2 \cos^2 \varphi + c^2 - v^2} \\ \Rightarrow c_\varphi &= \frac{2l}{t} = \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{c^2 - v^2 + v^2 \cos^2 \varphi}} \\ c_\varphi &= \frac{c'}{c} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi}} \end{aligned}$$

$$\text{Mit } v^2 = \frac{2r_S c^2}{r}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_\varphi &= c \sqrt{\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}{1 - \frac{2r_S}{r} + \frac{2r_S}{r} \cos^2 \varphi}} \\ &\stackrel{\frac{2r_S}{r} \ll 1}{\simeq} c \left(1 - \frac{2r_S}{r}\right) \left[1 + \frac{r_S}{r} (1 - \cos^2 \varphi)\right] \\ c_\varphi &\simeq c \left\{ 1 - \frac{2r_S}{r} + \frac{r_S}{r} (1 - \cos^2 \varphi) - \frac{2r_S^2}{r^2} (1 - \cos^2 \varphi) \right\} \\ &\simeq c \left\{ 1 - \frac{r_S}{r} (1 - \cos^2 \varphi) \right\} \end{aligned}$$

Für  $r \rightarrow \infty \Rightarrow c_\varphi = c$  Vakuumlichtgeschwindigkeit

$\varphi = 90^\circ$  Lichtgeschwindigkeit  $\perp$  Gravitationskraft

$$c_{\varphi=90^\circ} = c_\perp = c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$$

$\varphi = 0^\circ$  Lichtgeschwindigkeit  $\parallel$  Gravitation

$$c_{\varphi=0^\circ} = c_\parallel = c \left(1 - \frac{2r_S}{r}\right)$$

Michelson: Unterschied  $\Delta c = c_{\perp} - c_{\parallel} = c \frac{r_S}{r} = 5 \frac{cm}{s}$  Messgenauigkeit heute:  $1 \frac{m}{s}!!$

## 1.9 Experimentelle Prüfung der ART

### 1.9.1 Gravitations-Rotverschiebung

$\nu(h) = \nu_0$  Vereinigung der Frequenz

Masse  $m = \frac{h\nu}{c^2}$

(Skizze Erde Gravitation)

Gegen das Gravitationsfeld muss eine Hubarbeit von

$$A = mg\Delta h$$

verrichtet werden

$\Rightarrow$  Vereinigung der Lichtenergie

$$\Delta E = h\nu = A$$

$$h \cdot \Delta\nu = \frac{h\nu}{c^2} \cdot \Delta h$$

$$\boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{g\Delta h}{c^2}}$$

$c$  sei konstant  $\Delta h = 1m \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = 1,1 \cdot 10^{-16}$  (messbarer Effekt!!)

- *Pound* und *Rebka*: Nachweis mit rückstoßfreier Kernresonanzabsorption (*Mößbauer Effekt*) *Rotverschiebung* wenn  $\gamma$ -Strahlung gegen Gravitationsfeld läuft. *Violettverschiebung* wenn  $\gamma$ -Strahlung in Richtung der Schwerkraft läuft.  
(Skizze Aufbau)

- Gangunterschied von Uhren

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}}{\frac{1}{t}} = \frac{\frac{t+\Delta t+t}{t(t+\Delta t)}}{\frac{1}{t}} = \frac{\Delta t}{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{g\Delta h}{c^2}$$

Experimentelle Umsetzung:

Uhr auf Meereshöhe und eine auf dem Mt. Everest ( $8,8 \cdot 10^3 m$  nn)

$\Rightarrow$  Gangunterschied nach  $t = 1$  Jahr von  $\Delta t = 31 \mu s$  (messbar!!)

## 1.9.2 Ablenkung von EM-Wellen im Gravitationsfeld

(Skizze Sonne-Strahlung von Fixpunktstern)

Wellenfront  $\overline{AA'}$  geht im Abstand von  $r = \overline{MB}$  an Masse  $M_0$  vorbei und bildet mit der Gravitationsrichtung den Winkel  $\varphi$

Lichtgeschwindigkeit im Pkt  $B$  :  $c_\varphi$

Lichtgeschwindigkeit im Pkt  $B'$  :  $c_\varphi + \Delta c_\varphi$

$$\overline{AB} = c_\varphi dt = dy$$

$$\text{Winkel } d\psi = B'B'', \overline{B'B''} = \Delta c_\varphi dt$$

$$\text{Im Grenzfall: } \Delta c_\varphi \rightarrow dc_\varphi = \frac{\partial c_\varphi dx}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\overline{B'B_1}}{dx} = \frac{\partial c_\varphi}{\partial x} \cdot dx \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\partial c_\varphi}{\partial x} dt \end{aligned}$$

$$\stackrel{dt = \frac{dy}{c_\varphi}}{=} \frac{\partial c_\varphi}{\partial x} \simeq \frac{1}{c} \frac{\partial c_\varphi}{\partial x} dy$$

$$c_\varphi \stackrel{r = \sqrt{x^2 + y^2}}{=} c \left[ 1 - \frac{r_S}{r} (1 + \cos^2 \varphi) \right]$$

$$\frac{\partial c_\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ c \left[ 1 - \frac{r_S}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \right\}$$

$$- \frac{r_S c}{r^5} (x^3 + 4xy^2)$$

$$\partial\psi = \frac{r_S}{r^5} (x^3 + 4xy^2) dy$$

Ablenkung des Lichtstrahles  $\delta$  folgt durch Integration über sämtliche Winkel  $d\psi$  längs der Geraden  $x = D = r^{\frac{5}{2}}$

$$\begin{aligned} \partial &= \int \partial\psi = r_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^3 + 4Dy^2}{(d^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} dy = r_S D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^2 + 4y^2}{(D^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} dy \\ &= \left[ \begin{array}{l} \int \frac{dy}{\sqrt{(D^2+y^2)^5}} = \frac{y}{3D^2\sqrt{(D^2+y^2)^3}} + \frac{2}{3D^2} \int \frac{dy}{\sqrt{(D^2+y^2)^3}} \\ \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(D^2+y^2)^5}} = -\frac{y}{3\sqrt{(D^2+y^2)^3}} + \frac{1}{3} \int \frac{dy}{\sqrt{(D^2+y^2)^3}} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{(D^2+y^2)^3}} = \frac{y}{D^2\sqrt{D^2+y^2}} \end{array} \right] \\ &= \left\{ \frac{y}{\sqrt{(D^2 + y^2)^3}} + \frac{2y}{D^2\sqrt{D^2 + y^2}} \right\}_{-\infty}^{\infty} = r_S D \left[ \frac{2}{D^2} (1 - (-1)) \right] \\ & \quad \left[ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{r} \rightarrow 1 \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{r^3} \rightarrow \infty \right] \\ &= \frac{4r_S D}{D^2} = \frac{4r_S}{D} \frac{4GM}{c^2} \stackrel{M=M_0}{=} \stackrel{D=r_0}{=} 0,848 \cdot 10^{-5} \hat{=} 1,745'' \text{ (Bogenmaß)} \end{aligned}$$

### 1.9.3 Periheldrehung der Planetenbahnen

### 1.9.4 Gravitationswellen

- ART:

Gravitationswirkungen können sich als Wellenimpulse ausbreiten

Frequenz: Schwingende [rotierende (beschleunigte)] Massen

Quellen: *Doppelsternsystem*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{64}{5} \frac{G}{c^5} m^2 r^4 \omega^6$$

$$\left[ \cancel{m} r \omega^2 = \frac{Gm\cancel{m}}{4r^3} \Rightarrow r^3 \omega^6 = \left( \frac{Gm}{4r^2} \right) \right]$$

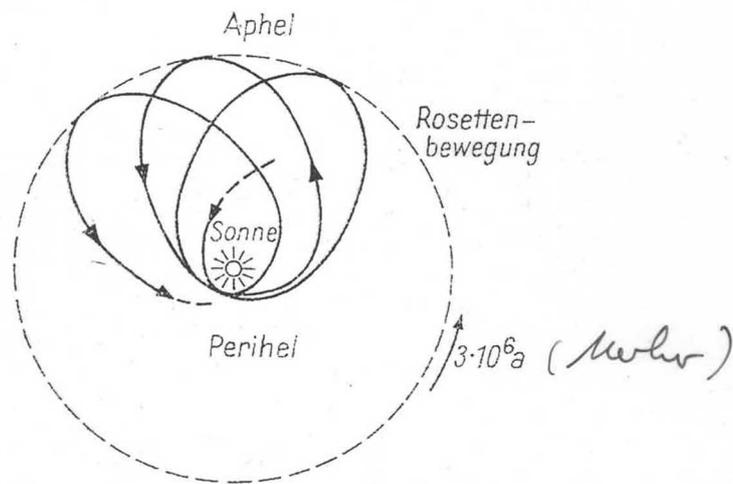
$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} mc^2 \frac{c}{v} \left( \frac{Gm}{rc^2} \right)^4 = \frac{1}{5} mc^2 \cdot 3 \cdot 10^{-24}$$

$$M_0 = 2 \cdot 10 \cdot 10^{37} g \quad \text{Masse Erde}$$

$$r_0 = 7 \cdot 10^{10} cm \quad \text{Radius Erde}$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} cm \quad \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

1.9.3 Perihelabweichung der Planetenbahnen



ART: Planetenbahnen sind langsam rotierende Ellipsen

	berechnet	beobachtet
Merkur	43,07" pro Jahr	42,9" ± 0,2" pro Jahr
Venus	8,62" -"-	8,4" ± 4,8" -"-
Erde	3,8" -"-	5,0 ± 1,2" -"-
Mars	1,4" -"-	
Jupiter	0,06" -"-	
Erdsmond	0,055" -"-	





# Kapitel 2

## Die Quantisierung der Ladung

### 2.1 Das Elektron

#### 2.1.1 Entdeckung und spezifische Ladung $\frac{e}{m_0}$ des Elektrons

*2.1.1 Entdeckung und spezifische Ladung  $e/m_e$  des Elektrons*

*keine Gasentladung*

Abb. 2.21. Gasentladungsröhre zur Erzeugung von Kathoden- und Kanalstrahlen. Zwischen Anode und Kathode liegt eine Spannung von einigen 1000 Volt. Die im Rohr auftretenden Leuchterscheinungen und die Ausbildung von Kathoden- und Kanalstrahl hängen stark vom Druck ab. Im feldfreien Raum zwischen Kathode und Fluoreszenzschirm sieht man den Kanalstrahl, der aus positiven Ionen besteht. In dieser Weise erzeugte Kanal- und Kathodenstrahlen waren in der Frühzeit der Atomphysik von besonderer Bedeutung für die Untersuchung von Ladung, Masse und Streuquerschnitt von Elektronen und Ionen

Abb. 6.3. Versuchsanordnung zur Messung der spezifischen Masse  $m_e$  des Elektrons. Die von der Kathode K erzeugten und durch die Spannung V beschleunigten Elektronen werden von einem senkrecht zur Zeichenebene gerichteten Magnetfeld auf Kreisbahnen abgelenkt und auf einem Film registriert. Durch Umpolen des Magnetfeldes wird die Ablenkungsrichtung umgekehrt

*Handwritten notes:*

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e \cdot V ; m_e \frac{v^2}{r} = e v B$$

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2V}{r^2 B^2} = 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

*Handwritten note:*  $m_e = 9,1091 \cdot 10^{-31} kg \ll m_{Atom}$   
Ruhemasse des Elektrons

Tabelle 6.1. Spezifische Masse des Elektrons bei verschiedenen Beschleunigungs-Spannungen

Beschleunigungs-Spannung U [kV]	0	500	1000	1500
Gemessene spezifische Masse $e/m$ [ $10^{11}$ C/kg]	1.76	0.88	0.56	0.44

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$



## 2.1.2 Die Ladung des Elektrons

2.1.2 Die Ladung des Elektrons  
 Townsend (1897), Wilson (1903), Millikan (1910 - 1913)

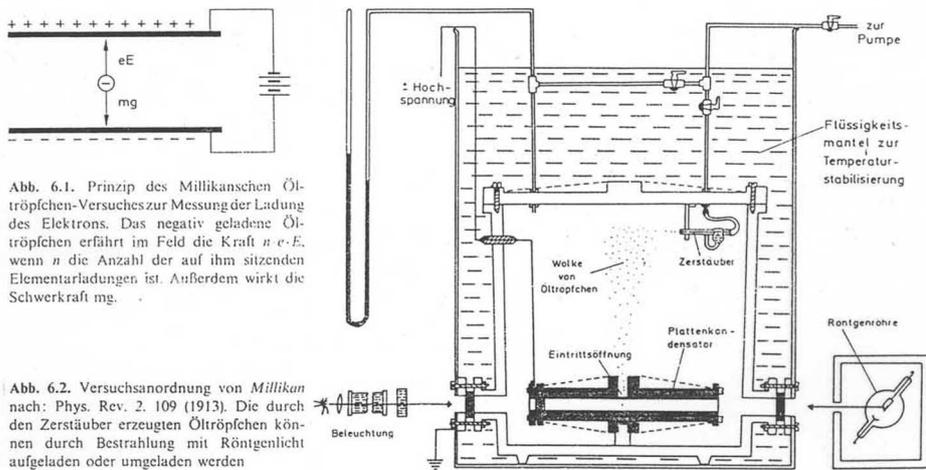


Abb. 6.1. Prinzip des Millikanschen Öltröpfchen-Versuches zur Messung der Ladung des Elektrons. Das negativ geladene Öltröpfchen erfährt im Feld die Kraft  $n \cdot e \cdot E$ , wenn  $n$  die Anzahl der auf ihm sitzenden Elementarladungen ist. Außerdem wirkt die Schwerkraft  $mg$ .

Abb. 6.2. Versuchsanordnung von Millikan nach: Phys. Rev. 2, 109 (1913). Die durch den Zerstäuber erzeugten Öltröpfchen können durch Bestrahlung mit Röntgenlicht aufgeladen oder umgeladen werden.

$$F = m \cdot g \pm q \cdot E - 6\pi\eta r \cdot v + (F_{\text{Auftrieb}})$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\varepsilon = 0, F = 0 \quad v_0 = \frac{2}{9} \frac{\rho r^2 g}{\eta}$$

$$\pm \varepsilon, F = 0 \quad v_{1,2} = v_0 \pm \frac{qE}{6\pi\eta r}$$

$$\text{Aus } v_1 + v_2 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \left( \frac{\eta (v_1 + v_2)}{\rho g} \right)^{1/2}$$

$$\text{Aus } v_1 - v_2 \text{ mit } r \Rightarrow q = \frac{9\pi\eta^{3/2}}{2E} \left( \frac{v_1 + v_2}{\rho g} \right)^{1/2} (v_1 - v_2)$$

$$= -N \cdot e$$

↑  
ganze Zahl

Elementarladung  $e = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

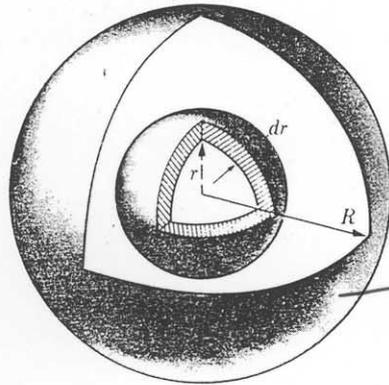
Abbildung 2.1: Millikanversuch



## 2.1.3 Die Größe des Elektrons

2.1.3 Die Größe des Elektrons - klassische Modellierung

Modell: Elektron sei homogen geladene Kugel mit Radius  $R$ , Ladung  $-e$  und Masse  $m_e$



Ruheenergie  $m_e c^2$

||  
elektrostatische Energie

Ladungsdichte

$$\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Ladung der Kugel mit  $r < R$ :  $q = -e \frac{r^3}{R^3}$

Potential an der Oberfläche:  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3}$

Änderung des Radius bei Änderung

der Ladung:  $dq = -3e \frac{r^2}{R^3} dr$

Änderung der el. Energie  $dE = V \cdot dq$

elektrostatische Energie  $E = \int_0^R \frac{3e^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr$

$$= \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = m_e c^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2}$$

$r_e =$  klassischer Elektronenradius

$= 2,8178 \cdot 10^{-15} \text{ m} \ll R_{\text{Atom}}$   
strahlungsloses, punktförmiges Teilchen

heute:  $R_e \ll 10^{-17} \text{ m}$

## 2.2 Die Ionen und ihre Isotopie

### 2.2.1 Massenspektroskopie

2.2.1 Massenspektroskopie

Massenspektroph nach Thomson (Parabelmethode)

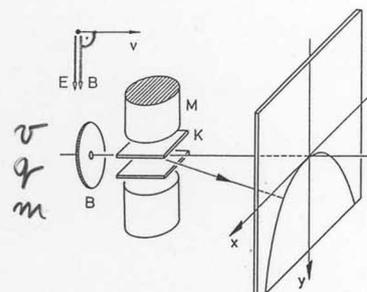


Abb. 3.2. Parabelmethode, schematische Darstellung. Der durch die Blende B kollimierte Ionenstrahl wird durch den Magneten M und den Kondensator K in x- und y-Richtung abgelenkt. Gl. (3.5) gibt die Teilchenspur auf einem Auffänger-Schirm unmittelbar am Ende des Kondensators und des Magneten. Bei größerer Entfernung zum Schirm werden die Parabeln durch die Projektion entsprechend verzerrt. Beide Äste der Parabel gelten, wenn E- und B-Feld umgepolt werden

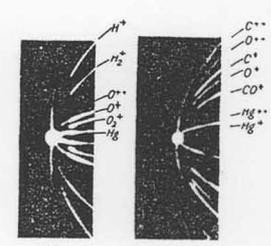


Abb. 11 Photographien Thomsonscher Parabeln

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{2\mathcal{E}}{e^2 \mathcal{B}^2} \frac{m}{q} x^2$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -v_z B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$v_z v \gg v_x, v_y \quad \frac{q}{m} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -v B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{q}{m} v B \stackrel{\text{Beschleunigung konst.}}{\Rightarrow} x = -\frac{1}{2} \frac{q}{m} v B t^2 \quad (2.1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \epsilon \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \epsilon \cdot t^2 \quad (2.2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow l = r t \quad (2.3)$$

2.3 in 2.1 und 2.2 eingesetzt:

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{l^2}{v} B \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{l^2}{v^2} \epsilon$$

$$\boxed{y = \frac{2\epsilon}{l^2 B^2} \cdot \frac{m}{q} x^2} \quad \text{Parabel}$$

Ionen mit unterschiedlichen Massen und Ladungen liegen auf Parabeln

- Beobachtungen

Es gibt chemisch identische Elemente mit unterschiedlichen Massen  
= *Isotope*

- Massenzahl:  $\begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} {}^{20}\text{Ne} \\ {}^{22}\text{Ne} \\ {}^{21}\text{Ne} \end{array} \left| \begin{array}{l} \uparrow \\ \\ \end{array} \right. \text{Häufigkeit}$

Atommassen werden häufig in *Atommassen* = *amu* angegeben

- Festlegung:

$$12 \text{ amu} \hat{=} 12 \times \text{Masse eines } {}^{12}\text{C Atoms}$$

- *amu* Masse in Kg:

$$1 \text{ mol } {}^{12}\text{C} \hat{=} 12 \text{ g} \hat{=} N - A = 6,0225 \cdot 10^{23} \frac{\text{Atome}}{\text{mol}}$$

$$1 \text{ amu} = \frac{12}{12} \cdot \frac{10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 1,66044 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$



2.2.2 Die natürlichen Nuklide

*2.2.2 Die natürlichen Nuklide*

Tabelle 6  
Atomgewichte der Elemente in der <sup>12</sup>C-Skala und Übersicht über die natürlich vorkommenden Nuklide

Z	Symbol	Atomgewicht	Massenzahlen
1	H	1,00797	1, 2
2	He	4,0026	4, 3
3	Li	6,939	7, 6
4	Be	9,0122	9
5	B	10,811	11, 10
6	C	12,01115	12, 13
7	N	14,0067	14, 15
8	O	15,9994	16, 18, 17
9	F	18,9984	19
10	Ne	20,183	20, 22, 21
11	Na	22,9898	23
12	Mg	24,312	24, 26, 25
13	Al	26,9815	27
14	Si	28,086	28, 29, 30
15	P	30,9738	31
16	S	32,064	32, 34, 33, 36
17	Cl	35,453	35, 37
18	Ar	39,948	40, 36, 38
19	K	39,102	39, 41, 40*
20	Ca	40,08	40, 44, 42, 48, 43, 46
21	Sc	44,956	45
22	Ti	47,90	48, 46, 47, 49, 50
23	V	50,942	51, 50
24	Cr	51,996	52, 53, 50, 54
25	Mn	54,9380	55
26	Fe	55,847	56, 54, 57, 58
27	Co	58,9332	59
28	Ni	58,71	58, 60, 62, 61, 64
29	Cu	63,54	63, 65
30	Zn	65,37	64, 66, 68, 67, 70
31	Ga	69,72	69, 71
32	Ge	72,59	74, 72, 70, 76, 73
33	As	74,9216	75
34	Se	78,96	80, 78, 82, 76, 77, 74
35	Br	79,909	79, 81
36	Kr	83,80	84, 86, 82, 83, 80, 78
37	Rb	85,47	85, 87*
38	Sr	87,62	88, 86, 87, 84
39	Y	88,905	89
40	Zr	91,22	90, 94, 92, 91, 96
41	Nb	92,906	93
42	Mo	95,94	98, 96, 92, 95, 100, 97, 94
44	Ru	101,07	102, 104, 101, 100, 99, 96, 98
45	Rh	102,905	103
46	Pd	106,4	106, 108, 105, 110, 104, 102
47	Ag	107,870	107, 109
48	Cd	112,40	114, 112, 111, 110, 113, 116, 106, 108
49	In	114,82	115*, 113
50	Sn	118,69	120, 118, 116, 119, 117, 124, 122, 112, 114, 115
51	Sb	121,75	121, 123
52	Te	127,60	130, 128, 126, 125, 124, 122, 123, 120
53	I	126,9044	127
54	Xe	131,30	132, 129, 131, 134, 136, 130, 128, 124, 126
55	Cs	132,905	133
56	Ba	137,34	138, 137, 136, 135, 134, 130, 132
57	La	138,91	139, 138*
58	Ce	140,12	140, 142, 138, 136
59	Pr	140,907	141
60	Nd	144,24	142, 144*, 146, 143, 145, 148, 150
62	Sm	150,35	152, 154, 147*, 149, 148, 150, 144
63	Eu	151,96	153, 151
64	Gd	157,25	158, 160, 156, 157, 155, 154, 152
65	Tb	158,924	159
66	Dy	162,50	164, 162, 163, 161, 160, 158, 156
67	Ho	164,930	165
68	Er	167,26	168, 168, 167, 170, 164, 162
69	Tm	168,934	169
70	Yb	173,04	174, 172, 173, 171, 176, 170, 168
71	Lu	174,97	175, 176*
72	Hf	178,49	180, 178, 177, 179, 176, 174, 175
73	Ta	180,948	181
74	W	183,85	184, 186, 182, 183, 180
75	Re	186,2	187*, 185
76	Os	190,2	192, 190, 189, 188, 187, 186, 184
77	Ir	192,2	193, 191
78	Pt	195,09	195, 194, 196, 198, 192, 190*
79	Au	196,967	197
80	Hg	200,59	202, 200, 199, 201, 198, 204, 196
81	Tl	204,37	205, 203, (207*, 208*, 210*)
82	Pb	207,19	208, 206, 207, 204, (210*, 211*, 212*, 214*)
83	Bi	208,980	209*, (210*, 211*, 212*)
84	Po	—	(210*, 211*, 212*, 214*, 215*, 216*, 218*)
85	At	—	(215*, 216*, 218*)
86	Rn	—	(222*, 220*, 219*)
87	Fr	—	(223*)
88	Ra	—	226*, (223*, 224*, 228*)
89	Ac	—	(227*, 228*)
90	Th	232,038	232*, (227*, 228*, 230*, 231*, 234*)
91	Pa	—	231*, (234*)
92	U	238,03	238*, 235*, 234*

$A = \text{Massenzahl} =$   
 $\text{Gesamtzahl der Nucleonen}$   
 $Z = \text{Ordnungszahl} =$   
 $\text{Anzahl der Protonen}$   
 $N = A - Z = \text{Zahl der Neutronen}$

Nuklid:  $A$  Symbol  
 $Z$

Isotope:  $Z$  fest,  $N$  variabel  
 Isotone:  $N$  fest,  $Z$  variabel  
 Isobare:  $A$  fest,  $Z$  und  $N$  variabel

92 natürliche Nuklide  
 Elemente  
 $\approx 340$  natürliche Nuklide

$\approx 11$  künstliche Elemente  
 $\approx 1100$  künstliche Nuklide

22 nat. Reinelemente  
 (von 1 Nuklid)

Mittelwert aller  
 natürliche Isotopen -  
 verteilung

Abbildung 2.2: (Folie: Liste der Nuklide)

# Kapitel 3

## Phänomenologische Quantenphysik

1900-1924: Grundlagen der „älteren“ Quantenmechanik  
Namen: *Planck, Einstein, Bohr, Sommerfeld, Compton*

### 3.1 Temperaturstrahlung

(Skizze Kubus)

Emmissionsspektrum eines schwarzen Strahlers?

