

Konstruktion von Wellenpaketen

Überlagerung von Wellenpkt. mit unterschiedlichen Wellenvektoren k

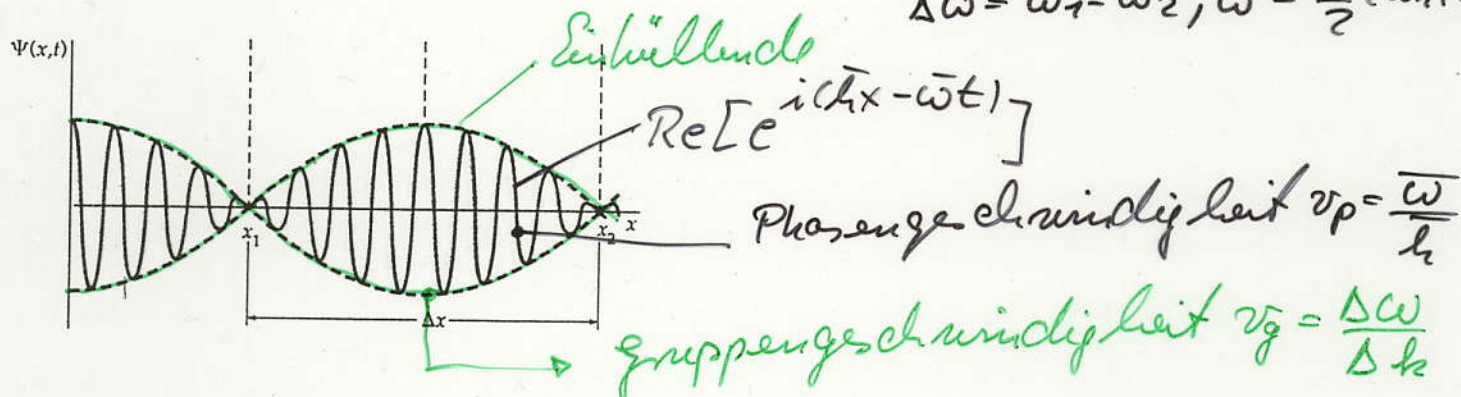
a) Überlagerung von 2 Wellenpkt mit gleicher Amplitude

$$\psi(x,t) = A_0 [e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}]$$

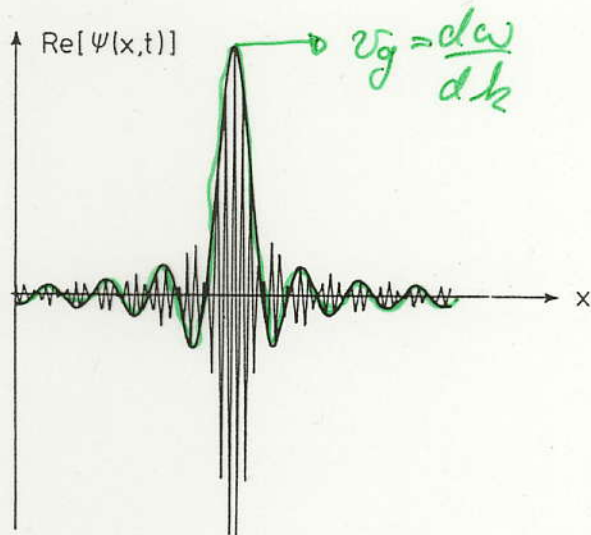
$$= 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) e^{i(\bar{k} x - \bar{\omega} t)}$$

$$\Delta k = k_1 - k_2; \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2; \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

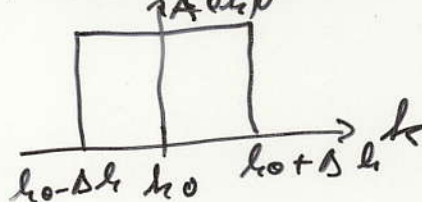


b) Überlagerung von Wellenpkt. mit Verteilung im Intervall $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$; $k_0 \gg \Delta k$



$$\psi(x,t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Verteilungsfkt



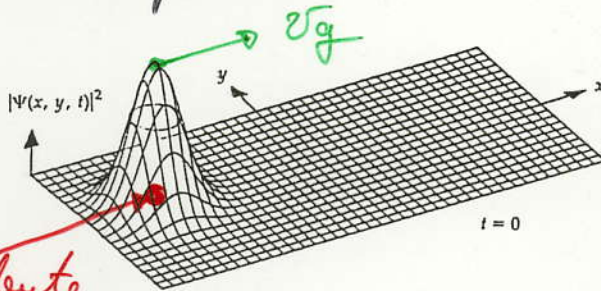
$$\text{Näherung: } \Rightarrow \psi(x,t) = A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(x - \frac{d\omega}{dk} t) \alpha} d\alpha$$

$$= A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{2 \sin\left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - x\right) \Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk} t - x}$$