- Schwarzer Körper:

Absorptionsvermögen = 1

Unabhängig von Frequenz bzw. Beschaffenheit des Körpers

Emmissionsvermögen ist universelle Funktion, nur abhängig von  
Frequenz  $\nu$  und Temperatur  $T$  abhängig

- Experimentelle Realisierung:

Hohlraum mit sehr kleiner Öffnung

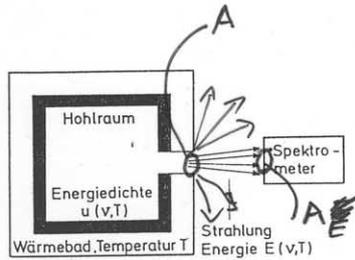
*Energiedichte*  $\mu = \mu_{el} + \mu_{mag} = \frac{E \cdot B}{\mu_0 \cdot c}$ , Einheiten:  $\left(\frac{J}{m^3}\right)$

*spektraler Energiedichte* eines Frequenzintervalls  $[\nu, \nu + d\nu]$

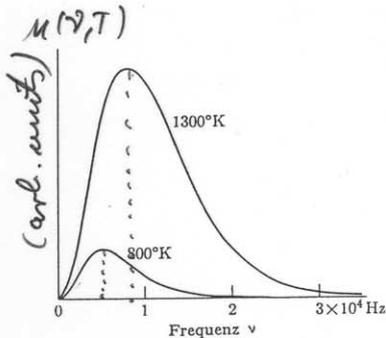
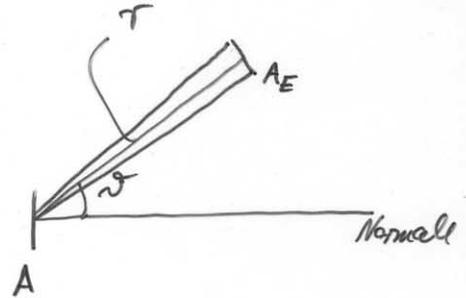
$$\mu(\nu, T, \dots) d\nu = \frac{J}{m^3} = \frac{kg}{ms^2}$$

$$\text{Einheit } [\mu(\nu, T, \dots)] = \frac{Js}{m^3} = \frac{kg}{ms}$$





Raumwinkel  $\Delta\Omega = \frac{A_E}{r^2}$



kontinuierliches Spektrum unabhängig von Form und Material des Hohlraums, nur abhängig von  $\nu$  und  $T$  allein

$\nu_{max} = 5,880 \cdot 10^{10} \frac{Hz}{K} \cdot T$  Wiensches Verschiebungsgesetz

Von der Fläche  $A$  unter dem Winkel  $\alpha$  in den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  unpolarisiert abgestrahlte Energie im Zeitintervall  $\Delta t$  und Frequenzintervall  $[\nu, \nu + d\nu]$ .

$$E(\nu, T) = \underbrace{u(\nu, T)}_{\frac{J}{m^3}} \cdot \underbrace{d\nu c \cdot \Delta t}_{\frac{J}{m^2}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta\Omega}{4\pi} \cdot A \cos\alpha}_{J}$$

Gesamte pro Fläche und Zeitintervall in den rechten Halbraum abgestrahlte Energie  $\frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} d\nu \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \cos\alpha \sin\alpha d\alpha d\varphi$

$$S(T) = \frac{E(\nu, T)}{\Delta t A} = \int_0^{\infty} d\nu c u(\nu, T) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\alpha \sin\alpha d\alpha d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} c \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \sigma \cdot T^4$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Abbildung 3.1: (Folie: Liste der Euklide)

Herleitung der spektralen Energiedichte:

Klassische Betrachtung nach Rayleigh-Jeans (1900)

1. Was ist die Zahl der erlaubten e.m. Moden im Hohlraum mit Volumen  $V$  pro Frequenzintervall?

Frage nach Zustandsdichte:  $\frac{1}{V} \cdot \frac{dn}{d\nu^2}$

2. Was ist die mittlere Energie  $\bar{E}$  einer Mode der Frequenz  $\nu$  im Hohlraum?

$$\Rightarrow \mu(\nu, t) = \frac{1}{V} \cdot \frac{dn}{d\nu} \cdot \bar{E}$$

Modell Hohlraum mit Volumen  $V = L^3$

(Skizze Kubus)

Vereinfachende Annahmen

1. Energiekonversion im Volumen der Wände sind vernachlässigt.
2. Strahlung entsteht nur durch Oszillatoren (Atome) auf der Innenwandfläche in einer dünnen Wandschicht
3. Emittierte Strahlung wird durch die gegenüberliegende Wand reflektiert
4.  $\Rightarrow$  Ausbildung einer stehenden Welle (Skizze Reflexion an den Wänden)

$$\lambda_1 = 2L$$

$$\lambda_2 = L$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

$$L = \frac{\lambda}{2} \cdot n_x \quad n_x = 1, 2, 3, \quad \text{bzw. } k_x = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2L} n_x = \frac{\pi}{L} \cdot n_x$$

Wellenvektor  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$

$$\vec{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Die erlaubten Zustände spannen den sogenannten  $\vec{k}$ -Raum (*Impulsraum*) auf.

(Skizze Impulsraum)

Zahl der  $k$ -zustände in einer Kugel mit Radius  $k$

$$n = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{L^3}{\pi^2} k^3$$

Zustandsdichte im  $k$ -Raum:

$$\frac{dn}{dk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{\pi^2} k^2$$

Zustandsdichte im Frequenzraum:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\nu} &= \frac{dn}{dk} \frac{dk}{d\nu} \\ c &= \nu\lambda \\ \nu \frac{c}{\lambda} &= \frac{c}{2\pi} \cdot k \\ \frac{d\nu}{dk} &= \frac{c}{2\pi} \\ \Rightarrow \frac{dn}{d\nu} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{\pi^2} \cdot k^2 \cdot \frac{2\pi}{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{\pi^2} \left( \frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \cdot \frac{2\pi}{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot L^3 \quad \text{pro Polarisationsrichtung} \\ \Rightarrow \frac{dn}{d\nu} &= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 L^3 \quad \text{für } \frac{1}{2} \text{r } 2 \text{ Polarisationsrichtungen} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{L^3} \cdot \frac{dn}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2}$$

(Skizze  $\mu$  -  $\nu$ -Abhängigkeit)

Mittlere Energie eines klassischen Oszillators

Annahme:  $N$  Oszillatoren mit zwei Freiheitsgraden

$$n_1, \quad \epsilon_1$$

$$n_2, \quad \epsilon_2$$

$$n_3, \quad \epsilon_3$$

$\vdots$

---


$$N = \sum n_i, \quad f_i = \sum \frac{n_i}{N}$$

Mittlere Energie

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \frac{1}{N} \sum n_i \epsilon_i &&= \frac{\sum n_i \epsilon_i}{\sum n_i} \\
 &= \frac{\sum f_i \epsilon_i}{\sum f_i} &&\stackrel{\text{Boltzmann}}{=} \frac{\sum e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \epsilon_i}{\sum e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}} = \frac{\int_0^\infty \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon}{\int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon} \\
 &= \frac{(k_0 T)^2 e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \left(-\frac{\epsilon}{kT} - 1\right) \Big|_0^\infty}{e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \Big|_0^\infty} &&= \frac{(k_B T)^2}{k_B T} = k_B T
 \end{aligned}$$

Rayleigh-Jeans  $\mu(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 \cdot k_B T$   
 (Skizze Infrarotkatastrophe)

- 1900: Planck'sche Annahme

Abstrahlung der atomaren Oszillatoren erfolgt nicht kontinuierlich im Frequenzraum, sondern diskret

$$\begin{aligned}
 \text{erlaubte Energien: } E_n &= \underbrace{n}_{\text{Quantenzahl}} \cdot h \cdot \nu \\
 &= 0, 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Im Planck'schen Wirkungsquantum  $h = 9,62608 \cdot 10^{-34} \text{Js}$   
 Berechnung der mittleren Energie  $\bar{E} = \bar{n} h \nu$

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i \frac{h\nu}{kT}} \cdot i \cdot h \cdot \nu}{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i \frac{h\nu}{kT}}} \\
 \Rightarrow \text{Nenner: } \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i \frac{h\nu}{kT}} &\stackrel{=}{=} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i \frac{h\nu}{kT}}}_{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i \frac{h\nu}{kT}}} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \\
 \Rightarrow \text{Zähler } h\nu \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-i \frac{h\nu}{kT}} &\stackrel{=}{=} \underbrace{h}_{y=\frac{h\nu}{kT}} \left( -\frac{d}{dy} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-iy} \right) \\
 h\nu \left( -\frac{d}{dy} \cdot \frac{1}{e^{-y}} \right) &= h\nu \frac{e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} \\
 \cancel{(1-e^{-y})} \cdot \frac{h\nu e^{-y}}{(1-e^{-y})} &\cancel{=} \\
 h\nu \cdot \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} &= \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\text{Quantenmechanik } E_n = \left( n + \underbrace{\frac{1}{2}}_{0\text{-Punktsenergie}} \right) h\nu$$

$$\bar{E} = \bar{n}h\nu$$

$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$  Bose-Einstein-Verteilung (Energieaustausch eines Oszillators ist gequantelt)



### 3.2 Der Photoelektrische Effekt

3.2 Der photoelektrische Effekt  
 Befreiung von Elektronen durch Licht aus Metallen (entdeckt von Hertz 1887, von Becquerel um 1900 näher untersucht)

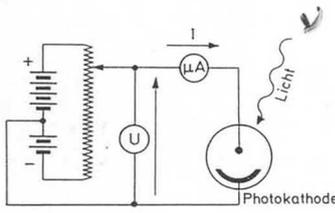
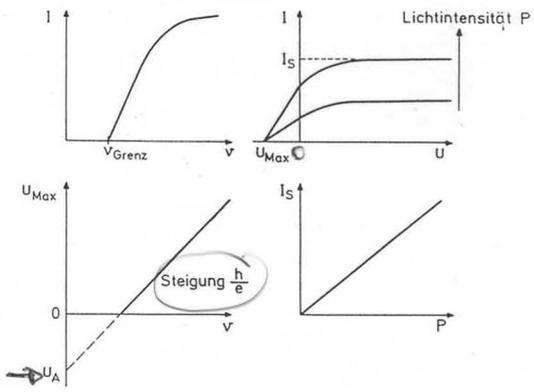


Abb. 5.6. Der Photoeffekt. Oben: ein negativ aufgeladenes Elektrometer wird bei Belichtung der Elektrode entladen, ein positiv aufgeladenes nicht. Unten: Anordnung zur quantitativen Messung des Photoeffektes (Spannung U, Strom I)



Deutung durch Einstein (1905) mit Licht-quantenhypothese  
 $h\nu \geq h\nu_{Grenz} = e \cdot U_A$  Austrittsarbeit des Metalls  
 Intensität  $\propto E = n \cdot h\nu$   
 größerer  $N \Rightarrow$  mehr Elektronen,  
 $E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - eU_A$   
 $eU_{max} = h\nu - eU_A$   
 $U_{max} = \left(\frac{h}{e}\right) \cdot \nu - U_A$

Tabelle 5.1. Austrittsarbeiten  $U_A$  und Grenzwellenlängen  $\lambda_G$ , einiger Metalle

Metall	$U_A$ [eV]	$\lambda_G$ [nm]
Li	2,46	504
Na	2,28	543
K	2,25	551
Rb	2,13	582
Cs	1,94	639
Cu	4,48	277
Pt	5,36	231

Abbildung 3.2: (i; 1/2 u; 1/2)erer Lichtelektrischer Effekt)



### 3.3 Bremsstrahlung (inverse photoelektrischer Effekt)

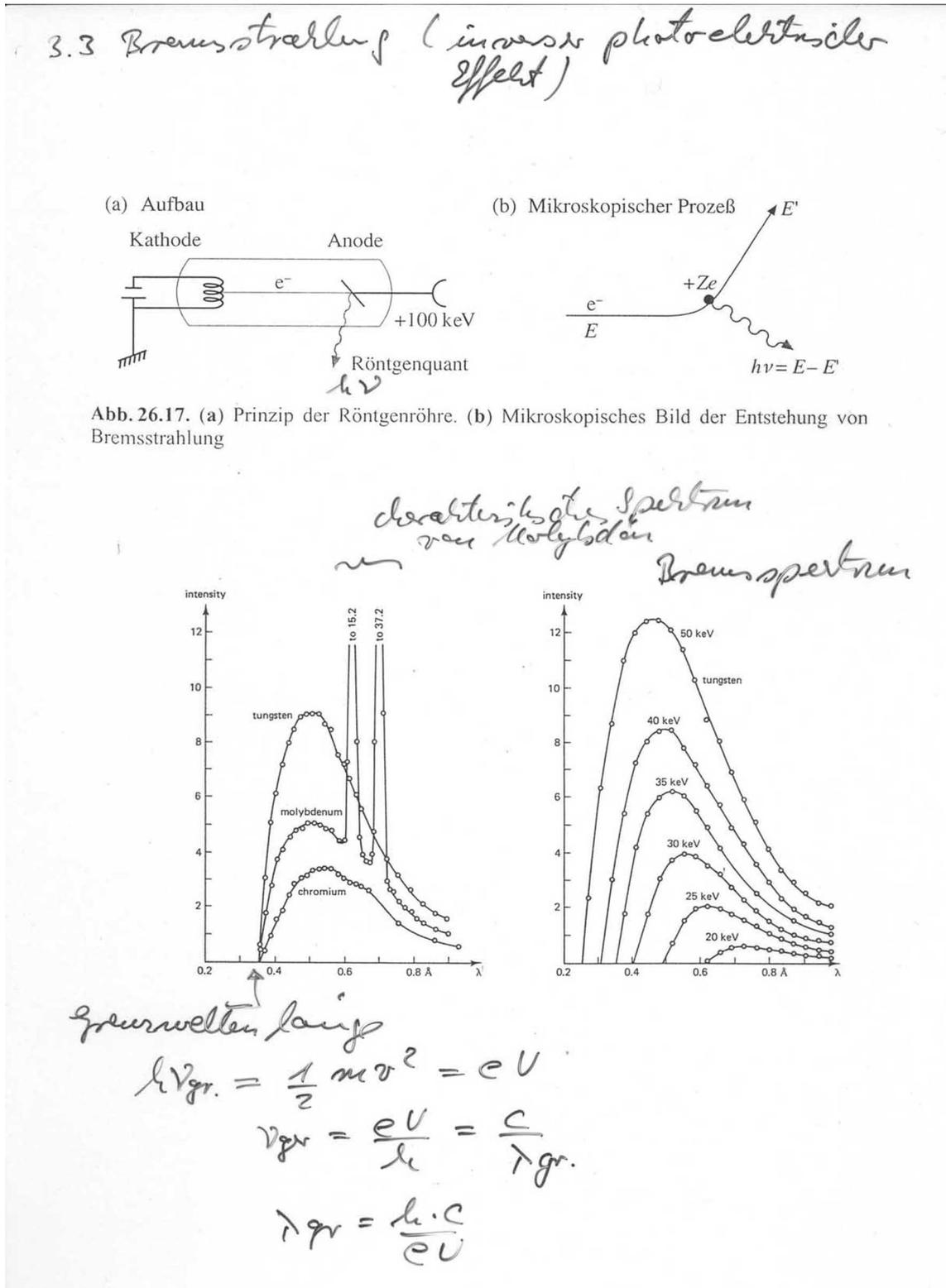


Abbildung 3.3: (Folie Röntgenstrahlung)

### 3.4 Die Compton-Streuung

#### 3.4 Die Compton-Streuung

Compton (1921): Streuung von Röntgenstrahlen an freien Elektronen

Beobachtung: Elektronen erleiden bei der Streuung einen Rückstoß  $\Rightarrow$  absorbieren Energie  
Röntgenquant besitzt nach dem Streuvorgang eine geringere Energie

amorphes Target

Erwartung: Rayleigh-Streuung (el. Dipol)

$\tau_{\text{Primär}} = \tau_{\text{Streustrahlung}}$

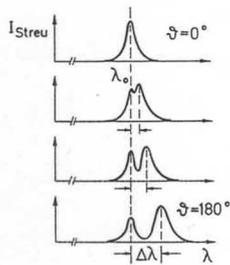
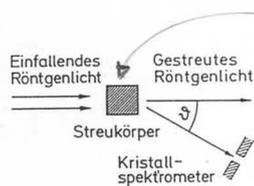


Abb. 5.8. Zum Comptoneffekt: Oben: Schema der Meßanordnung. Das am Streukörper (z.B. Graphit) gestreute Röntgenlicht wird als Funktion des Streuwinkels  $\vartheta$  gemessen. Unten: gemessene Streustrahlung für verschiedene Streuwinkel  $\vartheta$ , nimmt von oben ( $0^\circ$ ) nach unten ( $180^\circ$ ) zu. Man sieht die unverschobene Rayleigh- und die spektral verschobene Compton-Streustrahlung

Compton Verschiebung:  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C (1 - \cos \vartheta)$

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e \cdot c} = 2,4262 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Compton-Wellenlänge für Elektronen  
unabhängig von  $\lambda$  Primär

Interpretation und Ableitung: Stoßprozeß eines Röntgenquants mit einem Elektron

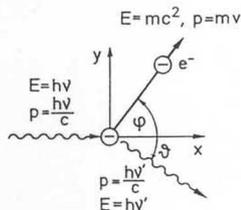


Abb. 5.9. Zur Erklärung des Compton-Effektes: Das ankommende Röntgenquant mit der Energie  $E = hv$  und dem Impuls  $p = hv/c$  stößt mit einem Elektron zusammen. Dabei überträgt es auf dieses Energie und Impuls. Das gestreute Röntgenquant hat deshalb verminderte Energie  $hv'$  und verminderten Impuls  $hv'/c$

(Amorph  $\Leftrightarrow$  unregelmäßig/unsymmetrisch)

### 3.5 Die spezifische Wärme von Festkörpern

(*Dulong-Petit-Gesetz*)

3.5 Die spezifische Wärme von Festkörpern

$$C = \frac{dE}{dT}$$

Atom = klassischer Oszillator (3 Schwingungs-freiheitsgrade)

$$\bar{E} = k_B T \text{ pro Freiheitsgrad}$$

$$1 \text{ mol} \hat{=} N_A \text{ Atome}$$

$$E = 3 \cdot N_A \cdot k_B T$$

molare Wärme  $C = \frac{dE}{dT} = 3 N_A k_B = \left. \begin{matrix} 24,97 \text{ J/K} \\ 5,94 \text{ cal/K} \end{matrix} \right\} \text{ Gesetz von Dulong und Petit}$

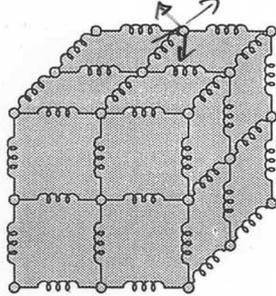


Fig. 3.16 Schematic model of a crystalline solid. The atoms are held in their positions by springs.

Experiment

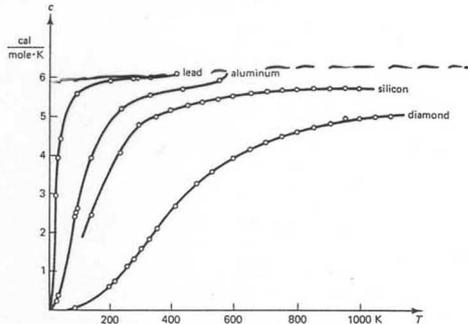


Fig. 3.17 Specific heats of lead, aluminum, silicon, and diamond as a function of temperature. (From F. K. Richtmeyer et al., *Introduction to Modern Physics*. © 1955 by McGraw-Hill Book Co. Reproduced with permission.)

Einstein

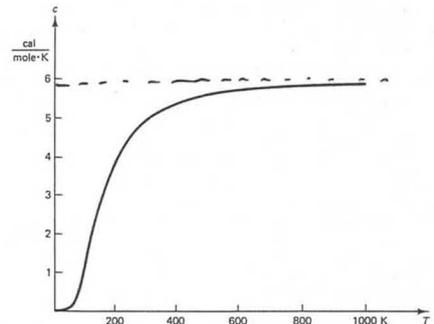


Fig. 3.18 Specific heat of a crystalline solid according to Einstein's formula, with an assumed frequency of  $1 \times 10^{13}$  Hz. At high temperature, the specific heat asymptotically approaches  $3k_B$ .

Einstein (1907)

$$\bar{E} = 3 \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$E = 3 \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \cdot N_A$$

$$C = \frac{dE}{dT} = 3 k_B N_A \left( \frac{h\nu}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)^2}$$

## 3.6 Das Atom

### 3.6.1 Klassische Ergebnisse

- Begriffsbildung  
Antike Philosophen (400-500 v.Chr.)  
Leuhippos, Demokrit, Platon, Aristoteles
- Erste experimentelle Hinweise auf Atomistik der Materie  
chemische Reaktionen und Verhalten von Gas  
*Pronst* (1799), *Dalton* (1803)  
Gesetz der Konstanten und multiplen Proportionen bei chemischen Reaktionen

#### 1. Dalton'sche Gesetz

Das Massenverhältnis der Elemente oder Bestandteile einer bestimmten Verbindung ist unveränderlich und immer gleich

Beispiel: 100g Wasser  $\hat{=}$  11,19g Wasserstoff und 88,8 g Sauerstoff  
30g Stickstoff  $\hat{=}$  14g Stickstoff und 10g Sauerstoff

#### 2. Dalton'sche Gesetz

Bilden zwei Elemente mehrere Verbindungen miteinander, so verhalten sich die Mengen des einen Elementes, d mit der gleichen Menge des anderen Stoffes verbunden sind, in den Verbindungen wie kleine ganze Zahlen.

Elemente    Verbindungsmöglichkeiten    Verhältnisse der Sauerstoffverbindungen

1g Mangan	$\left\  \begin{array}{l} 0,2413g \\ 0,4369g \\ 0,5826g \\ 0,8738g \\ 1,0195g \end{array} \right\ $	Sauerstoff	2 : 3 : 4 : 6 : 7
14g Stickstoff	$\left\  \begin{array}{l} 16g \\ 32g \end{array} \right\ $	Sauerstoff	1 : 2

Erklärbar mit Atomhypothese:

Dalton

1. Alle Stoffe bestehen aus kleinsten Teilchen, die man weder physikalisch noch chemisch teilen kann, den sog. Atomen
2. Die Atome eines Elementes sind einander in Qualität, Größe und Masse gleich, unterscheiden sich jedoch in diesen Eigenschaften von Atomen anderer Elemente
3. Wenn chemische Elemente eine Verbindung eingehen, so vereinigen sich immer ganzzahlige Mengen der beteiligten Elemente untereinander

#### Folgerung und Konsequenzen

- relative Atomgewichte

$$M_n : O = 1 : 0,2913 = 55 : 16$$

$$N : O = 14 : 16$$

- Begriff des *Mols*:

$$\text{festgelegte } \underbrace{\text{Menge}}_{\text{Atomgewichtung}}$$

$$N_L = 6,0225 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen}$$

- Unterstützung der Dalton'schen Atomhypothese durch

*Gay-Lussac* (1805) und *Avogadro* (1811): Volumenverhältnis bei Gasreaktion

*Faraday* (1833): Elektronische Gesetze

*Massenspektroskopie*: Nachweis von *Ionen* durch Ablenkungen, Experimente in e.m. Feldern

#### 3.6.1.0.1 Bestimmung der Größe von Atomen

1. Abschätzung der Matriedichte

$$V_{\text{Atom}} = \frac{12,17 \text{ cm}^3}{6,022 \cdot 10^{23}} = a^3 = 2 \cdot 10^{-23} \Rightarrow a = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

$$\text{Atomradius} = r = \frac{a}{2} = 1,4 \cdot 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \text{Größenordnung: } 1 = 10^{-10} \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ mol } s_1 = 28 \text{ g} \\ \rho_{s_1} = 2,39 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{array} \right\} V_{\text{mol}} = \frac{28}{2,39} \text{ cm}^3$$

2. Atom -Atom-Streuexperiment

Atom-Atom-Streuung

Voraus.: Atome mit definierter Geschwindigkeit

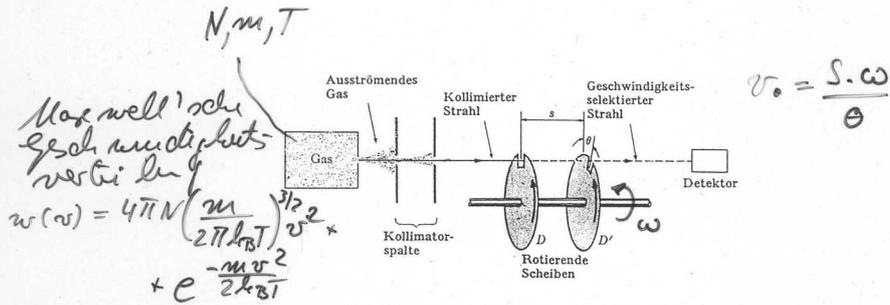


Abb. 10-8. Geschwindigkeitsfilter für Moleküle.

Voraus.: Gas 2 mit  $n_2$ , Dichte  $n$ , Atomradius  $r_2$

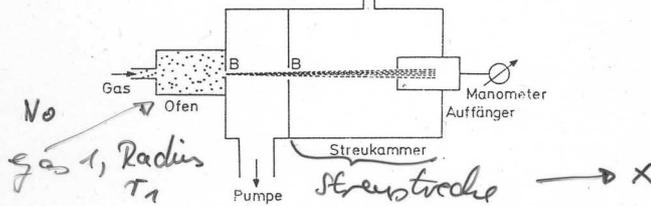
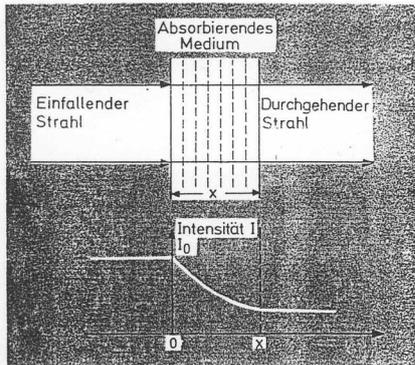


Abb. 2.6. Anordnung zur Messung von Streuquerschnitten von Atomen an Atomen. Ein Strahl von Gasatomen tritt durch die Blenden B in die Streukammer. Die Streuung an dort befindlichen Gasatomen führt zu einer Schwächung des im Auffänger ankommenden Strahles



zu zeigen:

$$N = N_0 e^{-\alpha x}$$

$\alpha$ : makroskopische Streuquerschnitt

$$\alpha = n \cdot \sigma$$

$\sigma$ : mikroskopische Streuquerschnitt

$$N = N_0 e^{-\alpha \cdot L}$$

gestreute Atome  $N_{str} = N_0 (1 - e^{-\alpha L})$

Eichung: gleiche Atome für Gas 1 und Gas 2  
 $\Rightarrow r_1$  aus Experiment

(Folie Atom-Atom-Streuexperiment)

Streuexperiment:

(Skizze)

Streutome: Querschnitt Querschnittsfläche:  $\pi r_2^2$

Wirkungsquerschnitt Dichten  $\sigma = (r_1 + r_2)^2 \pi$

Einfallendes Atom:  $\pi r_1^2$

Anzahl am Ort  $x = 0$  sei  $N_0$

Wahrscheinlichkeit für das Ausscheiden des einfallenden Atoms aus seiner Anfangsrichtung durch Stoß mit Streutomen

$$W = \frac{\text{Zahl der Streutome}}{\text{im Volumen } \nabla x \cdot A} = n \cdot A \frac{\sigma}{A}$$

Zahl der Atome, die die Richtung ändern:

$$\begin{aligned} \nabla N &= -WN && = -n \nabla x \sigma N \\ \frac{dN}{N} &= -n \sigma dx \\ \int_{N_0}^N \frac{1}{N} dN &= -n \sigma \int_0^L dx \\ \ln \frac{N}{N_0} &= -n \sigma L && e^{(\dots)}; \cdot N_0 \\ N &= N_0 \cdot e^{-n \sigma L} \end{aligned}$$

*Experiment*  
 $\Rightarrow$

Zusammenfassung der Befunde

Atome bestehen aus positiven und negativen Ladungen (Elektronen), Elektronen sind Punktladungen, Atommasse  $\gg$  Elektronenmasse, Verteilung der positiven Ladungen unklar

Frühes, sehr veraltetes Atommodell nach J.J. Thompson:

*Plum pudding-Modell* (Skizze) Normierte positive Ladungsverteilung

Probleme: Atomspektren können durch das Modell nicht gedeutet werden

**Beispiel.** Wasserstoff

- Elektron im Zentrum einer Kugel mit Radius  $R$
- Auslenkung aus Ruhelage  
 $\Rightarrow$  Oszillation um Ruhelage

⇒ Abstrahlung von e.m Wellen

$$\theta = +e^2 \frac{r^3}{R^3}$$

$$\text{Newton: } m_e \frac{dr^2}{dt^2} = - \frac{e \left( +e \frac{r^2}{R^3} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}}_{\omega^2} \cdot r$$

- Schwingungsfrequenz:

$$h\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}} R \overset{\rightarrow}{\simeq} 1,2,35 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$E = h\nu = 10,4 \text{ eV}$$

### 3.6.2 Rutherford-Streuung

Rutherford (1910) experimentierte mit  $\alpha$  - Teilchen

$$m_\alpha = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad q = 2e$$

$\alpha$ - Teilchen haben eine hohe Durchdringungskraft

**Idee:** Untersuchung des Atomaufbaus durch Streuexperiment **Erwartung:**  $\alpha$  Teilchen durchdringen den „Pudding“

Rutherford-Streuung

Gründigkeit  
 $v_0$   
 Masel um  
 Ladung  $+Ze$

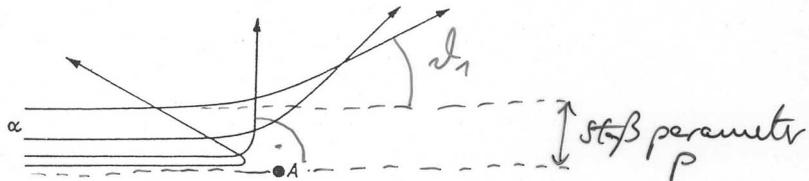
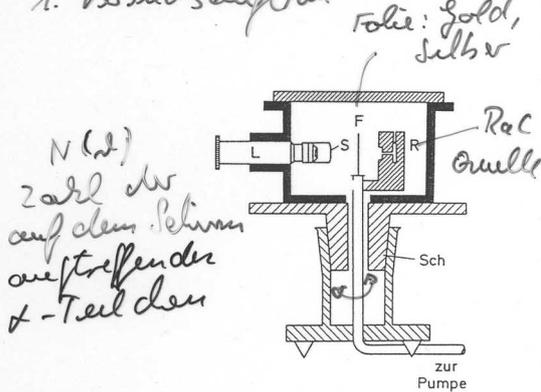


Abb. 18. Bahnen von  $\alpha$ -Teilchen, die durch den Atomkern A abgelenkt werden

1. Versuchsaufbau



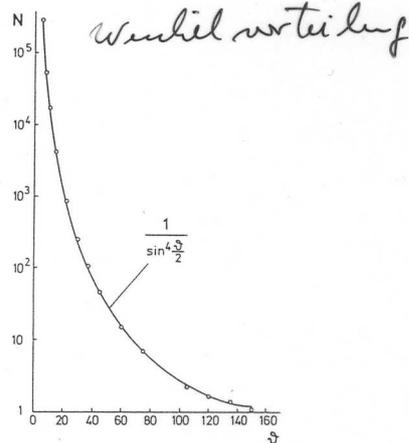
$N(\alpha, \theta)$   
 Zahl der  
 auf dem Schirm  
 auftreffender  
 $\alpha$ -Teilchen

Folie: Gold,  
 Silber

RaC  
 Quelle

Sch

zur  
 Pumpe



Winkelverteilung

Abb. 4.4. Meßanordnung zur Untersuchung der Rutherford-Streuung:  $\alpha$ -Teilchen aus dem Präparat R werden an der Folie F gestreut. Die auf dem Szintillationsschirm S erzeugten Lichtblitze werden mit der Lupe L beobachtet. Die Anordnung ist evakuierbar und mittels des Schließes Sch läßt sich die Beobachtungslupe L um die Folienachse drehen

Abb. 4.5. Graphische Darstellung der Meßergebnisse von Geiger und Marsden für die Rutherford-Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie. Aufgetragen ist die Streurrate  $N$  als Funktion des Streuwinkels  $\theta$ . Die ausgezogene Kurve stellt den theoretischen Verlauf für Coulomb-Streuung dar

Rutherford'sche Formel für Streuung an einer dünnen Metallfolie der Dicke  $D$  (Punktladungsverteilung)

$$\frac{dN(\alpha, d\Omega)}{N} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Dn}{u^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} d\Omega$$

$$d\Omega = \frac{F}{R^2} \text{ Raumwinkel}$$

$$n = \text{Anzahl der Folienatome pro cm}^3$$

(Folie Rutherford- Streuung)

„It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15 inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you“

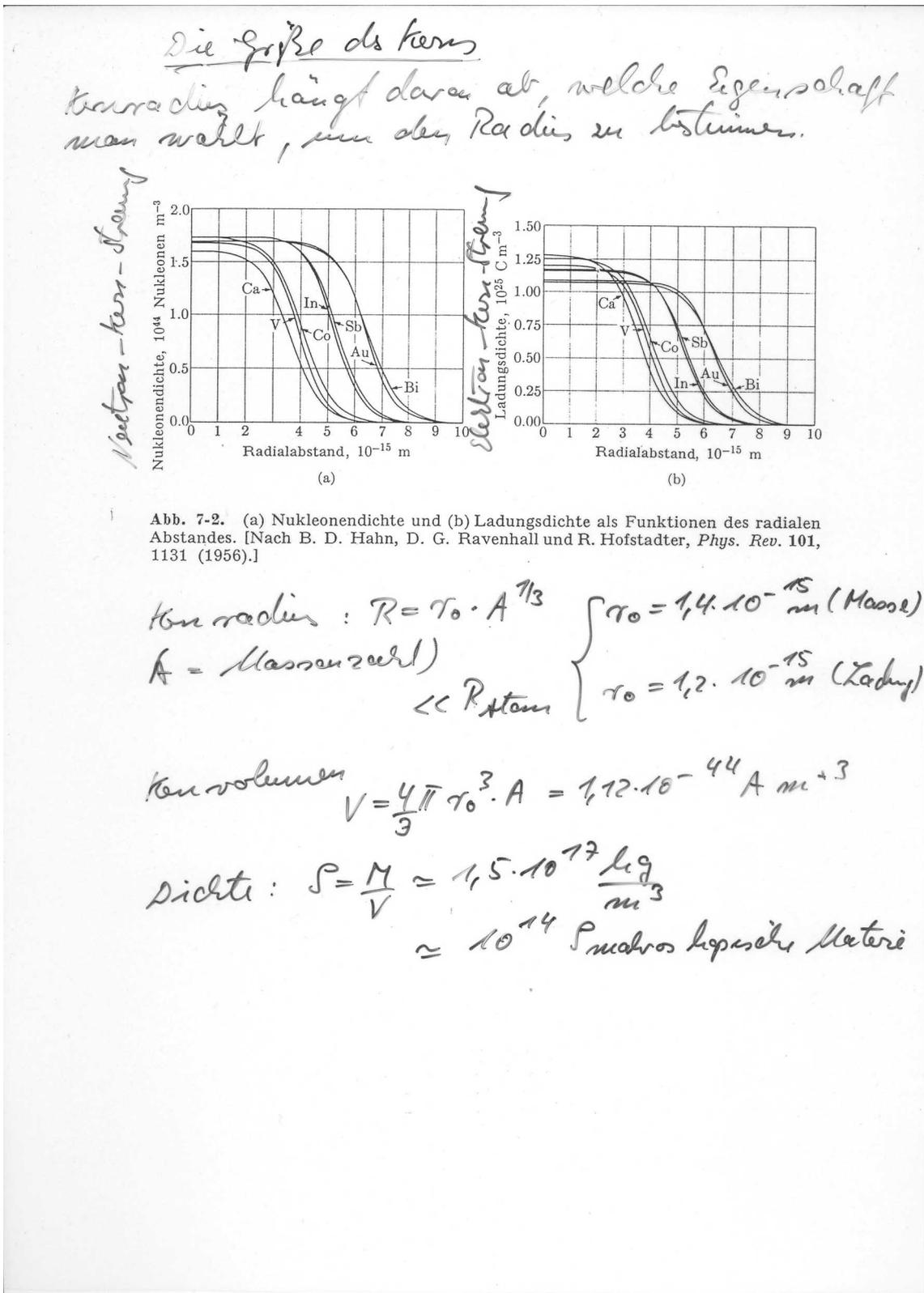
1. Streuformel erfüllt bis  $p \simeq 5 \cdot 10^{-15} m$  ( $5 MeV$ )

$$\Rightarrow R_{Kern} < 5 \cdot 10^{-15} m \Rightarrow \text{Atom ist „leer“, Atomradius} \approx 10^{-10} m$$

2. Es wird kein Rückstoß beobachtet, also folgt:

$$\Rightarrow M_{Kern} \gg m_{\alpha} \Rightarrow \text{Atommasse im Kern}$$

3. Schnelle  $\alpha$ -Teilchen (ab etwa  $GeV$ ) mit sehr kleinen  $p$  werden verschluckt



(Folie „Die Größe des Kerns“)

*Rutherfordsches Atommodell Planetenmodell*  
 (Skizze Planeten-Modell)  
 klassische Mechanik

- Umlauf des  $e^-$  um beliebige Entfernung um den Kern möglich

Umlaufbedingungen:

- Zentripedalkraft = Coulombkraft

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

- Umlauffrequenz  $\nu = \frac{2\pi}{T} = 2\pi r \nu$

$$\Rightarrow m_e = \frac{(2\pi r \nu)^2}{r} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{ze^2}{16\pi^3 m_e \epsilon_0 r^2}} \quad \begin{matrix} z=1 \\ r=1 \end{matrix} \simeq 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \hat{=} 10,4 \text{ ???}$$

Lebensdauer eines Atoms?

Energieabstrahlung pro Zeiteinheit einer mit  $v \ll c$  beschleunigten Ladung  $q$ :

*Lamer-Gleichung:*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot a^2$$

$$a_{el} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 m_e} \quad \text{stackrel{rel}{\simeq} } \begin{matrix} z=1 \\ r=1 \end{matrix} 2,5 \cdot 10^{22} \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 4 \cdot 10^{-9} \frac{J}{s}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e 4\pi^2 r^2 \nu^2 \simeq 10^{-18} J$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{E_{kin}}{\frac{dE}{dt}} = \frac{10^{-18} J}{4 \cdot 10^{-9} J/s} = 2,5 \cdot 10^{-10} s$$



### 3.6.3 Spektrallinien und Bohrsches Atommodell

#### 3.6.3.1 Spektroskopische Vorbetrachtung

3.6.3 Spektrallinien und Bohrsches Atommodell  
 3.6.3.1 Spektroskopische Vorbetrachtung

Optische Spektren von Materie:

Linienenspektren: typisch für Atome (Gas geringer Dichte)

Bandenspektren: Moleküle

Kontinuierliche Spektren: Festkörper und Gasen hoher Dichte

Emission:

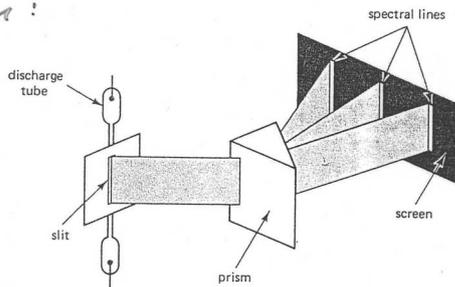


Fig. 4.3 Analysis of light by means of a prism. Each separate color of light emerging from the slit gives rise to a separate spectral line on the screen.

Es werden die gleichen Linien beobachtet, Absorptionsspektren weniger Linien

Absorption:

"weißes" Licht

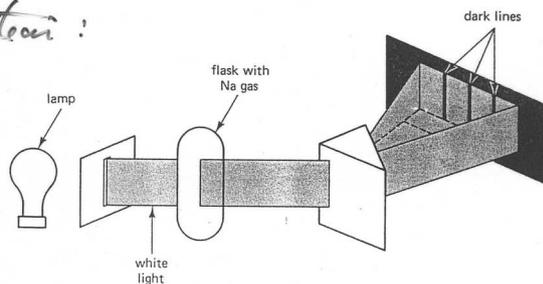


Fig. 4.9 Experimental arrangement for the observation of the absorption lines of a gas.

Notation: Wellenlänge im Vakuum  $\Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$   
 Medium  $\rightarrow \lambda_{Med} = \frac{\lambda}{n}$  Brechzahl  
 $c_{Med} = \frac{c}{n}$

üblich: Wellenzahl  $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{Med} \cdot n}$   
 $= \frac{\nu}{c}$

Energie:  $E = h \cdot \nu = \bar{\nu} h \cdot c$

(Folie 3.6.3.1)



3.6.3.2 Das optische Spektrum des H-Atoms

3.6.3.2 Das optische Spektrum des H-Atoms

H-Atom: 1 Proton und 1 Elektron

Balmer-Serie von H: diskrete Linien

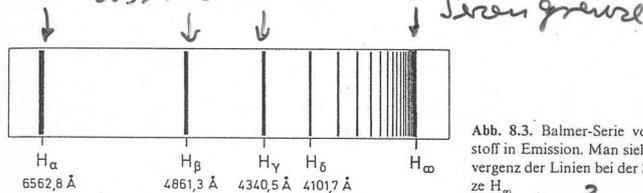


Abb. 8.3. Balmer-Serie von Wasserstoff in Emission. Man sieht die Konvergenz der Linien bei der Seriengrenze H<sub>∞</sub>.

Balmer 1885:  $\lambda = 911,76 \text{ \AA} \cdot \frac{4n^2}{n^2-4}$ ;  $n = 3, 4, \dots$

Seriengrenze: ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow \lambda = 3647 \text{ \AA}$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{911,76 \text{ \AA}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

↑ Rydberg-Konstante für H

$$R_H = 109677,581 \text{ cm}^{-1}$$

Rydberg (1889)  
Vervollständigung der  
Balmer Formel

$$\bar{\nu} = R_H \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$n_1, n_2 \geq n_1 + 1$  ganzzahlig  
Hauptquantenzahlen

Tabelle 8.3. Die Wellenlängen einiger Linien der verschiedenen Spektralserien im Wasserstoffatom. Die Serie mit  $n_1 = 5$  wurde 1924 von Pfund beobachtet. Sie beginnt mit einer Linie mit  $\lambda = 74000 \text{ \AA}$ . Sie ist in der Tabelle nicht mehr enthalten

n	1 Lyman	2 Balmer	3 Paschen	4 Brackett
2	1216 Å ≅ 82257 cm <sup>-1</sup>			
3	1026 Å ≅ 97466 cm <sup>-1</sup>	6563 Å ≅ 15233 cm <sup>-1</sup>		
4	973 Å ≅ 102807 cm <sup>-1</sup>	4861 Å ≅ 20565 cm <sup>-1</sup>	18751 Å ≅ 5333 cm <sup>-1</sup>	
5	950 Å ≅ 105263 cm <sup>-1</sup>	4340 Å ≅ 23033 cm <sup>-1</sup>	12818 Å ≅ 7801 cm <sup>-1</sup>	40500 Å ≅ 2467 cm <sup>-1</sup>
Entdeckungsjahr	1906	1885	1908	1922

Ritz'sche Kombinationsprinzip:

Die Differenz der Frequenzen zweier Linien einer Serie ist gleich der Frequenz einer Linie, die mit gleicher Atom in einer anderen Serie tatsächlich auftritt.

z. B.  $\bar{\nu}_{Bal} (n=3, n_1=2) = \bar{\nu}_{Ly} (n=3, n_1=1) - \bar{\nu}_{Ly} (n=2, n_1=1)$

(Folie 3.6.3.2. -)

$$R_H = 109677,581 \text{cm}^{-1} \text{Rydbergkonstante}$$

### 3.6.3.3 Wasserstoff-ähnliche Spektren

Die Gesetzmäßigkeit, die das Spektrum des  $H$ -Atoms beschreiben, gelten mit hoher Genauigkeit auch für Systeme, die sich mit einem Kern mit  $z$  positiven Elementarladungen und einem ihm umkreisenden Elektron zusammensetzen. Ionen:

$$\begin{aligned} He^+ & \\ Li^{2+} & \quad \bar{\nu} = z^2 R_H \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n' < n \text{ Ganzzahlig} \\ Be^{3+}: & \quad R_{He} = 109722,4 \text{cm}^{-1} \gtrsim R_H \end{aligned}$$

Atome zeigen Linienspektren

1. H-Atom: Wellenzahl der Linien nach *Rydberg*:

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} = R_H \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq n' + 1, \quad n', n \in \mathbb{N}$$

$$R_H = 109677,581 \text{cm}^{-1}$$

Serien		Seriengrenze	
$n' = 1$	$n = 2, \dots$	<i>Lyman</i>	$\bar{\nu}_L = R_H$
$n' = 2$	$n = 3, \dots$	<i>Balmer</i>	$\bar{\nu}_B = \frac{R_H}{4}$
$n' = 3$	$n = 4, \dots$	<i>Paschen</i>	$\bar{\nu}_P = \frac{R_H}{9}$
$n' = 4$	$n = 5, \dots$	<i>Braket</i>	$\bar{\nu}_B = \frac{R_H}{16}$

2. H-Ähliche Atome  $He^+, Li^{2+}, Be^{3+}, \dots$  Atome mit nur iem Elektron, aber Kernladung  $+2e$

$$\bar{\nu} = z^2 R_{Ion} \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n' < n \quad n \in \mathbb{N}$$

Wobei  $R_{Ion}$  Rydbergkonstante des Ions ist

$$\text{z.B.: } R_{He^+} = 109722,4 \text{cm}^{-1} \gtrsim R_H$$

3. Alkalimetalle, einfach ionisierte Edelmetalle ( $Mg^+, Cu^+, \dots$ ) und zweifach ionisierte Edelmetalle ( $B^{2+}, A^{2+}, \dots$ ), qualitativ ähnlich wie H-Atom, aber:

(Skizze Sternatom)

Keine Elektronenatome, ein leicht gebundenes Elektron (Valenzelektron), bewegt sich im Feld des Sterns um einer inneren Elektronenhülle.



## 3.6.3.4 Optische Spektren der Alkalimetalle

## 3.6.3.4 Die optischen Spektren der Alkalimetalle

Natrium in Absorption: Linienserie, aber  
Dublettlinien

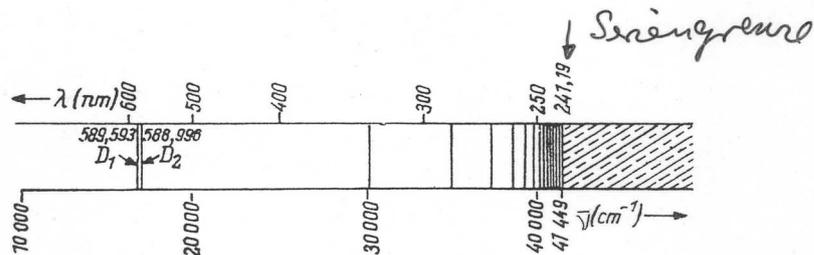


Abb. 38. Hauptserie des Natriums im Absorptionsspektrum von Natriumdampf

$$\bar{\nu} = R_{\text{Na}} \left( \frac{1}{n^{*2}} - \frac{1}{m^{*2}} \right); \quad n^* < m^* \quad \text{nicht-ganzzahlige Quantenzahlen}$$

$$\text{Hauptserie: } \bar{\nu} = R_{\text{Na}} \left( \frac{1}{1,627^2} - \frac{1}{n_p^2} \right)$$

$$n_p = \begin{cases} 2,1174; 3,1333; 4,1391; 5,1417, \dots & \text{kurzwellige} \\ 2,1168; \dots & \text{langwellige Dublettsamp.} \end{cases}$$

$$\bar{\nu}_{D_1} = \frac{1}{589,593 \text{ nm}} \hat{=} 16961 \text{ cm}^{-1} = R_{\text{Na}} \left( \frac{1}{1,627^2} - \frac{1}{2,1168^2} \right)$$

$$\bar{\nu}_{D_2} = \frac{1}{588,996 \text{ nm}} \hat{=} 16978 \text{ cm}^{-1} = R_{\text{Na}} \left( \frac{1}{1,627^2} - \frac{1}{2,1174^2} \right)$$

$$\Rightarrow R_{\text{Na}} \approx 109692 \text{ cm}^{-1} \approx R_{\text{H}}$$

weitere Serien: I. und II. Nebenserie und  
Bergmann-Serie

(Folie)



3.6.3.5 Röntgenspektrum

3.6.3.5 Das Röntgenspektrum

Bremsstrahlung (kontinuierliches Spektrum):  
 kinetische Energie der Elektronen wird bei der  
 Abbremsung an der Kathode in Strahlung  
 umgewandelt Anode

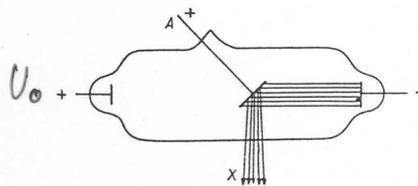


Abb. 19  
 Ältere Röntgenröhre (A: Antikatode)

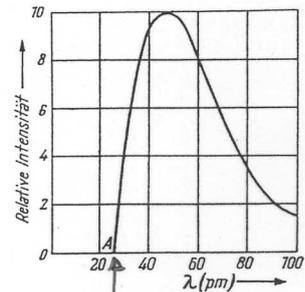


Abb. 20  
 Kontinuierliches Röntgenspektrum

$$\lambda_{\min} = \frac{h \cdot c}{e U_0}$$

Charakteristische Strahlung (Linienspektrum)  
 abhängig vom Material der Antikathode

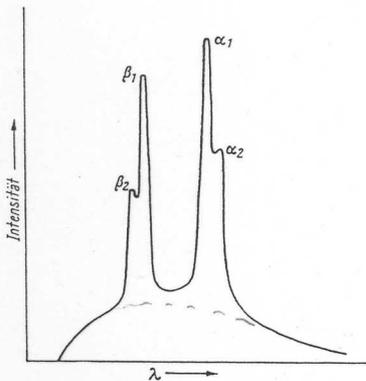


Abb. 21. Teil des charakteristischen  
 Röntgenspektrums des Molybdäns.

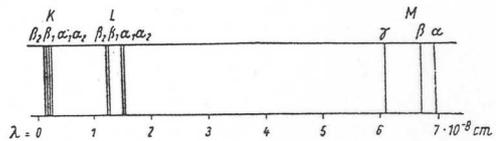


Abb. 35. Röntgen-Emissionsspektrum des Wolframs

Spektren sehr einfach gebaut,  
 bestehen nur aus einer  
 kleinen Zahl von Linien,  
 die Linien werden in Serien zusammengefasst,  
 die mit den Buchstaben K, L, M, ...  
 bezeichnet werden. Die Linien jeder Serie  
 sind gewöhnlich doppelt und werden  
 mit Indizes  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  bezeichnet.

(Folie)



3.6.3.6 Das Moselay'sche Gesetz

3.6.3.6 Das Moselay'sche Gesetz

Beim Vergleich der Wellenlängen der d-Linien der K-Serie stellte Moselay fest, dass sie sich regel mäßig verhalten, wenn sie nach der Reihenfolge der Elemente im Periodensystem geordnet werden.

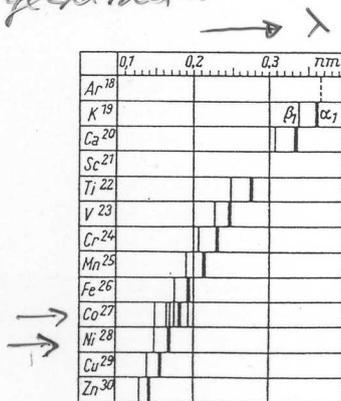


Abb. 22  
Wellenlängen der  $K_{\alpha 1}$ - und  $K_{\beta 1}$ -Linien der Röntgen-Emissionsspektren von Kalium bis Zink nach MOSELEY

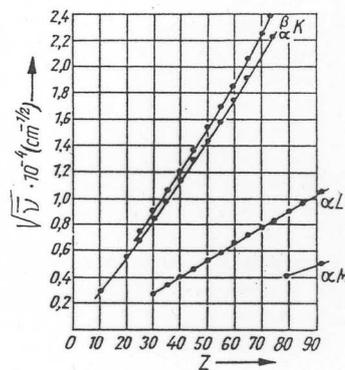


Abb. 23  
Graphische Darstellung der MOSELEYSCHEN BEZIEHUNG für die K-, L- und M-Serie

empirische Beziehung  $\sqrt{\nu} = a(z-b) \propto \sqrt{z}$   
 (für Frequenz)  
 a und b sind Konstanten, die für die verschiedenen Serien jeweils andere Werte haben  
 z = Ordnungszahl  
 z.B.  $K_{\alpha 1}$  und  $z > 10 \Rightarrow \sqrt{\nu} = 4,97 \cdot 10^7 (z-1) s^{-1/2}$

(Folie)

**3.6.3.7 Das Bohr'sche Atommodell**Die *Bohr'schen Postulate*:

1. In einem Atom bewegen sich die Elektronen nach der klassischen Physik auf diskreten Kreisbahnen mit der Energie  $E_n$  (Einführung der sogenannten stabilen Bahnen  $\hat{=}$  stationäre Zustände)
2. Die Bewegung der Elektronen im stationären Zustand erfolgt strahlungslos. Das Elektron emittiert oder absorbiert Energie nur beim sprunghaften Übergang von einer stationären Bahn auf die andere. Die Strahlungsfrequenz ist durch die Energiedifferenz der entsprechenden Energieniveaus

$$\nu = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$$

bestimmt.

3. Der Drehimpuls eines Elektrons in einem stationären Zustand nimmt nur die diskreten Werte

$$L = \hbar \quad (n = 1, \dots)$$

an, wobei

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054589 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

ist

Das Bohr'sche Modell für Elektronen -Atome:  
(Skizze diskrete Kreisbahnen)

- Bestimmung der Bahnradien  $r$ :

$$\text{Postulat 1: } \frac{m_e v^2}{r_n} = \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

Poatulat 2:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \quad , & \vec{L} &\perp \text{ Kreisbahnebene} \\ L &= r \cdot p & &= m_e v r_n = n \hbar \\ & & &\Rightarrow v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r_n^2} \end{aligned}$$

$$\frac{m_e}{r_n} \cdot \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 v_n^2} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

$$\Rightarrow R_n = \underbrace{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e}} \cdot \frac{n^2}{z} = 0,529 \frac{n^2}{z}$$

Bohrscher Radius  
des H-Atoms  
 $a_0 = 0,529$

- Bestimmung der quantisierten Energiezustände  $E_n$

Gesamtenergie:  $E = E_{kin} + E_{pot} = -E_{kin}$  (da für alle Zentralkräfte  $E_{kin} = -2E_{pot}$  gilt)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \int_{\infty}^r -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -2E_{kin}$$

$$E_n = -E_{kin} = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

$$\Rightarrow E_n = - \underbrace{\frac{e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2}} \cdot \frac{m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{z^2}{h^2}$$

Grundzustand des  
H-Atoms  
 $= 13,59eV$

Quantitative Folgerungen:

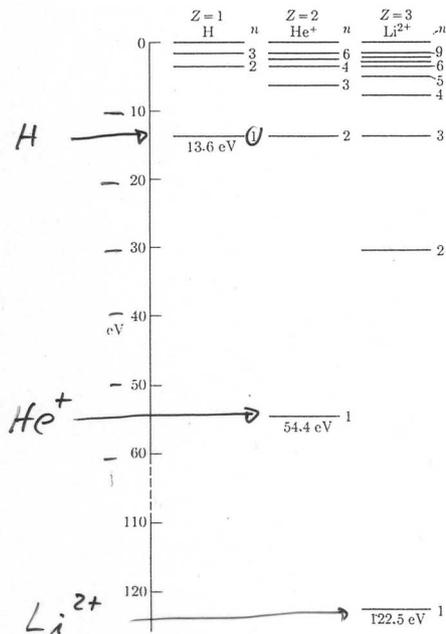


Abb. 8-2. Einige Energieniveaus von H, He<sup>+</sup> und Li<sup>2+</sup>.

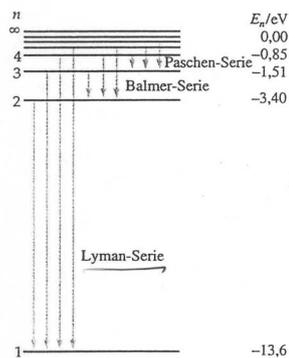
Energie aus Teil 1:  

$$E_n = -13,59 \text{ eV} \frac{Z^2}{n^2}$$

Bohreradius  

$$r_n = 0,529 \text{ \AA} \cdot \frac{n^2}{Z}$$

Übergangsfrequenzen für Wasserstoff:



Postulat 2:  

$$h \cdot \nu = E_{n'} - E_n ; n' > n$$

$$= h \cdot c \cdot \bar{\nu}$$

$$\bar{\nu} = \frac{E_{n'} - E_n}{h \cdot c} = \frac{e^4 m_e}{4\pi (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 c} \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = R_H$$

$$R_H (\text{Theorie}) = 109740 \text{ cm}^{-1}$$

$$R_H (\text{Experiment}) = 109677,58 \text{ cm}^{-1}$$

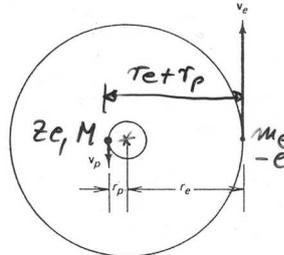
$$R_H (\text{Th}) - R_H (\text{Exp.}) \approx 62 \text{ cm}^{-1} \quad (5 \cdot 10^{-2} \%)$$

(Folie Wellenzahl)

Mitbewegung des Kerns:  
\* Massenschwerpunkt

$$T_p = T \cdot \frac{m_e}{m_e + M}$$

$$v_p = v \cdot \frac{m_e}{M + m_e}$$



$$T_e = T \cdot \frac{M}{M + m_e}$$

$$v_e = v \cdot \frac{M}{M + m_e}$$

Fig. 4.20 Circular orbits of the electron and the nucleus around their common center of mass. The size of the orbit of the nucleus has been exaggerated; it is actually 1800 times smaller than that of the electron.

Energie:  $E = \frac{1}{2} m_e v_e^2 + \frac{1}{2} M v_p^2 - \frac{z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}$

$$= \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}, \quad \mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M}}$$

Drehimpuls:  $L = m_e v_e r_e + M v_p r_p$

$$= \mu \cdot v \cdot r$$

Stabilitäts bed.:  $m_e \frac{v_e}{T_e} = m_e \left( \frac{v M}{M + m_e} \right)^2 \cdot \frac{M + m_e}{r \cdot M} = \mu \frac{v^2}{r} = \frac{z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$

$$\Rightarrow R_H = \frac{\mu e^4}{4 \pi (4 \pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 c} = \frac{m_e e^4}{4 \pi (4 \pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 c} \frac{1}{1 + \frac{m_e}{M}} = R_H(M \rightarrow \infty) \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_e}{M}}$$

Tabelle 8.6. Wellenlängen  $\lambda_{1,2}$  der ersten Lyman-Linien, d. h. der Spektrallinien mit  $n' = 1, n = 2$ , von Wasserstoff und von Wasserstoff-ähnlichen Atomionen. Aus der Massenkorrektur (erste Spalte) berechnet man die Rydbergzahl (zweite Spalte) und damit  $\lambda_{1,2}$  (dritte Spalte). Der berechnete Wert stimmt mit dem gemessenen  $\lambda_{1,2}$  (vierte Spalte) gut überein

	$1 + \frac{m_0}{M_{\text{Kern}}}$	$R_{\text{Kern}}$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\lambda_{1,2}^*$ (berechnet) [Å]	$\lambda_{1,2}$ (gemessen) [Å]
<sup>1</sup> H	1,00054447	109677,6	1215,66	1215,66
<sup>2</sup> H	1,00027148	109707,4	1215,33	1215,33
<sup>4</sup> He <sup>+</sup>	1,00013704	109722,3	303,8	303,6
<sup>7</sup> Li <sup>+</sup>	1,00007817	109728,7	135,0	135,0
<sup>9</sup> Be <sup>3+</sup>	1,00006086	109730,6	75,9	75,9
<sup>10</sup> B <sup>4+</sup>	1,00005477	109731,3	} 48,6	} 48,6
<sup>11</sup> B <sup>4+</sup>	1,00004982	109731,8		
<sup>12</sup> C <sup>5+</sup>	1,00004571	109732,3	33,7	33,7

perfekte  
überein-  
stimmung

Aus Vergleich  $R_H(M \rightarrow \infty)$  mit  $R_H(\text{Exp})$  kann das Verhältnis von Kern zu Elektronenmasse bestimmt werden:  
 $M_{\text{Prot}}/m_e = (0,0005447)^{-1} = 1836,6$

(Folie Mitbewegung des Kerns)

### Bohr'sches Modell und Moseley'sches Gesetz

Moseley:  $K_{\alpha}$  - Limit und  $Z > 10$

$$\nu = 2,47 \cdot 10^{15} (Z-1)^2 s^{-1}$$

$$\nu = R c (Z-1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$= \frac{3}{4} R c (Z-1)^2$$

$$2,47 \cdot 10^{15} s^{-1}$$

Bohr'sches Ergebnis für ein Elektron im Feld eines Kerns mit Ladung  $+(Z-1)e$ !

Annahme: Quantenzahl  $n$  bestimmt eine Schale, die mit mehreren Elektronen besetzt werden kann.

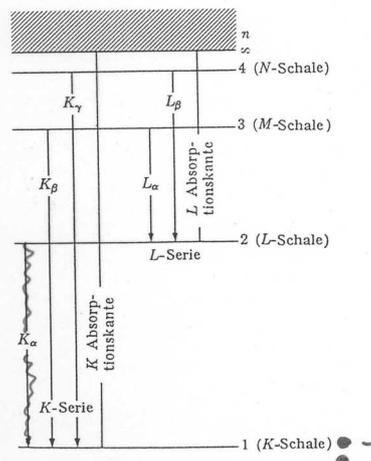


Abb. 4-20. Röntgenübergänge in einem Atom mit einer Atomnummer  $Z \sim 36$ .

- Fragen:
1. Reihenfolge der Schalenstruktur?
  2. Besetzungsverhalten der  $(Z-1)$  Elektronen?
  3. Besetzung der Schalen?
  4. Energie der Schalen?

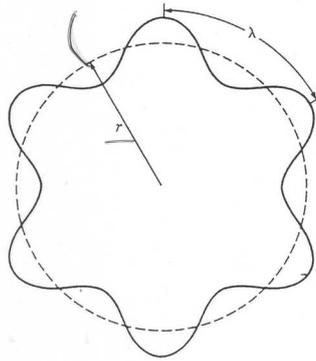
(Folie Interpretation des Mosleyschen Experimentents)

Quantisierungsregeln von Wilson und Sommerfeld

Interpretation des 3. Bohr'schen Postulats:

$$L = m v \cdot r = n \cdot h; \quad n=1,2$$

Kreisbahn



Annahme: Elektron bildet stehende Welle mit Wellenlänge  $\lambda$

$$2\pi r = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{h}{p}$$

$$\Rightarrow p \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

$$p \cdot 2\pi r = n \cdot h$$

$$\oint p \, dr = n \cdot h$$

Verallgemeinerung:

System von  $f$ -Teilchen mit 3 Freiheitsgraden

$q_1, \dots, q_{3f}$  verallg. Koordinaten

$p_1, \dots, p_{3f}$  verallg. Impulse

$$\oint p_k \, dq_k = n_k \cdot h \quad k=1, \dots, 3f; \quad n_k \text{ ganzzahlig}$$

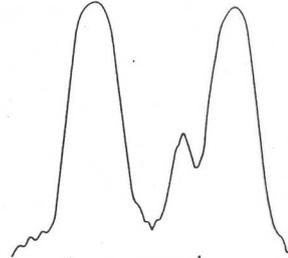
Aktionenintegrale von Wilson und Sommerfeld

(Folie Quantisierungsregel)  
(Nebenrechnung Folie)

$$E = h\nu, \quad c = \lambda\nu$$
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Sommerfeld'sche Erweiterung des Bohr'schen Modells  
 $H_\alpha$ -Linie der Balmer-Serie zeigt Aufspaltung

Abb. 8.14.  $H_\alpha$ -Linie der Balmer-Serie bei höherer spektraler Auflösung. Man erkennt drei Komponenten. Noch höhere Auflösung wird in Abb. 12.24 gezeigt. Die hier erreichte Auflösung ist durch Dopplerverbreiterung begrenzt



Honsequenzen: eine Quantenzahl reicht zur Interpretation nicht aus.

Sommerfeld: Berücksichtigung elliptischer Bahnen

Kreisbahn  
 $E = \langle E_{pot} \rangle_t = - \langle E_{kin} \rangle_t$

Ellipse  
 $E = \frac{\langle E_{pot} \rangle_t}{2} = - \frac{\langle E_{kin} \rangle_t}{2}$

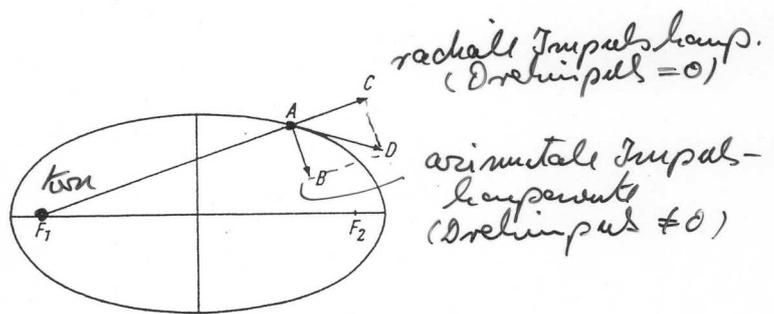


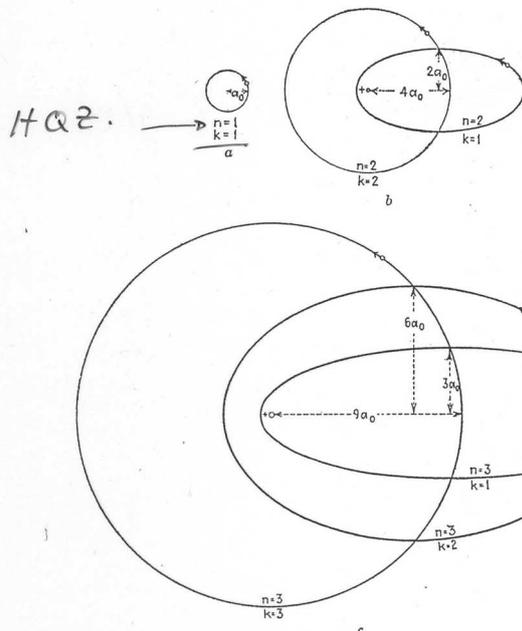
Abb. 39. Die radiale und die azimuthale Komponente des Impulses eines auf einer elliptischen Bahn umlaufenden Elektrons

Sommerfeld (1916): Bohr'sche Quantenbed. ist für beide Komponenten des Impulses gültig  
 $\Rightarrow$  2 Quantenzahlen  $n_r, k$  Neben-  
 $\uparrow$   $q_2$ .

$$\Rightarrow E = - \frac{e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{\mu}{\hbar^2} \frac{Z^2}{(n_r + k)^2} ; \quad n = n_r + k \text{ ganzzahlig}$$

$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$   
 $k = 1, 2, 3, \dots$   
 Kreisbahn:  $k = n ; n_r = 0$   
 Ellipse:  $k \leq n-1, n_r \neq 0$

(Folie)



Orbitradius  $r_n$  und große Halbachse der Ellipsen sind gleich

Energie hängt nur von der großen Halbachse ab.

$$E_n \propto \frac{1}{r_n} \propto \frac{z^2}{n^2}$$

FIG. 7-3a, b, c.—Bohr-Sommerfeld electron-orbits for  $n = 1, 2,$  and  $3,$  drawn to the same scale.

auf der elliptischen Bahn ändert sich die Geschwindigkeit periodisch  $\Rightarrow$  periodische Massenänderung  
 $\Rightarrow$  Aufhebung der Störung der Energie in  $v$  mit gleichem  $n$  aber unterschiedlichen  $k$   
 $\Rightarrow$  zunehmende Energieabstufung mit zunehmender Elliptizität

$$E_{n,k} = -Rhc \cdot \frac{z^2}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 z^2}{n^2} \left( \frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

Parameter  $\alpha = \frac{\text{Geschwindigkeit Elektron auf 1. Bohr'scher Bahn}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}}$

$$= \frac{c^2}{2\epsilon_0 hc} = \frac{1}{137}$$

= Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante

$\alpha^2 = 10^{-5}$ , d.h. sehr klein, aber beobachtbar

(Folie Horpitale)

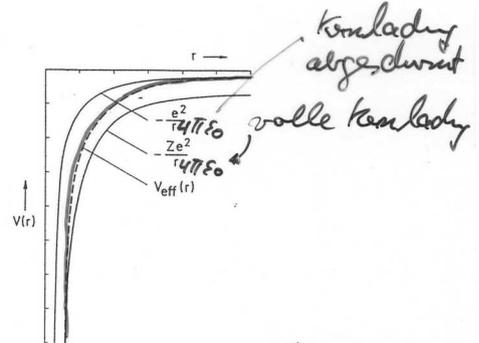
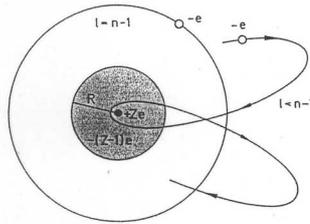
Das Termchema der Alkalimetalle

Spektren im optischen Bereich werden von einem Vergleichswert schwach geladenen äußeren Elektrons, das sich im elektrischen Feld der Kernladung  $+Ze$  bewegt, die durch  $(Z-1)$  innere Elektronen weitgehend abgeschirmte ist.

Tabelle 11.1. Ionisierungsarbeiten für die Elemente mit  $Z=1$  bis  $Z=20$  im neutralen sowie im einfach bis dreifach ionisierten Zustand. Die Ionisierungsenergie ist immer dann besonders groß, wenn eine Edelgaskonfiguration (abgeschlossene Schale) der Elektronen erreicht ist. Sie ist besonders klein, wenn ein Elektron mehr vorhanden ist als einer Edelgaskonfiguration entspricht

Element	Ionisierungsarbeit in eVolt für den Übergang			
	vom neutralen Atom zum einfach	vom einfach zum zweifach	vom zweifach zum dreifach	vom dreifach zum vierfach
geladenen positiven Ion				
$^1_1\text{H}$	13,59	-	-	-
$^2_2\text{He}$	24,5	54,1	-	-
$^3_3\text{Li}$	5,4	75	122	-
$^4_4\text{Be}$	9,3	18,2	154	217
$^5_5\text{B}$	8,3	25,1	38	259
$^6_6\text{C}$	11,3	24,5	48	64,5
$^7_7\text{N}$	14,6	29,6	47	77,4
$^8_8\text{O}$	13,6	35,2	55	77,4
$^9_9\text{F}$	17,4	34,9	62,7	87,3
$^{10}_{10}\text{Ne}$	21,6	41,0	63,9	98,9
$^{11}_{11}\text{Na}$	5,14	47,3	71,7	109,3
$^{12}_{12}\text{Mg}$	7,64	15,0	80,2	120
$^{13}_{13}\text{Al}$	5,97	18,8	28,5	44,9
$^{14}_{14}\text{Si}$	8,15	16,4	33,5	51,4
$^{15}_{15}\text{P}$	10,9	19,7	30,2	47,1
$^{16}_{16}\text{S}$	10,4	23,4	35,1	53,5
$^{17}_{17}\text{Cl}$	12,9	23,7	40,7	ca. 61
$^{18}_{18}\text{Ar}$	15,8	31,7	45,5	60,6
$^{19}_{19}\text{K}$	4,3	11,9	51	67
$^{20}_{20}\text{Ca}$	6,1			

geringste Ionisierungsenergien



$$E_{n,l} = -R_N \alpha h c \frac{1}{n_{\text{eff}}^2} = -R_N \alpha h c \frac{1}{(n - \Delta n(n,l))^2}$$

↑  
geringste

(Folie Das Termschema der Alkalimetalle)

Grenzen der „alten“ Quantentheorie:

1. *Bohr-Sommerfeld*-These unbefriedigend

**einerseits** klassische Mechanik wird außer kraft gesetzt um bestimmte Bahnen zuzulassen

**andererseits** wird klassische Physik zur bestimmung der Bahnen herangezogen

2. Nur Aussagen über Frequenz, nicht über die Intensitäten des absorbierten bzw. emittierten Lichtes möglich

3. Halbzahlige Quantenzahlen (z.B.: Rotationspektren) nicht erfaßbar

4. Grundsätzliche Schwierigkeiten bei der Behandlung von Atomen mit mehr als einem Valenzelektron

5. Behandlung ungebundener (nicht Stationärer) Systeme nicht möglich

⇒ ab 1925 „neue“ Quantenmechanik = *Wellenmechanik*

Namen in diesem Zusammenhang:

*de Brogli, Heissenberg, Schrödinger, Born, Dirac*

# Kapitel 4

## Materiewellen

**Ziel:** experimentelle und konzeptionelle Grundlagen der Wellenmechanik

### 4.1 Freies Teilchen

(Skizze Bahnkurve)

#### 4.1.1 Die Hypothese von Louis de Broglie

- Klassisch:

Licht = e.m. Welle

- Experiment:

Licht besteht aus Teilchen (Photonen) mit Energie  $E = h\nu$   
und Impuls  $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$  die sich mit  $c$  bewegen

korpuskularer Charakter

⇒ dualistische Betrachtungsweise

Verallgemeinerung von *de Broglie*: Die Gleichungen für Lichtquanten gelten auch für *Korpuskeln* (Ruhemasse  $\neq 0$ )

Teilchen mit Impuls  $p = m \cdot v$

⇒ Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \quad \text{de Broglie-Wellenlänge}$$

Nobelpreis 1929 für de Broglie

Das Elektron als Welle

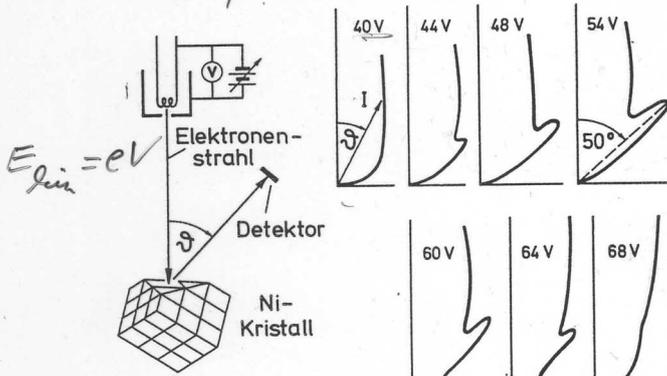
Versuch von Davisson und Germer (1919, Erklärung 1927)  
 de Broglie:  $\lambda = \frac{h}{p} \stackrel{\text{klassisch}}{\uparrow} \frac{h}{\sqrt{2meE_{kin}}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$

Tabelle 6.2. Wellenlänge der Elektronen nach De Broglie in Å bei verschiedenen Energien [eV]

$E_{kin}$	[eV]	10	100	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$
$\lambda$	[Å]	3,9	1,2	0,39	0,12	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$

↑ ↑ = Stromgröße  
 langsame Elektronen

Interferenz bei Reflexion langsamer Elektronen an einem Ni-Kristall



Winkelverteilung der reflektierten Elektronen in Polardarstellung; Pfeillänge ist Maß für Intensität

Interpretation mit Bragg-Bedingung

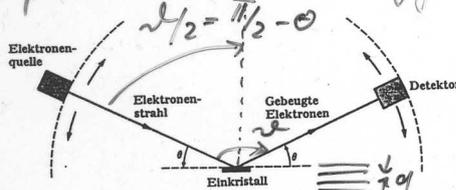


Abb. 1-23. Anordnung von Davisson und Germer zur Beobachtung der Bragg-Streuung von Elektronen.

$$2d \sin \Theta = n \cdot \lambda$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \Theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 2d \cos \frac{\alpha}{2} = n \cdot \lambda$$

(Folie „Das Elektron als Welle“)  
(Skizzen Röntgenbeugung)

Fresnel - Beugung an einer Kante, Boersch (1956)  
 Beugungsmuster von Licht an einem Einzelspalt  
 Fraunhofer - Beugungsmuster  
 Kante

Abstand zum Spalt

33.28 Die Beugungsmuster an einem Einzelspalt bei verschiedenen Schirmabständen. Bringt man den Schirm näher an den Spalt, so wird das Fraunhofer-Beugungsmuster a) bei weit entferntem Schirm allmählich zum Fresnel-Beugungsmuster, b) wobei der Schirm nahe am Spalt steht.

(a)

(b)

Kante

Abstand

Intensität

geometrischer Schatten

Kante

Abstand

(b)

↑

zum Golddraht

Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - Folienkante

$E_e = 3,4 \cdot 10^4 \text{ eV}$

$E_e = 19,4 \cdot 10^3 \text{ eV}$

(Folie „Fresnel-Beugung“)

Beugung am Fresnel-Biprisma, Mollenstedt (1956)

punktartige Ersatzlichtquellen

überlagerungsbereich

Wegdifferenz  
 $\Delta = r_2 - r_1$   
 $\approx a \sin \beta$   
 $\approx a \tan \beta$   
 $\approx a \cdot \frac{s}{d}$

Interferenzmaxima  $\frac{a \cdot s_{\max}}{a} = n \cdot \lambda$   
 $\Rightarrow s_{\max} = \frac{n \cdot d \cdot \lambda}{a}$

Film

Abb. 6.9. Elektroneninterferenzen mit dem elektrostatischen Biprisma nach Mollenstedt und Düker. Versuchsanordnung. Zwischen dem Faden und den Gegenelektroden liegt eine elektrische Spannung. Durch das entstehende inhomogene elektrische Feld werden die Elektronen wie eingezeichnet abgelenkt. Nach Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik, 13. Aufl. (Springer, Berlin, Heidelberg, New York) Abb. 10.68

Abb. 6.10. Elektroneninterferenzen mit dem elektrostatischen Biprisma nach Mollenstedt und Düker. Meßergebnisse, aus Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik, 13. Aufl. (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1977) Abb. 10.69

(Folie „Fresnel-Biprisma“)

(siehe auch:

[http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web\\_ph12/grundwissen/06interferenz/biprisma/bi](http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web_ph12/grundwissen/06interferenz/biprisma/bi)

)

Atome als Wellen  
 Die Wellennatur anderer Teilchen (He-Atomstrahlen, Neutronen, Protonen ...) wurde ebenfalls durch Interferenzexperimente nachgewiesen.

Elektronen

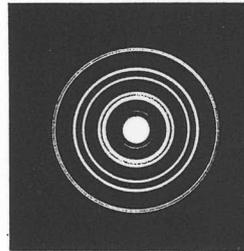
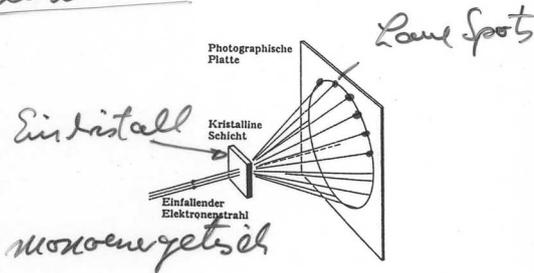


Abb. 1-20. Experimentelle Anordnung zur Beobachtung der Elektronenbeugung an kristallinem Material.

Abb. 1-21. Beugung von Elektronen an Kristallpulver (mit freundlicher Genehmigung von Dr. Lester Germer).

Neutronen

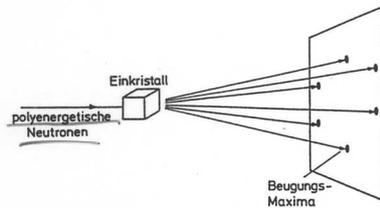


Abb. 6.11. Neutronenbeugung am Einkristall, Laue-Anordnung. Mit polyenergetischen Neutronen erhält man durch Streuung am Einkristall Laue-Diagramme

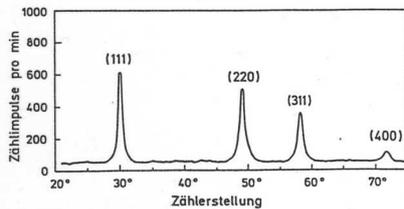


Abb. 6.13. Neutronenbeugung an Diamantpulver (nach G. Bacon). Man erkennt Beugungsmaxima an vier Netzebenen-scharen, die mit den kristallographischen Indizes (111), (220), (311) und (400) bezeichnet sind

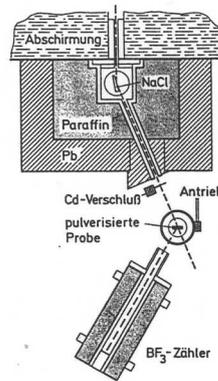


Abb. 6.12. Neutronenspektrometer (nach E. V. Wollan, C. G. Shull: Phys. Rev. 73, 830, 1948). Die Neutronen werden durch Reflexion an einem NaCl-Kristall monochromatisiert und erzeugen durch Beugung an einer polykristallinen Probe Interferenzringe nach Debye-Scherrer. Die Abmessung erfolgt mit einem BF<sub>3</sub>-Zähler

(Folie „Atome als Wellen“)  
(Folie „Elektron“)

### 4.1.2 Welle- Teilchen- Dualismus

- Konsequenzen der Experimente:

*Korpuskel* zeigen Teilchen- und Wellencharakter

- aber:

es handelt sich weder um Teilchen noch Wellen im klassischen Sinne, sondern um eine neue Art *Quantenmechanisches Teilchen*

- einige Versuche diesem QM-Teilchen einen Namen zu geben:

*waveicle, quanticle, quanton, quon*

- Fragestellung:

Wie sind Welle und Teilcheneigenschaften miteinander vereinbar?

Wann dominieren Wellen, wann Teilcheneigenschaften?

Gibt es einen übergeordneten Gesichtspunkt der die beiden Eigenschaften zusammenführt?

Elektronenbeugung am Spalt

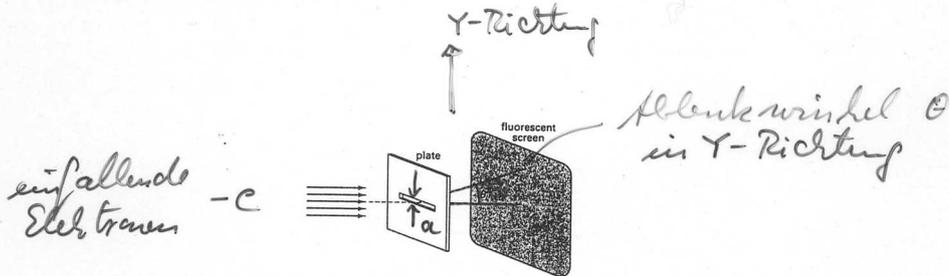


Fig. 5.8 Arrangement for an electron diffraction experiment. The angle  $\theta$  measures the deflection of an electron from the straight path.

$a \gg \lambda_{\text{de Broglie}}$

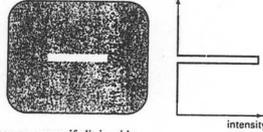


Fig. 5.9 Pattern seen on screen if slit is wide.

entspricht der klassische Erwartung für Teilchen, die entlang gerader Linien wandern

$a \sim \lambda_{\text{de Broglie}}$

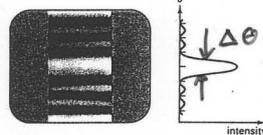


Fig. 5.10 Pattern seen on screen if slit is very narrow.

Beugungsmuster  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$   
wie für klassische Wellen erwartet, widerspricht aber klassischer Erwartung der Teilchenwanderung entlang gerader Linien

$a \ll \lambda_{\text{de Broglie}}$

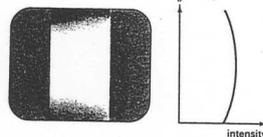


Fig. 5.11 Pattern seen on screen if slit is extremely narrow.

Beugungsmuster für Punktquelle nahezu gleichförmige Intensitätsverteilung

Interpretation: -e sind klassische Wellen? falsch!  
Beweis: Reduktion der Zahl der einfallenden Elektronen  
klassische Erwartung: einzelne Elektron sollte Beugungsmuster zeigen.

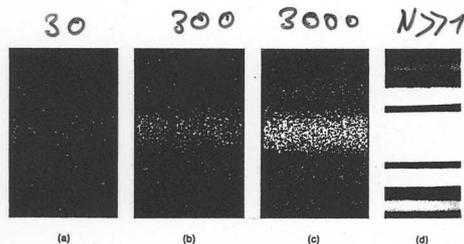


Fig. 5.12 Patterns of impact points of a number of electrons on the screen: (a) 30 electrons; (b) 300 electrons; (c) 3000 electrons; (d) a very large number of electrons. [(a)-(c) are simulations generated by a computer; (d) is a diffraction pattern obtained with light.]

Beugungsmuster ergibt sich durch den Beitrag mehr Elektronen, Auftreffpunkt ein einzelnes Elektron nicht vorhersehbar, nur die mittlere Verteilung einer großen Zahl von Elektronen ist vorhersehbar.

(Folie „Elektronenbeugung am Spalt“)

### Mathematische Beschreibung

- Welleneigenschaften

⇒ Wellenfunktion, die die Bewegung des Elektrons beschreibt sei  $\psi(x, y, z, t)$  für eine Welle, die sich im Raum bewegt.

- Spaltexperiment:

$$\psi = \psi(y, t) \text{ (wobei } y \text{ die Breite der Spalteingänge ist)}$$

- *Hypothese von Born* im Rahmen einer statistischen Deutung (Nobelpreis 1926)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit} \\ \text{für das Elektron im} \\ \text{Intervall } y \text{ und } y + dy \\ \text{gefunden zu werden} \end{array} \right\} \propto \text{Intensität der Welle } dx \propto |\psi(y, t)|^2 dy$$

Für eine große Anzahl  $N$  der einfallenden Elektronen gilt dann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zahl der Elektronen} \\ \text{im Intervall} \\ y \text{ und } y + dy \end{array} \right\} \propto N \cdot |\psi(y, t)|^2 dy$$

Die Wellenfunktion  $\psi(y, t)$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Elektron als Teilchen an einem bestimmten Ort gefunden werden kann.

Doppelspalt - Experiment

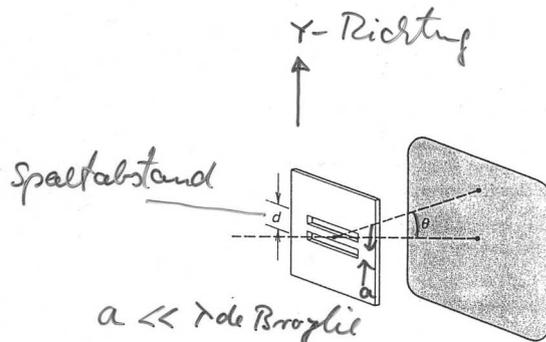


Fig. 5.13 Slits and screen. The separation between the slits is assumed to be much smaller than the distance to the screen.

a) Einzspalt abgedeckt

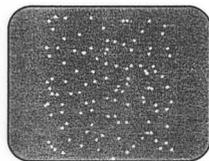


Fig. 5.14 Pattern of impact points if only one (extremely narrow) slit is open.

nahere homogene Verteilung der Elektronen auf dem Schirm

b) Ergebnis für Doppelspalt

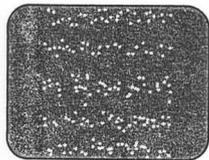


Fig. 5.15 Pattern of impact points if both slits are open.

Interferenzmuster von Wellen, die von den zwei Spalten ausgehen.  
 Welle  $\psi_1$  von Spalt 1  
 Welle  $\psi_2$  von Spalt 2

Analogie Optik:

Annahme: Prinzip der linearen Superposition

$$\Rightarrow \psi = \psi_1 + \psi_2$$

konstruktive Interferenz:  $d \sin \theta = n \cdot \lambda, n=0,1,2, \dots$   
 destruktive Interferenz:  $d \sin \theta = (n + \frac{1}{2}) \lambda$

(Folie „Doppelspalt-Experiment“)

Heisenberg'sche Unschärferelationen

Ziel: Messung der Position des Elektrons in  $y$ -Richtung

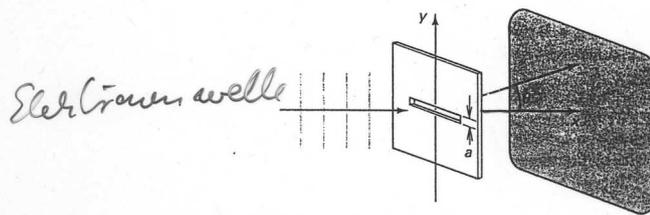


Fig. 5.16 Electron wave incident on a slit.

Fehler der Messung der  $y$ -Position:  $\Delta y = a$  Spaltbreite  
 Beugung  $\Rightarrow$  Elektron wird um Winkel  $\theta$  abgelenkt  
 Abschätzung der Ablenkung  $\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{a}$

Impuls des Teilchens in  $y$ -Richtung:  $P_y = P \sin \theta \approx P \cdot \theta$   
 Unsicherheit im Impuls:  $\Delta P_y = P \cdot \Delta \theta \approx P \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a}$   
 $= \frac{h}{a}$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta y \cdot \Delta P_y &\approx h \quad (\text{exakt } \frac{h}{2}) \\ \Delta x \cdot \Delta P_x &\approx \frac{h}{2} \\ \Delta z \cdot \Delta P_z &\approx \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Heisenberg'sche} \\ \text{Unschärferelationen} \\ \text{für Ort und Impuls} \end{array}$$

(Folie „Heisenberg’sche Unschärferelation“)

### Zusammenfassung

1. Elektronen und anderen Körper in der realen Welt verhalten sich nicht wie klassische Teilchen bzw klassische Wellen. In einigen Experimenten verhalten sie sich wie Teilchen in anderen wie Wellen (Dualität). Experimente, die Teilcheneigenschaften messen, können keine Informationen über Welleneigenschaften liefern (und umgekehrt) (Komplementarität)
2. *Karpuskeln* können durch eine Wellenfunktion  $\psi(x, y, z, t)$  beschrieben werden, deren Intensität  $|\psi|^2$  die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort zu finden.
3. Die Wellenfunktion unterliegen dem Superpositionsprinzip
4. Die Genauigkeit mit der *gleichzeitig* Ort *und* Impuls eines Teilchens gemessen werden können, unterliegt den *Heisenberg’schen Unschärferelationen*

$$\Delta_i \cdot \Delta P_i (i = x, y, z) \geq \frac{\hbar}{2}$$

### 4.1.3 Schrödinger-Gleichung

- Ziel:

Bestimmung der Grundgleichung zur Beschreibung der Bewegung von *waveicals*

Darstellungsmöglichkeiten der Wellenfunktion für ein freies Teilchen in Analogie zu einer elektromagnetischen Welle:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \omega = 2\pi\nu, \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- klassisches freies Teilchen:  $E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
- Ebene Welle, die sich in  $x$  Richtung ausbreitet:

Reelle Darstellung:  $\sin(\omega t - kx), \quad \cos(\omega t - kx)$

$$\begin{aligned}
&\text{komplexe Darstellung } e^{-i(\omega t - kx)}; & e^{i(\omega t kx)} \\
&e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, & e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha \\
&\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, & \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\
&e^{-i(\omega t - kx)} = \cos(\omega t - kx) - i \sin(\omega t - kx) \\
&e^{i(\omega t - kx)} = \cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx)
\end{aligned}$$

Komplexe Wellen ist lineare Kombination reeller Wellen mit komplexen Koeffizienten.

Welche Darstellung ist brauchbar?

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad \text{soll endlich bleiben}$$

Wir betrachten die Überlagerung von zwei reellen, in entgegengesetzte Richtung laufenden, ebenen Wellen:

$$\begin{aligned}
\psi &= \sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx) \\
&= 2 \sin(\omega t) \cos(kx) && \text{stehende Welle}
\end{aligned}$$

Kaum befriedigenden Lösung, da für  $t = \frac{n\pi}{\omega}$ ,  $n = 0, 1, 2$  die Welle überall periodisch verschwindet!

Überlagerung der komplexen Welle:

$$\begin{aligned}
\psi &= e^{-i(\omega t - kx)} + e^{-i(\omega t + kx)} = e^{i(\omega t)} \underbrace{\left[ e^{ikt} + e^{-ikt} \right]}_{2 \cos kx} \\
&= 2e^{-i\omega t} \cos kx
\end{aligned}$$

Verschwindet niemals für alle  $x$   
 $\Rightarrow$  komplexe Darstellung akzeptabel

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= Ae^{-i(\omega t - kx)} && \text{Bewegung in positiver } x\text{-Richtung} \\
\psi(x, t) &= Ae^{-i(\omega t + kx)} && \text{Bewegung in negativer } x\text{-Richtung}
\end{aligned}$$

Test: Zusammenhang zwischen zeitlicher und räumlicher Ableitung der Wellenfunktion

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= Ae^{-i(\omega t - kx)} = Ae^{i\left(\frac{\sqrt{2mE}\hbar x}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)} \\
\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i\frac{E}{\hbar} \cdot \psi && \Rightarrow E\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}}
\end{aligned}$$

Wellengleichung für freies Teilchen *Schrödinger-Gleichung* (Nobelpreis 1933)

- Interpretation der Lösung der Schrödinger Gleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit} \\ \text{für das Teilchen im} \\ \text{Intervall } x \text{ und } dx + x \\ \text{gefunden zu werden} \end{array} \right\} = |\psi(x, t)|^2 dx$$

- Mit Intensität  $|\psi|^2 = \psi\psi^* = (\text{Re}\psi)^2 + (\text{Im}\psi)^2$
- Normierung:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$  (Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo im ganzen Raum zu finden)
- Freies Teilchen:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 |e^{i(kx-\omega t)}|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dx = \infty$
- Im Raum lokalisiert  $\Rightarrow$  Wellenfunktion normierbar

$$|A|^2 \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} dx = \Delta x |A|^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

**Beispiel.** •  $\Delta x = 10m$  Heisenberg  $\Rightarrow \Delta p \simeq \frac{\hbar}{\Delta x} = 7 \cdot 10^{-35} \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$

sehr geringe Impulsunschärfe  $\Rightarrow$  praktisch keine Begrenzung der Bestimmung der Impulse von Elektronen

- Elektron mit Geschwindigkeitsunschärfe  $\Delta v \simeq 10^{-4} \frac{m}{s} = \frac{\Delta p}{m}$

Freies Teilchen:

$$\psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)} = \begin{matrix} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{matrix} A \cdot e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)}$$

Bewegung in  $x$  Richtung

$$\psi(x, t) := A \cdot e^{-i(\omega t + kx)} = A \cdot e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} + \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)}$$

*Schrödinger-Gleichung*

#### 4.1.4 Wellenpakete

Wellenpaket ( $\hat{=}$  *wavicle*) hat große Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem kleinen Raumbereich. Wahrscheinlichkeit ist nahezu Null im restliche Raum.

- Folie: Konstruktion von Wellenpaketen

### Konstruktion von Wellenpaketen

Überlagerung von Wellenpkt. mit unterschiedlichen Wellenvektoren  $k$

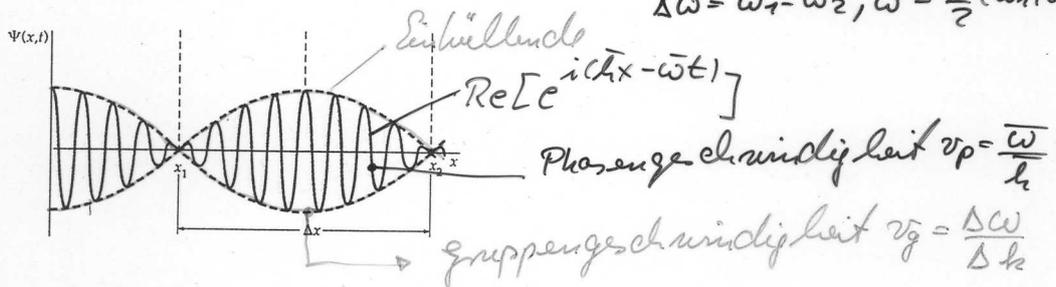
a) Überlagerung von 2 Wellenpkt mit gleicher Amplitude

$$\psi(x,t) = A_0 \left[ e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \right]$$

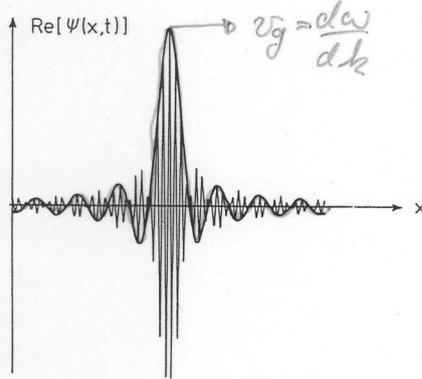
$$= 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) e^{i(\bar{k} x - \bar{\omega} t)}$$

$$\Delta k = k_1 - k_2; \quad \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$



b) Überlagerung von Wellenpkt. mit Verteilung im Intervall  $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$ ;  $k_0 \gg \Delta k$



$$\psi(x,t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

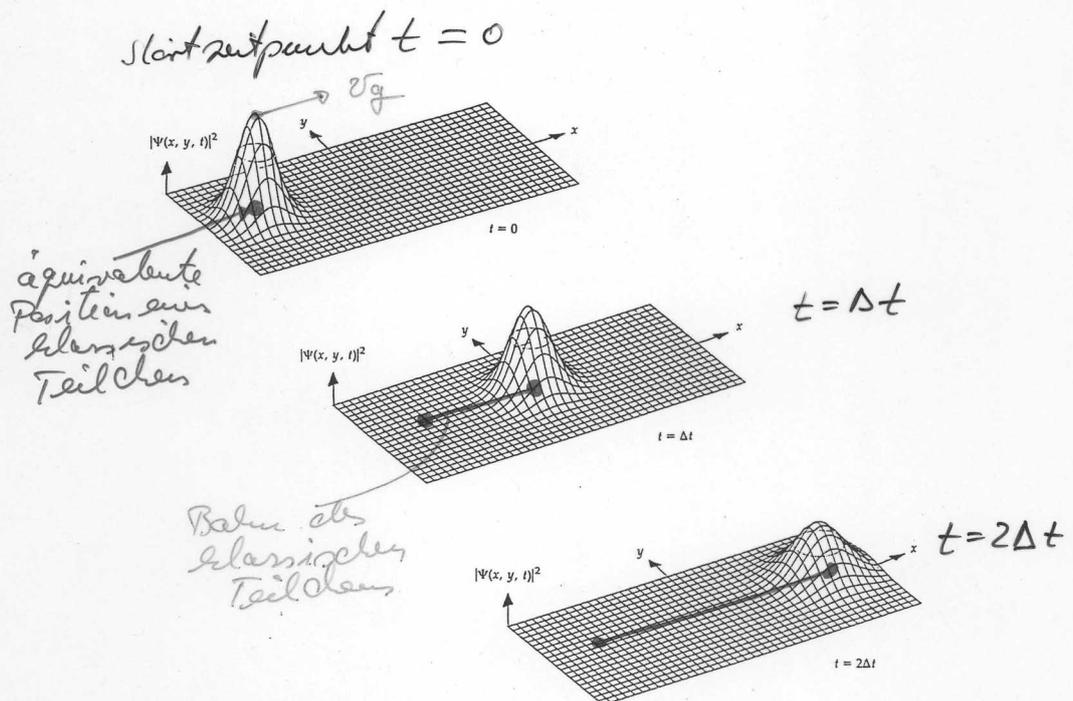
Verteilungsfkt  
 $A(k)$

Übung:  $\Rightarrow \psi(x,t) = A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{- \Delta k}^{+ \Delta k} e^{i(x - \frac{d\omega}{dk} t) \alpha} d\alpha$

$$\approx A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{2 \cdot \sin\left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - x\right) \Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk} t - x}$$

- Folie: Das Zerfliegen von Wellenpaketen

Das "Zerfließen" von Wellenpaketen  
 Evolution eines Wellenpakets mit der Zeit



Ortsunschärfe des Wellenpakets wächst mit der Zeit, d.h. die räumliche Ausdehnung der Wellengruppe nimmt zu  
 Grund: Dispersion der de Broglie'schen Wellen im Vakuum

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$E = \hbar \omega$$

$$p = \hbar k$$

Gruppengeschwindigkeit:  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v_{\text{cl. Teilchen}}$

- Folie:

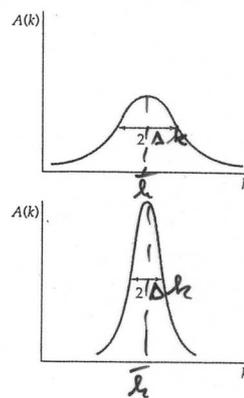
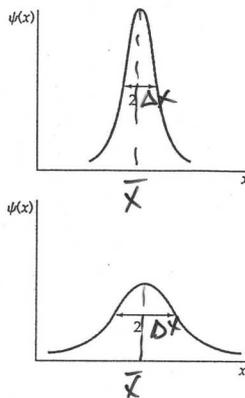
Die Heisenberg'schen Unschärferelationen

Wellenpaket im Ortsraum  $\psi(x,t) = \int A(k) e^{i(\hbar k x - \omega t)} = \int A(p) e^{\frac{i}{\hbar}(p x - E t)} dp$

Zwischen der Breite der Orts- und Impulsverteilung besteht ein Zusammenhang  $\Rightarrow$  aus Fourier-Theorem

Ortsverteilung

Impulsverteilung



$\Delta x$  klein  
 $\Rightarrow \Delta p$  groß  
und  
umgekehrt

$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$   
für Gauß-  
förmige  
Wellenpakete

$\Rightarrow$  Unschärferelationen für Ort und Impuls  
 $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$  für Gauß-förmige Wellenpakete

präziser  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$   
 $\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$   
 $\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$  } Heisenberg'schen Unschärferelationen für Ort und Impuls

Unschärferelation für Zeit und Energie:

$$\psi(x,t) = \int A(E) e^{\frac{i}{\hbar}(p x - E t)} dE$$

$\Delta t$  klein  $\Rightarrow \Delta E$  groß und umgekehrt

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Die *Heissenberg'sche Unschärferelation*

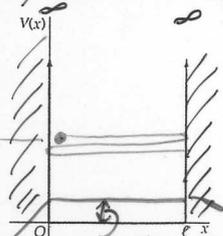
$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Konsequenzen der Unschärferelationen für gebundene Zustände

räumliche Einschränkung  $\Rightarrow$  Nullpunktsenergie

z.B.

a) 1D Kastenpotential

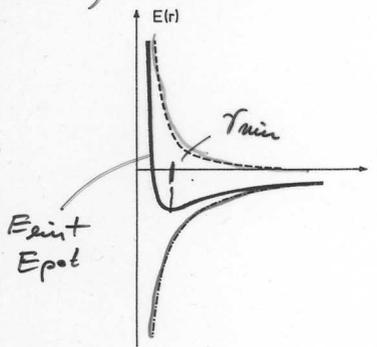


QM verboten Nullpunktsenergie  $\Delta p \geq \frac{h}{2l}$

no lin. Energie  
 $E = E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\bar{p} \pm \Delta p)^2}{2m} \approx \frac{\Delta p^2}{2m}$

$\geq \frac{h^2}{8ml^2}$  *seartes Ergebnis für Grundzustand*

b) Wasserstoff-Atom



hat lin. und pot. Energie  
 $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2me} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

$\approx \frac{h^2}{8me r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{Min!}$

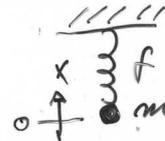
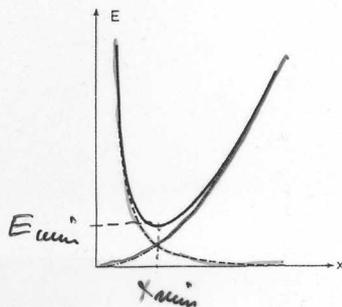
$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{2r} \quad \frac{dE}{dr} = \frac{h^2}{4\pi m e} (-2) r^{-3} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} (-1) r^{-2} = 0$

$\Rightarrow r_{\text{min}} = \frac{h^2 \pi \epsilon_0}{m e^2} \Rightarrow$

$E_{\text{min}} = -\frac{1}{\pi^2} \frac{m e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$

*seartes Ergebnis*

c) 1D harmonischer Oszillator



Kraft  $F = -fx$

Schwingungsfrequenz  $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$

$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$\approx \frac{h^2}{8m x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \text{Min!}$

$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{2x} \quad \frac{dE}{dx} = \frac{h^2}{4m} (-2) x^{-3} + \frac{1}{2} m \omega^2 (2) x = 0$

$\Rightarrow x_{\text{min}} = \frac{h}{2m\omega} \Rightarrow E_{\text{min}} = 2\pi \frac{\hbar \omega}{2}$   
*seartes*

: Konsequenzen der Unschärferelation für gebundene Zustände

## 4.2 Gebundene Teilchen

### 4.2.1 Teilchen im unendlich (???) Kastenpotential

(Skizze Kastenpotential, Breite  $L$ , höhe  $\infty$ )

- Klassische Bewegung:

Teilchen mit Impuls  $p = \sqrt{2mE}$  bewegt sich zwischen den Wänden hin und her (Reflexion an den Wänden), keine *Energiequantisierung*

- Quantenmechanik:

Teilchen ist Materiewelle, Wellenausbreitung in  $+$  und  $-x$  Richtung möglich.

Ansatz Superpositionsprinzip: Überlagerung der Bewegungen in  $+$  und  $-x$  Richtungen.

$$\psi(x, t) = A \cdot e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)} + B \cdot e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} + \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)}$$

Randbedingungen:  $\infty$  höhe der Wände  $\Rightarrow$  Wahrscheinlichkeit außerhalb Kasten muss verschwinden.

$$x = 0 \Rightarrow \psi(0, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$x = L \Rightarrow \psi(L, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{Aus 4.1 folgt } A \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}} + B \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Aus 4.2 folgt } A \cdot e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} - \sqrt{2mE}\frac{L}{\hbar}\right)} + B \cdot e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} + \sqrt{2mE}\frac{L}{\hbar}\right)} = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{Aus 4.3 folgt: } A = -B$$

Einsetzen in 4.4:

$$\begin{aligned}
 A \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \underbrace{\left( e^{i\sqrt{2mE}\frac{L}{\hbar}} - e^{-i\sqrt{2mE}\frac{L}{\hbar}} \right)}_{=0} &= 0 \\
 \Rightarrow 2i \sin \left( \sqrt{2mE}\frac{L}{\hbar} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{\sqrt{2mEL}}{\hbar} &= n \cdot \pi \quad n = 0, 1, 2, 3. \\
 \Rightarrow k \cdot L = n \cdot \pi \Rightarrow k' &= \frac{n\pi}{L} \\
 E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} &= \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}
 \end{aligned}$$

#### 4.2.1.0.1 Energieniveauewerte (Skizze Energieniveaus)

Wie sehen die zugehörigen Wellenfunktionen aus?

$$\begin{aligned}
 \psi_n(x, t) &= A \cdot \left( e^{-i\left(\frac{En t}{\hbar} - \frac{n\pi}{L}x\right)} - e^{-i\left(\frac{En t}{\hbar} + \frac{n\pi}{L}x\right)} \right) \\
 &= A \cdot e^{-i\frac{En t}{\hbar}} \underbrace{\left( e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right)}_{=2i \sin \frac{n\pi x}{L}} \\
 &= 2iA \cdot e^{-i\frac{En t}{\hbar}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

#### 4.2.1.0.2 Eigenzustand Graphische Darstellung: ( $t = 0$ ) (Skizzen für $L = \frac{\lambda}{2}$ , $L = \lambda$ und $L = \frac{3\lambda}{2}$ )

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

*Intensität* oder *Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, t)|^2 &= \psi_n(x, t) \cdot \psi_n(x^*, t) \\
 &= 2iA \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} (-2i) \cdot A^* e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin \frac{n\pi x}{L} \\
 &= |2iA|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \quad \text{nicht von der Zeit abhängig}
 \end{aligned}$$

Wenn  $|\psi_n|$  nicht von der Zeit abhängt, wird der Zustand als *stationär*

bezeichnet. Wie sieht die *normierte Wellenfunktion* aus?

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x, t)|^2 dx = 1 \\
 \Rightarrow & \int_0^L |2iA|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1 \\
 \Rightarrow & |2iA|^2 \cdot \underbrace{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx}_{\frac{L}{2}} = 1 \\
 & |2iA|^2 \cdot \frac{L}{2} = 1 \\
 & |2iA| = \sqrt{\frac{2}{L}} \\
 \Rightarrow & \boxed{\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot e^{-\frac{i n^2 \pi^2 \hbar}{2mL^2} t} \sin \frac{\pi n x}{L}}
 \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Schwingungsgleichung mit Potential

- Erweiterung:

Bewegung des Teilchens unterliege einem Potential, d.h. es wirken äußere Kräfte.

- Spezialfall

Potential  $U_0$  sei konstant.

- Gesamtenergie:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U_0$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2m(E - U_0)}$$

$\Rightarrow$  Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = e^{-i \left( \frac{Et}{\hbar} - \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x \right)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) &= -i \frac{E}{\hbar} \psi(x, t) \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} \psi(x, t) \\
\Rightarrow E\psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = L\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \\
E\psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U_0\psi(x, t) \\
\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U_0\psi(x, t) &= i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

Verallgemeinerung:  $U_0 \Rightarrow U(x)$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$	Zeitabhängige Schrödingergleichung
---	------------------------------------

Qualitative Betrachtungen:

Potential  $U(x)$  soll von anziehender Kraft erzeugt werden!

- Einschränkungen des Teilchens in einem bestimmten Raumbereich.
- Es gibt stationäre Zustände mit quantisierten Energien und stehenden Wellen als Lösungen.

**Beispiel.** *Kastenpotential* mit  $\infty$  hohen Wänden, stehende Wellen mit definierten Wellenlängen.

Wellenlänge:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U(x))}}$ , wenn  $U(x)$  schwach mit Ort variiert

$\Rightarrow$  Konzept der Wellenlänge verletzt.

(Skizze Harmonische Wellenfunktion/Schrödinger-Gleichung)

Obwohl der räumlichen Verlauf der Wellenfunktion kompliziert sein mag, die Zeitabhängigkeit für stationäre Zustände ist einfach

$$\psi(x, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \psi(x)$$

Einsetzen in *Schrödinger-Gleichung* mit Potential liefert:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) \cdot e^{-i \frac{Et}{\hbar}} + U(x)\psi(x) \cdot e^{-i \frac{Et}{\hbar}} = E\psi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$$

$\boxed{\hbar^2} 2m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + U(x) \cdot \psi(x) = E \psi(x)$  Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung  
Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= \psi(x, t) + \psi^*(x, t) \\ &= |\psi(x)|^2 \end{aligned}$$

Zeitunabhängig für stationäre Zustände

### 4.2.3 Beispiele für exakte Lösungen der stationären Schrödinger Gleichungen

#### 4.2.3.1 Teilchen im eindlichen Potentialtopf

(Skizze Potentialtopf mit Breite  $L$ )

$0 \leq x \leq L$   $E > U(x) \Rightarrow$  Lösungen sind in  $-x$  und  $+x$  Richtung laufende Wellen.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} \\ k &= \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \end{aligned}$$

Randbedingung.  $x = 0$ ,  $\psi(0) = 0 \Rightarrow B = -A$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \cdot (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= 2iA \cdot \sin(kx) \\ &= 2iA \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) \\ x > L : &= \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U_0 \psi(x) = E \psi(x) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^2} &= \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)}_{K^2} \cdot \psi(x) \end{aligned}$$

1. Fall  $E > U_0 \Rightarrow k^2$  negativ  $\Rightarrow k$  imaginär  
 $\Rightarrow$  Lösungen sind laufende Wellen

$$\psi(x) = C' \cdot e^{i|k|x} + D' \cdot e^{-i|k|x}$$

2. Fall  $E < U_0 \Rightarrow k^2$  positiv

$$\psi(x) = C \cdot e^{-kx} = \text{Lösung}$$

Randbedingungen am Punkt  $x = L$ ?

Wellenfunktion und ihre Ableitung aus den Bereichen  $0 \leq x \leq L$  und  $x > L$  müssen stetig in einander übergehen:

$\frac{d\psi}{dx}$  stetig und  $\psi(x)$  stetig!

Begründung:

1. Falls  $\frac{d\psi}{dx}$  Sprung (Unstetigkeit) hat  $\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}$  divergent nicht konsistent mit Schrödinger-Gleichung
2. Falls  $\psi(x)$  Sprung hat  $\Rightarrow \frac{d\psi}{dx}$  divergiert  $\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}$  divergiert

Einsetzen in Wellenfunktion bei  $x = L$

$\psi$  stetig:  $2iA \sin(kL) = C \cdot e^{-kL}$

$\frac{d\psi}{dx}$  stetig:  $2iA \cos(kL) = -kC e^{-kL}$

$$\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\psi} \Rightarrow \frac{k \cdot \cos(kL)}{\sin(kL)} = -\frac{1}{\tan(kL)} = k \cdot \cot(kL)$$

wobei  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  und  $\mathcal{K} = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$   
implizierte Gleichung für Lösungen von  $E$ .

Quadrieren:

$$\begin{aligned} k^2 \underbrace{\cot^2 kL}_{\frac{1}{\sin^2 kL} - 1} &= \mathcal{K}^2 \\ \frac{k^2}{\sin^2 kL} - k^2 &= \mathcal{K}^2 \\ \Rightarrow \sin^2 kL &= \frac{k^2}{k^2 + \mathcal{K}^2} \\ &= \frac{k^2}{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}} \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2mU_0} \\ \Rightarrow \sin kL &= \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{3mU_0}} \cdot k \\ x = kL \\ \sin x &= \pm \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0}} \cdot x \end{aligned}$$

(Sizze Lösungen)

keine erlaubte Lösungen in Bereichen  $0 < kL \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $\pi < kL \leq \frac{3\pi}{2}$ ;  $2\pi < kL < \frac{5\pi}{2}$ ; ...

$k \cdot \cot ikl = k^j$  Gefordert  
 $\cot kL = -\frac{\kappa}{L}$  für Lösungen.  
 Quadrieren eliminiert - Zeichen  
 $\Rightarrow$  Lösungen mit  $\cot kL = +\frac{\kappa}{k}$  unphysikalisch

Ergebnisse für Spezialfall mit  $U_0 = \frac{g\pi\hbar^2}{2mL^2}$   
 (Skizze Ergebnisse)

### 4.2.3.2 Der Tunneleffekt

Durchdringen einer Barriere aus potentieller Energie  
 (Skizze Rechteckbarriere)  
 Grobe Abschätzung für eine „dicke“ oder „hohe“ Barriere

$$\psi(\text{in Barriere}) \propto e^{-\kappa x}, \quad e^{+\kappa x}$$

$$\psi(x=a) \propto e^{-\kappa a}$$

$$\psi(x=b) \propto e^{-\kappa b}$$

$$\text{Transmission: } T = \frac{e^{-\kappa b}}{e^{-\kappa a}} = e^{-\kappa(b-a)}$$

$$\text{Transmissionswahrscheinlichkeit: } P = |T|^2 \cong e^{-2\kappa(b-a)}$$

Exaktes Ergebnis:

$$\begin{array}{ll}
 x \leq a & \psi(x) = e^{i\kappa x} + Re^{i\kappa x} \\
 a \leq x \leq b & \psi(x) = ce^{-\kappa x} + \cong D \cdot e^{+\kappa x} \\
 x \geq b & \psi(x) = T \cdot e^{i\kappa x}
 \end{array}$$

Randbedingungen:

Stetigkeit von  $\psi(x)$  und  $\frac{d\psi(x)}{dx}$  an jeder Grenzfläche  $\Rightarrow$  4 Gleichungen

$$x = ae^{i\kappa a} + R \cdot e^{-i\kappa a} = Ce^{-\kappa a} + D \cdot e^{\kappa a} (\psi \text{ Stetig}) \quad (4.5)$$

$$i\kappa e^{i\kappa a} - R \cdot i\kappa e^{-i\kappa a} = -C \cdot e^{-\kappa a} + d \cdot e^{\kappa a} \left( \frac{d\psi}{dx} = \text{konst} \right) \quad (4.6)$$

$$Ce^{-\kappa b} + D \cdot e^{\kappa b} = T \cdot e^{i\kappa b} (\psi = \text{konst}) \quad (4.7)$$

$$-C\kappa e^{-\kappa b} + D\kappa \cdot e^{\kappa b} = T i\kappa e^{i\kappa b} \quad (4.8)$$

Aus ?? + ?? folgt:

$$D = \frac{e^{-\kappa a}}{2\kappa} [(\kappa + i\kappa)e^{i\kappa a} + (\kappa - i\kappa)Re^{-i\kappa a}] \quad (4.9)$$

Aus ?? - ?? folgt:

$$C = \frac{e^{\kappa a}}{2\kappa} \{(\kappa - i\kappa)e^{i\kappa a} + (\kappa + i\kappa)Re^{-i\kappa a}\} \quad (4.10)$$

4.9 und 4.10 in 4.7 und 4.8 einsetzen  $\Rightarrow$  2 Gleichungen für  $R$  und  $T \Rightarrow$  Lösung für  $T$

$$T = \frac{-4ik\kappa e^{i\kappa(b-a)} e^{-ik(b-a)}}{(\kappa - ik)^2 - (\kappa + ik)^2 e^{-2\kappa(b-a)}}$$

$$P = |T|^2 = \frac{16k^2\kappa^2}{|(\kappa - ik)^2 - (\kappa + ik)^2|^2} e^{-2\kappa(b-a)}$$

Spezialfälle:

1. Dicke Barriere

$$e^{-\kappa(b-a)} \ll 1 \Rightarrow \text{2. Term in Nenner Vernachlässigt **Fehlt was**}$$

2. Dünne Barriere  $e^{-2\kappa(b-a)} \simeq 1$

$$\Rightarrow P \simeq \frac{16k^2\kappa^2}{|(\kappa - ik)^2 - (\kappa + ik)^2|^2} e^{-2\kappa(b-a)} \simeq e^{-2\kappa(b-a)}$$

3. Beliebige Barriere (Skizze)

$$P = P_1 P_2 \dots$$

$$\simeq e^{-2\kappa\Delta x_1} \cdot e^{-2\kappa\Delta x_2} \dots$$

$$\simeq e^{-2\sum_i \kappa\Delta x_i} = e^{-2\int_a^b \kappa(x) dx}$$

$$= e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx}$$

### 4.2.3.3 Der eindimensionale harmonische Oszillator

Klassische Betrachtung

$$F = \boxed{-fx = m\ddot{x}} \quad \text{Schwingungsgleichung}$$

$$x = A \sin(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

$$\text{potentielle Energie : } U = \int F dx = f \int x dx = \frac{1}{2} f x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

(Skizze Potential ( $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ ))

$$\begin{aligned} P_{kl}(x) dx &= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{dx}{v} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{dx}{A \omega \cos(\omega t)} \\ &= \frac{dx}{2\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega t)}} = \frac{dx}{2\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$P_{kl} = \frac{1}{2\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}}$$

Aufstellen der statischen Schrödinger Gleichung mit Potential

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \underbrace{U(x)}_{\frac{1}{2}m\omega^2 x^2} \psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) &= E\psi(x) \end{aligned}$$

Umformen und Argumente von  $\psi$  weglassen

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - E \right) \psi = 0$$

Substitution:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \\ \varepsilon &= \frac{2E}{\hbar\omega} \\ \Rightarrow \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2\psi}{dy^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar} \frac{y^2}{\frac{m\omega}{\hbar}} \psi + \frac{m^2\omega^2}{\hbar} \frac{E}{\hbar\omega} \psi &= 0 \quad \left| \frac{\hbar}{m\omega} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + (\varepsilon - y^2)\psi = 0$$

Randbedingungen (aus Potentialform)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) \rightarrow 0$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$$

Näherungslösung für große  $y$ :

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi_0(y)}{dy^2} - y^2 \psi_0(y) = 0$$

$$\text{Lösung: } \psi_0(y) \simeq e^{\frac{y^2}{2}}$$

Ansatz für Lösung der Schrödinger Gleichung für beliebige  $y$

$$\psi(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \mathcal{H}(y)$$

Einsetzen von  $\psi(y)$  in Schrödinger Gleichung  $\Rightarrow$  Differentialgleichung für  $\mathcal{H}(y)$

$$\boxed{\frac{d^2 \mathcal{H}}{dy^2} - 2y \frac{d\mathcal{H}}{dy} + (\varepsilon - 1)\mathcal{H} = 0}$$

Differentialgleichungen wird durch *Potenzreihenansatz (Polynomansatz)* gelöst

Lösungen:

- 0. Grades

$$\mathcal{H}_0 = a \Rightarrow a(\varepsilon - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 0} \quad a \neq 0$$

- 1. Grades

$$\mathcal{H}_1 = ay + b \Rightarrow$$

$$-2ya + (\varepsilon - 1)(ay + b) = 0$$

$$ay(\varepsilon - 3) + b(\varepsilon - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 3} \quad b = 0$$

- 2. Grades

$$\mathcal{H}_2 = ay^2 + by + c$$

$$2a - 2y(2ay + b) + (\varepsilon - 1)(ay^2 + by + c) = 0$$

$$-4\left(ay^2 + \frac{b}{2}y - \frac{a}{2}\right) + (\varepsilon - 1)(ay^2 + by + c) = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 5} \quad b = 0; \quad c = -\frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= (2n + 1); n \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2E}{\hbar\omega} \\ \Rightarrow E_n &= \frac{\hbar\omega}{2}(2n + 1) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ E_0 &= \frac{\hbar}{2} \quad \text{Nulpunktenergie}\end{aligned}$$

(Skizze Energieniveaus)

Wellenfunktion = *Hermiteische Polynome*

Konvention: Koeffizient der höchsten vorkommenden  $y$ -Polynome wird gleich  $2^n$  gesetzt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= 2^0 \\ \mathcal{H}_1 &= 2^1 y \\ \mathcal{H}_2 &= 2^2 y^2 - 2 \\ \mathcal{H}_3 &= 2^3 y^3 - 12y \\ \mathcal{H}_4 &= 2^4 y^4 - 48y^2 + 12 \\ &\vdots \\ \mathcal{H}_n(y) &= (-1)^n e^{y^2} \cdot \frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n}\end{aligned}$$

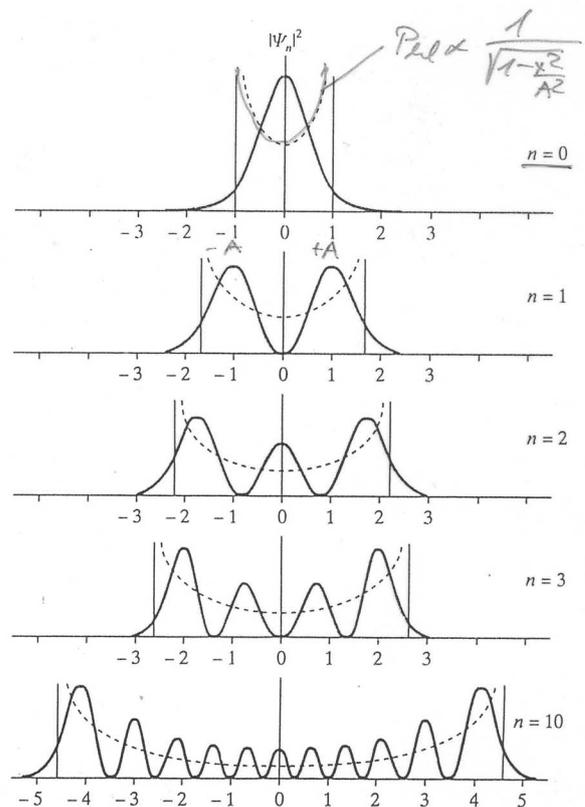
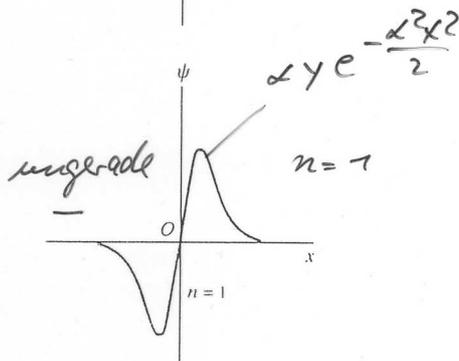
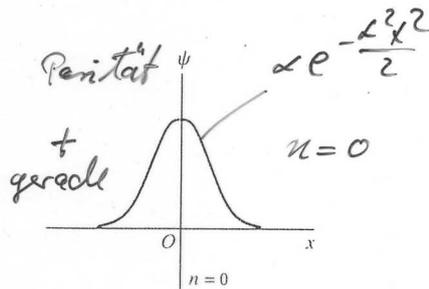
Wellenfkt. des 1D harmonischen Oszillators

$$\psi_n(y) \propto e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)$$

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x) \quad \text{normiert}$$

$$\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$C_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}}$$



36.16 Die Wellenfunktion für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators.

### 4.2.4 Die formale Theorie der Quantenmechanik

#### 1. Definition

Wellenfunktion  $\psi(x, y, z) = \psi(\vec{r})$  Allgemeiner Fall einer Bewegung im Raum

$$\text{Wahrscheinlichkeitsdichte } P = |\psi(\vec{r})|^2 = \psi^*(\vec{r}) \cdot \psi(\vec{r})$$

Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im unendlichen Volumen  $V$  zu finden

$$P_v = \int_V |\psi(\vec{r})|^2 dx, dy, dz = \int_v |\psi(\vec{r})|^2 dV$$

$$\text{Normierung } \int_{\text{ges. Raum}} |\psi(\vec{r})|^2 dV = 1$$

#### 2. Operatoren und Eigenwerte

$$\text{Klassisch 1D: } \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{kin}} + \underbrace{U(x)}_{\text{pot.}} = \underbrace{E}_{\text{ges. Energie}}$$

$$\text{Quantenmechanik } \underbrace{\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U \right)}_{\text{Eigenoperator=Hamilton Operator } \mathcal{H}} \cdot \underbrace{\psi(x)}_{\text{Eigenfunktion}} = \underbrace{E}_{\text{Eigenwert}} \psi(x)$$

$$\mathcal{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{Eigenwertgleichung}$$

Konstruktionsvorschrift für Operatoren:

Jeder physikalischen Größe  $A(\vec{r}, \vec{p})$ , welche eine Funktion von Ort und Zeit eines Teilchens ist, entspricht einem *Quantenoperator*. Diesen erhält man, wenn man  $\vec{p}$  durch  $-i\hbar\nabla = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  ersetzt, das heißt  $A(\vec{r}, -i\hbar\nabla)$

**Beispiel.** Gesamtenergie (Hamiltonfunktion)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{kl} &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \\ p_x &\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ p_y &\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ p_z &\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \text{ bzw.} \\ \vec{p} &\Rightarrow -i\hbar \nabla \\ \nabla &= \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \Rightarrow \mathcal{H} &= \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \\ &= \frac{-\hbar}{2m} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\text{laplace-Operator } \Delta}\end{aligned}$$

Eigenwertgleichung

$$\mathcal{H}\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial z^2} \right) + U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

3D Zeitabhängige Schrödinger Gleichung

Tabelle Quantenoperatoren

<i>Gre</i>	<i>Klassdef</i>	<i>Quantenoperator</i>
<i>Ort</i>	$\vec{r}$	$\vec{r}$
<i>Impuls</i>	$\vec{p}$	$-i\hbar \nabla$
<i>Drehimpuls</i> $r \times p$	$r \times \text{impuls}$	
<i>kinEnergie</i>		
<i>GesEnergie</i>		
<i>Paritt</i>		

Eigenfunktion und Eigenwerte verschiedener Operatoren

(a) kin Energie (1D)

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) &= E\psi(x) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + h^2 \psi &= 0 \\ \kappa^2 &= \frac{2mE}{\hbar}\end{aligned}$$

Lösungen für  $E < 0$ :  $e^{ikx}$  und  $e^{-ikx}$  bzgl  $E_{kin}$  entartet  
 Lösungen sind Orthogonal zueinander

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{-ikx})^x e^{ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{2ikx} \underset{k \neq 0}{=} 0$$

Beide Lösungen sind auch Eigenfunktionen des Impulsoperators:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{\pm ikx} = \underbrace{\mp \hbar k}_{\text{Impulswerte}} e^{\pm ikx}$$

$e^{\pm ikx}$  sind simultane Eigenfunktionen der kin. Energie und des Impulsraumes

3. Eigenschaften der Operatoren in der QM gehörende Operatoren zu einer Klasse die *Hermitesch (Selbstadjungiert)* genannt wird

$$\int \Phi_1^* (A\Phi_2) dV = \int A^* \Phi_1^* \Phi_2 dV = \int (A\Phi_1)^* \Phi_2 dV$$

Die Eigenwerte hermitescher Operatoren sind reell und ihre Eigenfunktion orthogonal

$$A\psi_i = a_i\psi_i (a_i = \text{reell})$$

$$\int_V \psi_i^* \psi_j dV = \sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j & \text{Orthogonal} \\ 1 & i = j & \text{Normierung} \end{cases}$$

Operatoren sind linear:  $A(\alpha\psi + \beta\Phi) = \alpha A\psi + \beta B\Phi$

- Summe von Operatoren  $C = A + B$   
 $C\psi = (A + B)\psi = A\psi + B\psi$
- Produktoperatoren  $C = A \cdot B$   
 $C\psi = (A \cdot B)\psi = A(B\psi)$  Achtung im Allg NICHT:  $AB\psi = B \cdot A\psi$
- wichtig: Kommutator:  $[A, B] = AB - BA$  Zwei Operatoren sind genau dann vertauschbar, wenn  $[A, B] = 0$  gilt.  $A$  und  $B$  haben dann auch einen gemeinsamen Satz von Eigenfunktionen

4. Messwerte und Erwartungswert

wenn der Zustand eines System der Funktion  $\Phi(\vec{r})$  entspricht, ist der

Mittel- oder Erwartungswert einer Physikalischen Größe  $A(\vec{r}, \vec{p})$  gegeben durch

$$\bar{A} = \int_{ges. Raum} \Phi^* A(\vec{r}, -i\hbar\nabla) \Phi dV$$

bzw.

$$\bar{A} = \frac{\int \Phi^+ A \Phi dV}{\int \Phi^* \Phi dV}$$

- (a) i.  $\Phi$  sei Eignefunktion von  $A$ , d.h.  $A\Phi = a\Phi$

$$\Rightarrow \bar{A} = \frac{\int \Phi^* a \Phi dV}{\int \Phi^* \Phi dV} = a$$

Messwerte sind *scharf* definiert!

- ii.  $\Phi$  sei *keine* eigenfunktion von  $A$   
 Superpositionsprinzip.  $\Phi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots = \sum_n c_n\psi_n$  (Eigenfunktion)

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int \left( \sum_m c_m \psi_m \right) \cdot A \left( \sum_n c_n \psi_n \right) dV \\ &= \int \left( \sum_m c_m \psi_m \right)^* \cdot \left( \sum_n c_n a_n \psi_n \right) dV \\ &= \sum_{m,n} a_n c_m^* c_n \int \underbrace{\psi_m^* \psi_n}_{\delta_{m,n}} dV \\ \Rightarrow \bar{A} &= \sum_n a_n |c_n|^2 \end{aligned}$$

(Skizze  $|c_n|^2$ )

im Allgemeinen kein scharf definierter Messwert, da Verteilung um  $\bar{A}$  existiert, d.h. es gibt *unschärfe*

Zwei Größen, die den Operatoren  $A$  und  $\hat{B}$  entsprechen, sind nur dann *gleichzeitig* genau messbar, wenn der Kommutator der Operatoren verschwindet. Wenn nicht  $\Rightarrow$  *Unschärferelation*

**Beispiel.** Orts und Impulsoperator

$$\begin{aligned} \vec{r}; \quad \vec{p} &= -i\hbar\nabla \\ [x, P_x] \Rightarrow [x, P_x] \psi &= x \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) (x\psi) \\ &= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x\psi)}_{\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x}} \\ [x, P_x] &= i\hbar = [y, P_y] = [z, P_z] \\ [x, P_y] &= [x, P_z] = [y, P_x] = 0 \end{aligned}$$

Impulsoperator und Operator der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} \left[ \frac{px^2}{2m}, P_x \right] \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \right) \\ &= \frac{i\hbar^3}{2m} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - i \frac{\hbar^3}{2m} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 \end{aligned}$$

## 4.3 Das Wasserstoffatom

### 4.3.1 Die Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten

- H-Atom: Einelektronenproblem, Zentralkraftproblem mit *Coulomb-Potential*

$$\mathcal{H}_{kl} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \underbrace{U(\vec{r})}_{-\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Transformation  $P \Rightarrow -i\hbar\nabla$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial z^2} \right) + U(r) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten (Skizze)  
Geometrie

$$x = r \cos(\varphi) \sin \vartheta$$

$$y = r \sin(\varphi) \sin(\vartheta)$$

$$z = r \cos(\vartheta)$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\text{sei } x = f(u, v, w)$$

$$y = g(u, v, w)$$

$$z = h(u, v, w)$$

$$\Rightarrow \Delta_{uvw} = \frac{1}{q_u q_v q_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{q_v q_w}{q_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{q_u q_w}{q_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{q_v q_u}{q_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}$$

$$q_u^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

$$q_v^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

$$q_w^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)^2$$

$$\Delta_{r,\vartheta,\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \right) \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}}$$

$$\text{zu Zeigen } -\frac{\tilde{L}^2}{\hbar^2} = -\frac{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}{\hbar}$$

Drehimpuls in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{kl} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{L} &= -i\hbar \vec{r} \times \nabla \\ L_z &= -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \vartheta \cos \varphi) = r \sin \vartheta (-\sin \varphi) = -y \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \vartheta \sin \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi = x \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}L_x &= -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_y &= -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}$$

**ohne Beweis:**

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_{r,\vartheta,\varphi} + d(r) =$$

$$= \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\text{Operator der } E_{kin} \text{ f\u00fcr Radialbewegung}} + \underbrace{\frac{\vec{L}^2}{2m_e r^2} + U(\vec{r})}_{\text{Operator der } E_{kin} \text{ f\u00fcr azimutale (transversale) Bewegung}}$$

Operator der  $E_{kin}$  f\u00fcr Radialbewegung    Operator der  $E_{kin}$  f\u00fcr azimutale (transversale) Bewegung

$$[\mathcal{H}, \vec{L}^2] = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung (Betrag)}$$

$$[\mathcal{H}, \vec{L}_z] = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung (z-Komponente)}$$

Es gibt einen Satz von Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}, \vec{L}, L_z$

$$\boxed{\mathcal{H}\psi = E\psi}$$

PRINZIPIELLER LÖSUNGSWEG:

Lösungsansatz:  $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$

Einsetzen in Hamiltonoperator und Multiplizieren mit  $\frac{1}{R\Theta\Phi}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \\ + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{2m_e}{\hbar^2} [E - U(\vec{r})] = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Auflösung der Gleichung

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = f(r, \vartheta)$$

Aus Ansatz:  $\Phi$  ist alleinige Funktion von  $\varphi$

$$\boxed{\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \text{konst} = m^2} \quad \text{Azimutales Problem} \quad (4.12)$$

Mit 4.12 und Gleichung 4.11  $\cdot r^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_e r^2}{\hbar^2} [E - U(\vec{r})] - \xi F(r) &= \beta \\ - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) = \xi(\vartheta) &= -\beta \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \Theta + \beta \Theta = 0} \quad \vartheta \text{ Problem}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} - \frac{\beta}{r^2} R + \frac{2m_e}{\hbar} [E - U(r)] \right) R = 0} \quad \text{radiales Produkt}$$

## 4.3.2 Lösen des Winkelproblems

### 4.3.2.1 Die Lösungen des azimutalen Problems: Raumfester, starrer Rotator

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -m^2 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) &= 0 \\ \text{Lösungen: } e^{\pm im\varphi} \end{aligned}$$

Eigenwertgleichung beschreibt die kräftefreie Bewegung eines Teilchens auf einer Kugeloberfläche

Für den raumfesten starren Rotator ist nur das Auftreten des Teilchens auf dem Schnittkreis der Äquatorebene mit der Kugel zuge???

**Begründung:** Gleichung 4.11 + Randbedingung für starrer Rotator

Kräftefreies Teilchen:  $U(r) = 0$

$$r = a = \text{const}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \sin \vartheta = 1$$

$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}$  verschwinden

$$\mathcal{H} \text{ Operator } \frac{1}{a^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} E = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \underbrace{\frac{2m_e a^2}{\hbar^2} E}_{m \text{ Quantenzahl}} \cdot \Phi = 0$$

- Lösungen:

$$\Phi_m = \alpha \cdot e^{\pm im\varphi} \text{ Rotation im/gegen Uhrzeigersinn}$$

- Randbedingungen

$\Phi_m$  muss nach einer vollen Umdrehung wieder den Ausgangspunkt erreichen

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi+2\pi)}$$

$$\Rightarrow e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Normierung:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^* \Phi_n d\varphi = \delta_{m,n} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2\pi}$$

Energie-EW:

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} m^2 = \frac{L_z^2}{2m_e a^2} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = m \cdot \hbar}$$

**Beweis 1.**

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= E \Phi \\
 \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{d}{d\varphi} \\
 \hat{L}_z^2 &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
 \Rightarrow \frac{\hat{L}_z^2 \Phi}{2m_e a^2} &= E \Phi
 \end{aligned}$$

#### 4.3.2.2 Die Länge des $\vartheta$ Problems: $R$ Raumfreie starrer Rotator

Für den allgemeinen Fall des raumfreien starren Rotators ist die Bewegung der Teilchen auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $a$  zugelassen.

$r = a = \text{const}$   $U(\vec{r}) = 0$ , da kräftefrei,  $\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow 0$   $\mathcal{H}$  Operator 4.11

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \underbrace{\left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]}_{-\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}} Y(\vartheta, \varphi) = E \cdot Y(\vartheta, \varphi)$$

$$\frac{\vec{L}^2}{2m_e a^2} Y = E Y \quad \text{EW-Gleichung für Drehimpuls}$$

Separationsansatz:  $Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$

$$\begin{aligned}
 \Phi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{m_e a^2}{\hbar^2} E \Theta \Phi &= 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{\Phi} \right. \\
 \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \vartheta} \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}_{-m^2} + \underbrace{\frac{2m_e a^2}{\hbar^2} E \Theta}_{\beta = \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}} &= 0 \\
 \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \Theta + \beta \Theta &= 0
 \end{aligned}$$

*Legendre-DGL*: Lösungen sind Potenzreihen in  $\cos(\vartheta)$  oder  $\sin(\vartheta)$

Fallunterscheidungen:

1.  $\Theta = \text{const}$

$$0 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \Theta + \frac{L^2}{\hbar^2} \Theta = 0$$

Für beliebig  $\vartheta$  nur erfüllt, falls  $m = 0 \Rightarrow L^2 = 0$  Lösung für Bahndrehimpuls = 0

2.  $\Theta = f(\sin^n \vartheta)$

(a)  $\Theta = \sin \vartheta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \cos \vartheta) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \sin \vartheta + \frac{L^2}{\hbar} \sin \vartheta &= 0 & | \sin \vartheta \\ \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \cos \vartheta) - m^2 + \frac{L^2}{\hbar^2} \sin^2 \vartheta &= 0 \\ \underbrace{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}_{1 - 2 \sin^2 \vartheta} - m^2 + \frac{L^2}{\hbar^2} \sin^2 \vartheta &= 0 \\ 1 - 2 \sin^2 \vartheta - m^2 + \frac{L^2}{\hbar^2} \sin^2 \vartheta &= 0 \end{aligned}$$

Ein beliebiges  $\vartheta$  erfüllt, falls  $m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$  und  $\frac{L^2}{\hbar^2} = 2$

(b)  $\Theta = \sin^2 \vartheta$

$$\left(-6 + \frac{L^2}{\hbar^2}\right) \cos^2 \vartheta + 2 + m^2 - \frac{L^2}{\hbar^2} = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \text{ und } \frac{L^2}{\hbar^2} = 6$$

(c)  $\Theta = \sin^3 \vartheta \Rightarrow \frac{L^2}{\hbar^2} = 12, \quad m = \pm 3$

(d)  $\Theta = \sin^4 \vartheta \Rightarrow \frac{L^2}{\hbar^2} = 20, \quad m = \pm 4$

3.  $\Theta = f(\cos^4 \vartheta)$

(a)  $\Theta = \cos \vartheta \Rightarrow m = 0, \quad \frac{L^2}{\hbar^2} = 2$

(b)  $\Theta = \cos^3 \vartheta \Rightarrow$  keine Lösung

4.  $\Theta = f(\sin^4 \vartheta \cdot \cos^4 \vartheta)$

(a)  $\Theta = \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \Rightarrow n = \pm 1, \quad \frac{L^2}{\hbar^2} = 6$

$f(t)$	$m$	$\frac{L^2}{\hbar^2}$	$l$
$const$	0	0	0
$\sin \vartheta$	$\pm 1$	2	1
$\sin^2 \vartheta$	$\pm 2$	6	2
$\sin^3 \vartheta$	$\pm 3$	12	3
$\sin^4 \vartheta$	$\pm 4$	20	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cos \vartheta$	0	2	1
$3 \cos \vartheta - 1$	0	6	2
$5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta$	0	12	3
$\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$	$\pm 1$	6	2
$\sin 2\vartheta \cdot \cos \vartheta$	$\pm 2$	12	3
$\sin \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta$	$\pm 1$	12	3

Zusammenfassung:

$$L^2 = l(l+1) \cdot \hbar^2, \quad l \in \mathbb{N}_0$$

$$L_z = m \cdot \hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

$$L_{Bohr} = n \cdot \hbar \quad n \in \mathbb{N}$$

Quantisierung des Drehimpulses  
 Zentral Kraftproblem: Drehimpuls ist Erhaltungsgröße  
 $\vec{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)$   $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

$|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$

Jeder Drehimpuls zu einem  $l$  ist  $(2l+1)$  fach entartet (Rechtung quantisierung)

$L_z = m_l \cdot \hbar$

$m_l = -l, -l+1, \dots, +l$

$\uparrow$   $2l+1$  magnetische Quantenzahl

TABELLE 3-3 Bezeichnung und Entartung der Drehimpulseigenzustände für die Bewegung in einem Zentralfeld

Drehimpuls, $l$	0	1	2	3	4	5
Symbol	s	p	d	f	g	h
Entartung, $g = 2l + 1$	1	3	5	7	9	11

spektrale Notation

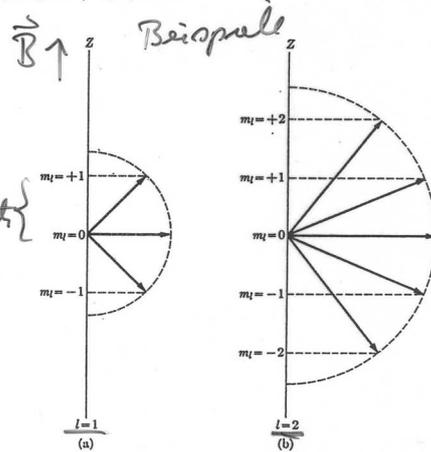


Abb. 3-6. Räumliche Quantisierung illustriert für  $l = 1$  und  $l = 2$ .

Vergleich kl. Mechanik mit QM:

klassisch: Betrag und Richtung des Drehimpulses im Zentralfeld sind konstant

QM: Nur der Betrag und eine Komponente des Drehimpulses sind gleich.zeitig bestimmbar. Es ist nicht möglich, die Richtung von  $\vec{L}$  genau zu messen.  
 Sprache QM: Komponenten von  $\vec{L}$  kommutieren nicht.

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, [L_y, L_z] = i\hbar L_x$

$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$

$\Rightarrow$  Unschärferelation  $\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2} \hbar L_z$

(Folie: Quantisierung des Drehimpulses)

(Skizze)

Hamilton Operator (Operator der Gesamtenergie)

$$\mathcal{H}_{kl} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

QM-Operator bilden durch Ersetzen

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\nabla \\ \Rightarrow \mathcal{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_{x,y,z} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Transformation auf Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_{r,\vartheta,\varphi} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \Delta_{r,\vartheta,\varphi} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]}_{-\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

Suche stationäre Lösungen

$$\boxed{\mathcal{H}\psi = E\psi}$$

Produktansatz für Wellenfunktion:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

$\Rightarrow$  3 Gleichungen zu Lösen:

1. azimutales Problem (raumfester, starrer Rotator)

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0, \quad \text{Lösungen } \Phi(\varphi) \propto e^{\pm im\varphi} \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0$$

2.  $\vartheta$  Problem (raumfreier starrer Körper)

$$-\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}\Psi(\vartheta, \varphi) = \beta\Psi(\vartheta, \varphi)$$

Lösungen: Potenzreihen in  $\cos(\vartheta)$  und  $\sin(\varphi)$

Lösungen nur stetig und eindeutig

$$\beta = \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} = \ell(\ell + 1), \quad \ell \in \mathbb{N}_0 \quad \underbrace{\text{wobei } m_e = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}_{(2\ell+1)\text{-fache Entartung}}$$

Wellenfunktion:

$$\underbrace{\Psi(\vartheta, \varphi)}_{\text{Kugelflächenfunktion}} = \underbrace{\Theta_{\ell, m}(\vartheta)}_{\text{Kugelfunktion}} \cdot \text{Phi}_{m, \ell}(\varphi)$$

Eigenfunktion des *Drehimpulsoperators*

Drehimpuls - Eigenfkt.

Kugelflächenfkt.; für <sup>alle</sup> zentral-symmetrische Potentialprobleme dieselben.

$$Y_{l,m_l}(\alpha, \varphi) = \Theta_{l,m_l}(\alpha) \Phi_{l,m_l}(\varphi)$$

assozierte Legendre Polynome

$$Y_{l,m_l} = (-1)^{m_l} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m_l)!}{2(l+m_l)!}} P_l^{m_l}(\cos \alpha) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi}$$

$$L^2 Y_{l,m_l}(\alpha, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m_l}(\alpha, \varphi)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$

$$L_z Y_{l,m_l}(\alpha, \varphi) = \hbar m_l Y_{l,m_l}(\alpha, \varphi); \quad m_l = -l, -l+1, \dots, +l$$

TABELLE 3-4 Winkelfunktionen zu  $L^2$  und  $L_z$

$l$	$m_l$	Winkelfunktion
0	0	$Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$
1	0	$Y_{10} = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$
	$\pm 1$	$Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$Y_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{5/4\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)$
	$\pm 1$	$Y_{2\pm 1} = \mp \sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$
	$\pm 2$	$Y_{2\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{15/2\pi} \sin^2 \theta e^{\pm i2\varphi}$

---  $\Theta_{l,m_l}(\alpha)$   
 ———  $|\Theta_{l,m_l}(\alpha)|^2$

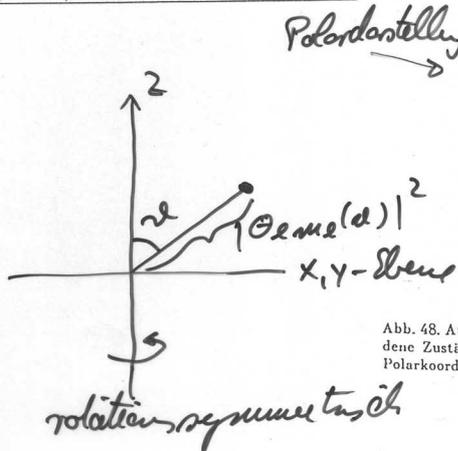
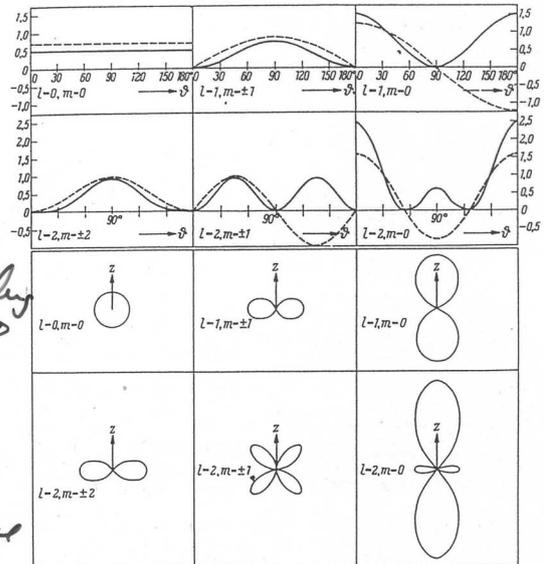


Abb. 48. Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten  $\Theta_{l,m}^2$  (ausgezogene Kurven) für verschiedene Zustände des Elektrons im H-Atom (oben in kartesischen Koordinaten, unten Polarkoordinaten). Die gestrichelten Kurven im oberen Teil der Abbildung stellen Funktion  $\Theta_{l,m}$  dar

(Folie Drehimpuls, Eigenfunktion)

Chemische Bindung und Winkelhaft.  
 Reell sind nur die Winkelhaft mit  $m_l = 0$ , zur Beschreibung chemischer Bindungen ist es zweckmäßig auch für die übrigen Zustände reelle Funktionen zu bilden.

$\Rightarrow$  Linear Kombination der Funktionen, die jeweils oben zu den Quantenzahlen  $l, (m_l)$  und  $l, -(m_l)$  gehören

$$\left. \begin{aligned} Y_{l,cos} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{l,m_l} + Y_{l,-m_l}^*) \\ Y_{l,sin} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (Y_{l,m_l} - Y_{l,-m_l}^*) \end{aligned} \right\} \text{Ergebnst von } L^2 \text{ und } L_z$$

TABELLE 3-5 Winkelwellenfunktionen zu  $L^2$  und  $L_z^2$

$l$	$ m_l $	Winkelwellenfunktion
0	0	$s = 1/\sqrt{4\pi}$
1	0	$p_z = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$
	1	$p_x = \sqrt{3/4\pi} \sin \theta \cos \phi$ $p_y = \sqrt{3/4\pi} \sin \theta \sin \phi$
2	0	$d_{3z^2-r^2} = \sqrt{5/16\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)$
	1	$d_{xz} = \sqrt{15/4\pi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi$ $d_{yz} = \sqrt{15/4\pi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi$
	2	$d_{x^2-y^2} = \sqrt{15/4\pi} \sin^2 \theta \cos 2\phi$ $d_{xy} = \sqrt{15/4\pi} \sin^2 \theta \sin 2\phi$

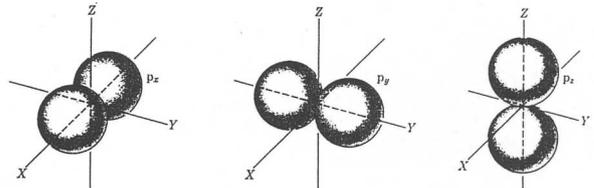


Abb. 8-10. Winkelwellenfunktionen für p-Zustände ( $l = 1$ ).

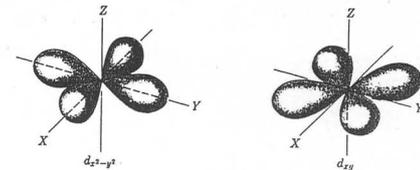
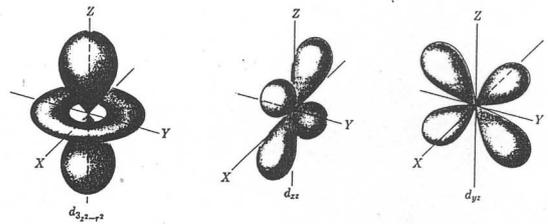


Abb. 8-11. Winkelwellenfunktionen für d-Zustände ( $l = 2$ ).

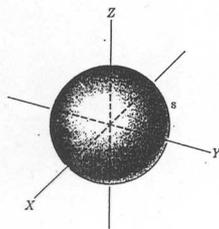


Abb. 8-9. Winkelwellenfunktion für s-Zustände ( $l = 0$ ).

(Folie chemische Bindung von Winkelfunktionen)

## 3. Lösung des Radialproblems

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR}{dr} \right] - \frac{\beta}{r^2} R + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R = 0$$

$$\beta = \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} = \ell(\ell + 1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)}_{E_{Kin} \text{ der Radialbewegung}} + \underbrace{\frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2m_e r^2}}_{\text{Zentrifugal}} - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\text{Coulomb-Pot.}} + |E| \right\} R(r) = 0$$

eff. potential  $U_{eff}$

(Skizze)

Subst:  $R(r) = \frac{U(r)}{r}$

Abstände  $r = na_0\rho$  (mit  $a_0$ -Bohrscher Radius und  $\rho$  dimensionslose Größe)Energien Vielfaches von  $E_{Bohr} \propto \frac{1}{n}$ 

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} + \frac{2n}{\rho} - 1 \right\} u(\rho) = 0$$

Grenzfall ( $\rho \rightarrow \infty$ ):  $(\frac{d^2}{d\rho^2} - 1)u(\rho) = 0$ Lösungen  $e^{-\rho}$ Allgemeine Lösung (Potenzreihe in  $\rho$ )

$$u(\rho) = \underbrace{[B\rho + C\rho^2 + D\rho^3 + \dots]}_{\text{Polynom ohne konst. Glied}} e^{-\rho}$$

 $R(r) = \frac{u(r)}{r}$  soll endlich bleiben

$$\text{aber: } r \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} u \rightarrow 0$$

Lösungen sind *Laquerre-Polynome*

$$R_{n,\ell}(r) = N_{n,\ell} e^{-\mathcal{H}_n r} r^\ell L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\underbrace{2\mathcal{H}_n r}_{\text{assoziierite Laquerre Polynome}})$$

$$\mathcal{H}_n = \frac{Z}{n} \cdot \frac{1}{a_\mu}$$

$$a_\mu = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2} = a_i \frac{m_e}{\mu}$$

$$\int_0^\infty |R_{n,\ell}|^2 dr \Rightarrow N_{n,\ell} = -\sqrt{(2\mathcal{H}_n)^{3+2\ell} \cdot \frac{(n-\ell-1)!}{2n [(n+1)!]^3}}$$

Lösungen für Energie:

$$E_{n_r,\ell} = -\frac{Ze^2\mu}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar} \cdot \frac{1}{\underbrace{(n_r + \ell + 1)^2}_{n \text{ Hauptquantenzahl}}}, \quad n_r \in \mathbb{N}_0$$

$$= -\frac{Ze^2\mu}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Die Eigenfkt. des Wasserstoff - Atoms

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) \Theta_{lm}(\vartheta) \Phi_{lm}(\varphi)$$

Table 3.1 The complete normalised hydrogenic wave functions corresponding to the first three shells, for an 'infinitely heavy' nucleus. The quantity  $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$  is the first Bohr radius. In order to take into account the reduced mass effect one should replace  $a_0$  by  $a_\mu = a_0(m/\mu)$

Shell	Quantum numbers n l m	Spectroscopic notation	Wave function $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$
K	1 0 0	1s	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} \exp(-Zr/a_0)$
L	2 0 0	2s	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (1 - Zr/2a_0) \exp(-Zr/2a_0)$
	2 1 0	2p <sub>0</sub>	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Zr/a_0) \exp(-Zr/2a_0) \cos \theta$
	2 1 ±1	2p <sub>±1</sub>	$\mp \frac{1}{8\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Zr/a_0) \exp(-Zr/2a_0) \sin \theta \exp(\pm i\phi)$
M	3 0 0	3s	$\frac{1}{3\sqrt{3\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (1 - 2Zr/3a_0 + 2Z^2r^2/27a_0^2) \exp(-Zr/3a_0)$
	3 1 0	3p <sub>0</sub>	$\frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (1 - Zr/6a_0)(Zr/a_0) \exp(-Zr/3a_0) \cos \theta$
	3 1 ±1	3p <sub>±1</sub>	$\mp \frac{2}{27\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (1 - Zr/6a_0)(Zr/a_0) \exp(-Zr/3a_0) \sin \theta \exp(\pm i\phi)$
	3 2 0	3d <sub>0</sub>	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Z^2r^2/a_0^2) \exp(-Zr/3a_0) (3 \cos^2 \theta - 1)$
	3 2 ±1	3d <sub>±1</sub>	$\mp \frac{1}{81\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Z^2r^2/a_0^2) \exp(-Zr/3a_0) \sin \theta \cos \theta \exp(\pm i\phi)$
	3 2 ±2	3d <sub>±2</sub>	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Z^2r^2/a_0^2) \exp(-Zr/3a_0) \sin^2 \theta \exp(\pm 2i\phi)$

Jeder Eigenzustand wird durch die 3 Quantenzahlen n, l, m<sub>l</sub> bestimmt und stellt einen Eigenzustand durch gleichzeitige meßbare Größen dar.

1. Energie:  $E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$  Hauptquantenzahl  
n = 1, 2, 3, ...

2. Quadrat des Drehimpulses  $\vec{L}_e^2 = \hbar^2 l(l+1)$  Drehimpuls - Qz.  
l = 0, 1, ..., n-1

3. z-Komponente des Drehimpulses  $L_z = m_l \cdot \hbar$  magnetische Qz.  
m<sub>l</sub> = 0, ±1, ..., ±l

Startung des Zustands n:  $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$

definiert Schale: 1, 4, 9, 16, ...

(Folie Die Eigenfunktion des  $H_2$  Atoms)

Feinstruktur: Aufhebung der Entartung bzgl  $\ell$  und  $m_\ell$ !

### 4.3.3 Aufhebung der $\ell$ Entartung

$\ell$  Entartung ergibt sich nur, wenn das Coulomb-Potential einer Punktladung relevant ist, Abweichung von  $\propto \frac{1}{r} \Rightarrow$  Aufhebung

Beispiel: Alkalimetalle (Skizze)

Näherung  $V_{eff}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - c_1 \frac{e^2}{r^2} - c_2 \frac{e^2}{r^3} + \dots$

Sei oBdA hier nur  $c_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + |E| + \underbrace{\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - c_1 \frac{e^2}{r^3}}_{\text{Zusammenfassung zu } \frac{\ell'(\ell'+1)}{2\mu r}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] R(r) = 0$$

Formal identische Gleichung wie beim H-Atom. jedoch  $\ell' < \ell$  keine genauen Zahlen mehr

$$\begin{aligned} E_{n_r \ell'} &= -\frac{\mu e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{(n_r + \ell' + 1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ &\stackrel{n_{eff} = n_r + \ell' + 1 < n}{=} -Rhc \frac{1}{n_{eff}^2} \\ &= -Rhc \frac{1}{\underbrace{[n - \Delta(n, \ell)]^2}_{\text{Quantendefekt}}} \end{aligned}$$

DUBLETT STRUKTUR DER ALKALIMETALLE, FEINSTRUKTUR DES H-ATOMS  
Erweiterungen:

1. Zum Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  des Elektrons gehört ein magnetisches Moment  $\vec{M}_L$
2. Das Elektron ein Eigendrehimpuls  $\vec{S}$  und ein magnetisches Moment  $\vec{M}_S$
3. Die beiden magnetischen Momente treten in Wechselwirkung miteinander

### 4.3.4 Aufhebung der m-Entartung

#### 4.3.4.1 Das magn Moment der Bahnbewegung

(Skizze)

magn. Dipolmoment einer Leiterschleife

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= I\vec{A} \\
 \text{Strom} &= I \frac{dQ}{dt} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \\
 &= \frac{-e}{T} = \frac{-ev}{2\pi r} = \frac{e\omega r}{2\pi r} = -e \frac{\omega}{2\pi} \\
 M &= -\frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 \\
 &= -\frac{1}{2} e\omega r^2 \\
 &= \frac{e}{2m_e} L, \text{ da } L = mvr = m\omega^2 r^2 \\
 \boxed{\vec{M} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}} \\
 \Rightarrow M_\ell &= - \underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{\mu_B = 9,274078 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2} \cdot \sqrt{\ell(\ell+1)}
 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_\ell = -g_\ell M_B \frac{\vec{L}}{\hbar} = \gamma_\ell \vec{L}$$

$g_\ell \hat{=}$  Landéscher  $g$  Faktor

$g_\ell = 1$  Bahndrehimpuls

$\gamma_\ell$  Gyromagnetisches Verhältnis

Wegen der Richtungsquantellung des Drehimpulses gilt dies auch für das magn. Moment

$$\begin{aligned}
 M_z &= \frac{-e}{2m_e} L_z = \frac{-e\hbar}{2m_e} m_\ell \\
 &= -\mu_B m_\ell = -g_\ell \mu_B m_\ell
 \end{aligned}$$

Jeder klassische magn. Dipol erfährt in einem statischem Magnetfeld  $\vec{B}$  eine

Energieänderung:

$$\begin{aligned}\Delta E_{m_\ell} &= -\vec{M}_\ell \vec{B} \\ &= \frac{e}{2m_e} \vec{L} \vec{B} = \frac{e}{2m_e} L_z B \\ &= \mu_B B m_\ell \quad \text{da } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Gesamtenergie eines Zustandes  $n, \ell$

$$E_{n, m_\ell} = E_n + \Delta E_{m_\ell} = E_n + \mu_B B m_\ell, \quad m_\ell \in \mathbb{Z}$$

Drehmoment:

$$\vec{\tau} = \vec{M}_\ell \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \times \vec{B}$$

$\tau \perp$  auf  $-\vec{L}$  und  $\vec{B}$

(Skizze)

$\vec{\tau}$  bewirkt Änderung  $\Delta L_\parallel$  in x-y-Ebene, damit verbunden ist Winkeländerung

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L_\parallel}{L_\parallel}$$

$\Rightarrow$  Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_L = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta L_\parallel}{L_\parallel} \frac{1}{\Delta t} = \frac{|\vec{\tau}|}{L_\parallel} = \frac{e}{2m_e} \frac{L \sin\vartheta B}{L \sin\vartheta} = \frac{e}{2m_e} B$$

$$\boxed{\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \vec{B} = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B}} \text{ Larmor-Frequenz}$$

#### 4.3.4.2 Magnetische Moment und Spin

- $S$  zustände  $\Rightarrow \ell = 0 \Rightarrow$  kein magnetisches Bahnmoment
- $\Rightarrow$  Eielektronenatome diamagnetisch
- Experiment  $\Rightarrow$  Atome sind *paramagnetisch*
- Grund: Existenz eines Eigendrehimpulses = *Spin*

- Spin= fundamentales Charakteristikum von Elementarteilchen

- klassische Abschätzung für Eigendrehimpuls

(Skizze)

$$R_e = 2,8 \cdot 10^{-15} m$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$$

$$v \leq c$$

$$Spin_{kl} \leq m_0 R_l c = 10^{-36} J_s \simeq 10^{-2} \hbar$$

Experimentelle Bestätigung des Spins  
Stern-Gerlach-Versuch:

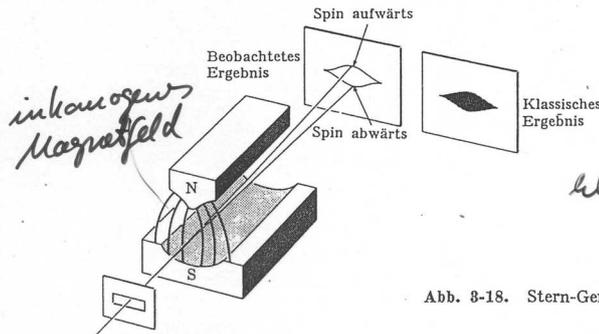


Abb. 8-18. Stern-Gerlach-Versuch.

Atomstrahl  
z.B. H-Atome  
im Grundzustand  
 $l=0$

$$E_{pot} = - \vec{M} \cdot \vec{B}$$

$$F_z = - \frac{dE_{pot}}{dz}$$

$$= M_z \cdot \frac{dB}{dz} = M_{cos\theta} \frac{dB}{dz}$$

kl. Erwartung: alle Richtungen  
von  $M$  zugelassen  
 $\Rightarrow$  breiter Fleck  
auf Schirm

Ergebnis: 2 Linien  $\Rightarrow$  2  
Einstellmöglichkeiten für  
Spin

mit  $2s+1=2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$  halbbar

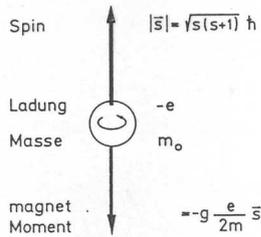


Abb. 12.7. Spin und magnetisches Moment des Elektrons, schematisch

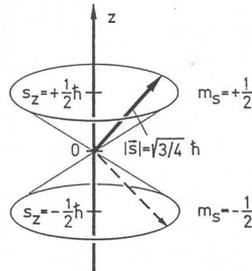


Abb. 12.8. Der Elektronenspin hat zwei Einstell-Möglichkeiten in einem Magnetfeld der Richtung z. Sie sind durch die Quantenzahl  $m_s = \pm 1/2$  charakterisiert

$$\vec{S}^2 \chi_{s,m_s} = \hbar^2 s(s+1) \chi_{s,m_s}$$

$$S_z \chi_{s,m_s} = m_s \hbar \chi_{s,m_s}$$

$$\vec{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2$$

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

magneto-mechanische Formel  $\vec{M}_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S}$   
 $= -g_s \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{S}$

g-Faktor  $g_s = \begin{cases} 2,00 & \text{nach Dirac} \\ 2,0023 & \text{Quantenelektrodynamik} \\ & \text{WW des Elektrons mit eigenem} \\ & \text{Feld} \end{cases}$

(Folie Experimentelle Bestimmung des Spins)

Addition von Drehimpulsen

H-Atom:  $\vec{j} = \vec{L} + \vec{S}$

allg. Betrachtung für 2 Drehimpulse  $J_1$  und  $J_2$

$\vec{J}_1^2 = j_1(j_1+1)\hbar^2$  ;  $j_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

$J_{1z} = m_1 \hbar$  ;  $m_1 = 0, \pm 1, \dots, \pm j_1$  ( $2j_1+1$ )

$\vec{J}_2^2 = j_2(j_2+1)\hbar^2$  ;  $j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

$J_{2z} = m_2 \hbar$  ;  $m_2 = 0, \pm 1, \dots, \pm j_2$  ( $2j_2+1$ )

Erhalte  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$

Forderung:  $\vec{j}^2 = j(j+1)\hbar^2$

$J_z = m_j \hbar$  ;  $m_j = 0, \pm 1, \dots, \pm j$  ( $2j+1$ )

$\Rightarrow j = \underbrace{j_1 + j_2}_{\text{parallel}} ; j_1 + j_2 - 1 ; \dots ; \underbrace{|j_1 - j_2|}_{\text{antiparallel}}$

$m_j = m_1 + m_2 = 0, \pm 1, \dots, \pm j$

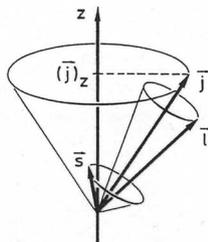


Abb. 12.12. Kopplung der Vektoren von Spin  $s$  und Bahndrehimpuls  $l$  zum Gesamtdrehimpuls  $j$  im Vektormodell. Die Vektoren  $s$  und  $l$  präzedieren um den von ihnen aufgespannten Vektor  $j$ . In einem äußeren Magnetfeld der Richtung  $z$  präzediert  $j$  um die Richtung  $z$ . Dabei wird die Öffnung des Präzessionskegels durch die magnetische Quantenzahl  $m_j$  bestimmt. Die Abbildung gilt für  $s=1/2, l=2, j=5/2$

Tabelle 16  
Die möglichen Kombinationen der Quantenzahlen  $l, j$  und  $m_j$

Zustand	$s$	$p$	$d$	$f$
$l$	0	1	2	3
$j$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
$m_j$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$	$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}$	$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}$
$2j+1$	2	4	6	8
$2(2l+1)$	2	6	10	14

Der Elektronenspin kann relativ zum Bahndrehimpuls nur 2 mögliche Orientierungen haben

$j = l \pm \frac{1}{2}$  für  $l \neq 0$

$j = \frac{1}{2}$  für  $l = 0$

ohne Spin: Eigenzustandsanzahl  $n^2 m_l$   
mit Spin:  $n^2 j$

(Folie Addition von Drehimpuls)

#### 4.3.4.3 Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur

Plausibilitätsbetrachtung

- Bewegung des Elektrons im Laborsystem (Skizze)

$$\vec{L} = m_e \vec{r} \times \vec{v} = m_e \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Elektron erzeugt ein Magnetfeld
  - ⇒ Wechselwirkung mit magnetischen Momenten
  - ⇒ Energieänderung

- Ruhesystem des Elektrons (Skizze)

Im Bezugssystem des Elektrons gilt  $\vec{L} = 0$

⇒ es gilt nur magnetische Moment von  $\vec{S}$

⇒ Energieänderung  $\propto \vec{M}_S \vec{B}$ ;  $\vec{M}_S \parallel \vec{S}$  und  $\vec{B} \parallel \vec{L}$

⇒  $\Delta E_{SL} = a \vec{S} \vec{L}$  Spin-Bahn Wechselwirkung

Magnetfeld einer Leiterschleife

*Biot-Savart:*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \cancel{r}}{r^{\cancel{3}2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \underbrace{\oint dl}_{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

mit  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$  und Kreis  $d\vec{\ell} \perp \vec{r}$

$$I = +Ze v = +Ze \frac{\omega}{2\pi} \stackrel{L=m_e \omega r^2}{=} \frac{ZeL}{2\pi m_e r^2} \text{ was unter } =$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze}{m_e} \frac{1}{r^3} \vec{L}$$

Rücktransformation ins Laborsystem des Elektrons:

Ergebnis:  $\vec{B} = \frac{1}{2} \frac{Ze\mu_0}{4\pi m_e} \frac{\vec{L}}{r^3}$  mit Thomasfaktor =  $\frac{1}{2}$

$$\Delta E_{SL} = -M_S \vec{B} = -(-)g_S \frac{e}{2m_e} \vec{S} \cdot \frac{1}{2} \frac{Ze\mu_0}{4\pi m_e} \frac{\vec{L}}{r^3}$$

$$\stackrel{g_S=2}{\simeq} \underbrace{\frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m_e^2}}_q \vec{S} \vec{L}$$

Größenordnung:  $Z = 1, r = 1\text{\AA} \Rightarrow \Delta E_{SL} \stackrel{B \simeq \pi}{\simeq} 10^{-4} eV \ll E_n$

Gesamtenergie  $E = E_n + \langle \Delta E_{SL} \rangle$

$$= E_n + \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m_e^2} \underbrace{\vec{S} \vec{L}}_{\frac{\hbar^2}{2}} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \leftrightarrow \int \Psi^* \frac{1}{3} \psi dv$$

$$J = \vec{L} + \vec{S}'$$

$$\Leftrightarrow \vec{S} \vec{L} = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - S(S+1)]$$

$$\Delta E_{SL} = |E_n| \frac{(Z\alpha)^2}{2n\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)} \begin{cases} \ell & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -(\ell+1) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{137} \quad \text{Feinstrukturkonstante}$$

H-Atom

$$= E = E_n + \langle \Delta E_{SL} \rangle + \underbrace{\langle \Delta E_{kin} \rangle}_{\text{rel. Korrektur zu } E_{kin}} + \underbrace{\langle \Delta E_{pot} \rangle}_{\text{rel. Korrektur zu } E_{pot}}$$

$$E_{kin} = -\frac{p^4}{8m_e^3 c^2} \Rightarrow |E_n| \frac{\alpha^2}{n^2} \left[ \frac{3}{4} - \frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} \right]$$

$$E_{pot} = |E_n| \frac{\alpha^2}{n}; \ell = 0$$

$$E_{nj} = E_n \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$k \rightarrow j + \frac{1}{2} \quad \text{zu Sommerfeld}$$

... so, das wars jetzt irgendwie

Fehler im Skript entdeckt?  $\Rightarrow$  [Maximilian.Michel@physik.uni-wuerzburg.de](mailto:Maximilian.Michel@physik.uni-wuerzburg.de)  
mailen! (Kapitelangabe und letztes Schlagwort nicht vergessen)

# Index

- 0-Punktenergie, 79
- amu, 70
- Atommasse, 70
- Avogadro, 88
- Azimutales Problem, 172
  
- Bahnen, stabile, 112
- Balmer, 102
- Balmer - Serie, 102
- Biot-Savart, 193
- Bohr, 73
- Bohr-Sommerfeld, 127
- Born, 127
- Born Hypothese, 138
- Bose-Einstein-Verteilung, 79
- Braket, 102
  
- Christian Doppler, 49
- Compton, 73
- Coulomb-Potential, 169
  
- Dalton, 87
- de Brogli, 127
- de Broglie, 128
- de Broglie-Wellenlänge, 128
- Dirac, 127
- Doppelsternsystem, 60
- Dopplereffekt, quadratisch, 51
- Dopplereffekt, transversal, 51
- Dopplereffekt, longitudinal, 50
- Drehimpulsoperator, 179
- Dulong-Petit-Gesetz, 85
  
- Einstein, 73
  
- Energiedichte, 73
- Energiedichte, spektral, 73
- Energiequantisierung, 153
- Entweichgeschwindigkeit, 53
- Erdmasse, 60
- Erdradius, 60
  
- Faraday, 88
- Fluchtgeschwindigkeit, 53
  
- Gay-Lussac, 88
- Gleichzeitigkeit, relativität der, 23
- Gyromagnetisches Verhältnis, 187
  
- Heisenberg'sche Unschärferelation, 142
- Heisenberg'sche Unschärferelationen, 142
- Heisenberg, 127
- Heisenberg'sche Unschärferelation, 151
- Hermitesch, 167
- Hermitesche Polynome, 163
- Hypothese von Born, 138
  
- Impulsmasse, 34
- Impulsraum, 76
- Intensität, 154
- Ionen, 88
- Isotrope, 70
  
- Karpuskeln, 142
- Kastenpotential, 156
- Korpuskel, 136
- Korpuskeln, 128
  
- Lamer-Gleichung, 96

- Landéscher  $g$  Faktor, 187  
 Laner-Frequenz, 188  
 Laquerre-Polynome, 184  
 Legendre, 174  
 Lichtgeschwindigkeit, 60  
 Lorentz Invarianz, 37  
 Lyman, 102
- Mößbauer Effekt, 58  
 Masse Erde, 60  
 Masse, beschleunigt, 60  
 Masse, rotierend, 60  
 Masse, schwingend, 60  
 Massenspektroskopie, 88  
 Mesonen, 23  
 Milikanversuch, 66  
 Minkowski, 38  
 Mol, 88  
 Myonen, 22
- Normierte Wellenfunktion, 155
- Paschen, 102  
 Paschen - Serie, 102  
 Periheldrehung, 60  
 Planck, 73  
 Planetenmodell, 96  
 Plumpudding-Modell, 91  
 Polynomansatz, 162  
 Potenzreihenansatz, 162  
 Pound, 58  
 Pronst, 87
- Quantenmechanik, 79  
 Quantenmechanisches Teilchen, 136  
 Quantenoperator, 165  
 quanticle, 136  
 quanton, 136  
 quon, 136
- Rücktransformationsmatrix, 41  
 Radius Erde, 60
- Raumkrümmung, 54  
 Rayleigh-Jeans, 78  
 Rebka, 58  
 relativistische Objekte, 53  
 Rotverschiebung, 51, 58  
 Ruhemasse, 32  
 Rutherfordsches Atommodell, 96  
 Rydberg, 102  
 Rydberg - Serie, 102  
 Rydberg-Konstante, 102  
 Rydbergkonstante, 102
- Schrödinger, 127  
 Schrödinger-Gleichung, 143, 144, 156  
 Schwarze Löcher, 53  
 Schwarzer Strahler, 73  
 Schwarzschildradius, 53  
 Selbstadjungiert, 167  
 Serie, Balmer, 102  
 Serie, Paschen, 102  
 Serie, Rydberg, 102  
 Sommerfeld, 73, 194  
 spektraler Energiedichte, 73  
 Spin, 188  
 Stabile Bahnen, 112  
 Stationärer Zustand, 112, 154  
 Stefan Boltzmann-Gesetz, 76  
 Superpositionsprinzip, 153
- Transformationsmatrix, 40  
 Tunneleffekt, 159
- Uhrenparadoxon, 24  
 unschärfe, 168  
 Unschärferelation, 168
- Violettverschiebung, 51, 58
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 154  
 waveicals, 142  
 waveicle, 136  
 wavicle, 145

- Wellenfunktion, normiert, [155](#)
- Wellenmechanik, [127](#)
- Wiensches Verschiebungsgesetz, [76](#)
  
- Zustand, stationär, [112](#), [154](#)
- Zustandsdichte, [76](#)
- Zwillingsparadoxon, [24](#)