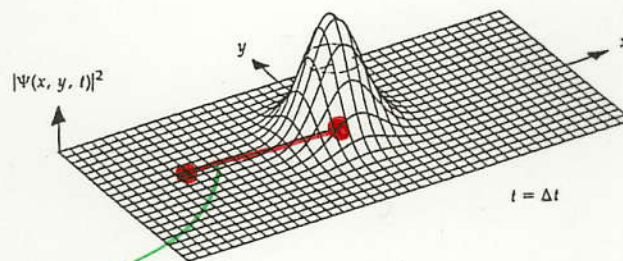
Das "Zerfließen" von Wellenpaketen

Evolution eines Wellenpakets mit der Zeit

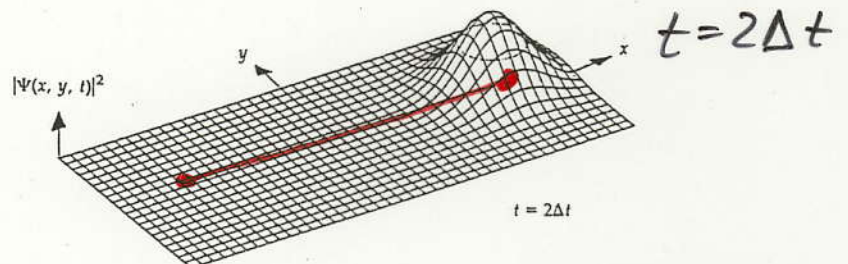
Startzeitpunkt $t = 0$



äquivalente
Position eines
klassischen
Teilchens



Bahn des
klassischen
Teilchens



Erstreckung des Wellenpakets wächst mit der Zeit, d.h. die räumliche Ausdehnung der Wellengruppe nimmt zu
Grund: Dispersion der de Broglie'schen Wellen im Vakuum

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$E = \hbar \omega$$

$$p = \hbar k$$

Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v_{\text{cl. Teilchen}}$

Die Heisenberg'schen Unschärferelationen

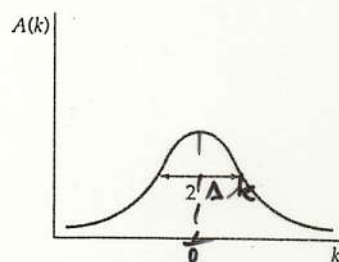
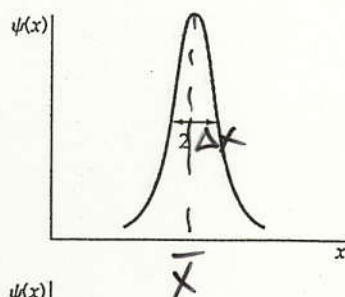
Wellenpaket
im Ortsraum

$$\psi(x,t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} = \int A(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} dp$$

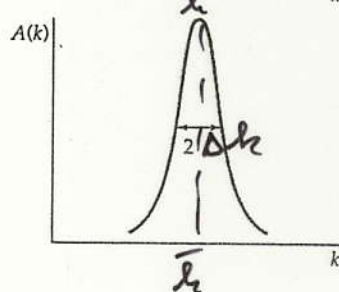
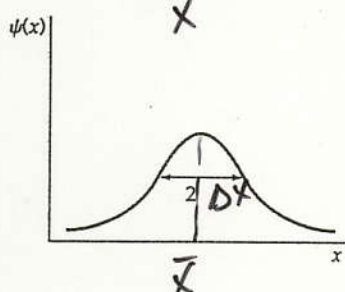
Zwischen den Breiten der Orts- und Impulsverteilung
besteht ein Zusammenhang $\Rightarrow$ aus Fourier-Theorem

Ortsverteilung

Impulsverteilung



Δx klein
 $\Rightarrow \Delta p$ groß
und
umgekehrt



$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$
für Gauß-
förmige
Wellenpakete

$\Rightarrow$ Unschärferelationen für Ort und Impuls
 $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$ für Gauß-förmige Wellenpakete

präziser $\Delta x \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$
 $\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$
 $\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$ } Heisenberg'schen
Unschärferelationen
für Ort und Impuls

Unschärferelation für Zeit und Energie:

$$\psi(x,t) = \int A(E) e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} dE$$

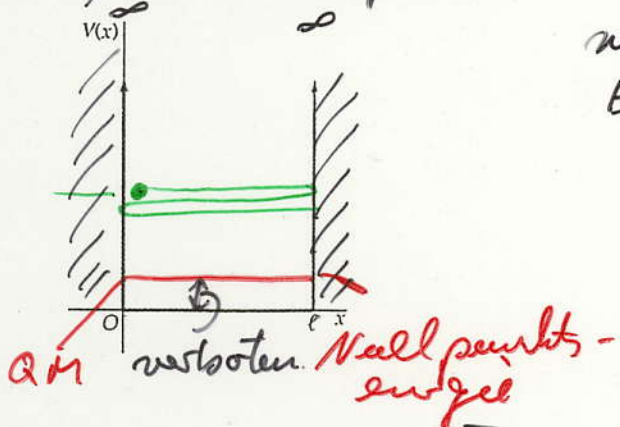
Δt klein $\Rightarrow \Delta E$ groß und umgekehrt

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Konsequenzen der Unschärferelationen für gebundene Zustände

räumliche Einschränkung $\Rightarrow$ Nullpunktsenergie
z.B.

a) 1D Kastenpotential



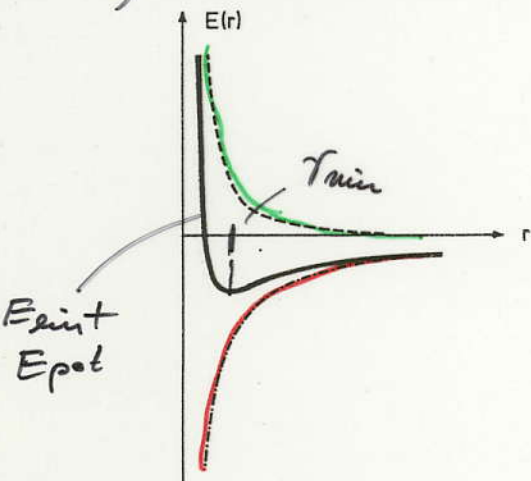
min. Energie

$$E = E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\bar{p} \pm \Delta p)^2}{2m} \approx \frac{\Delta p^2}{2m}$$

$$\geq \frac{h^2}{8ml^2}$$
 exaktes Ergebnis für Grundzustand

$$\Delta p \geq \frac{h}{2l}$$

b) Wasserstoff-Atom



hat kin. und pot. Energie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2me} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

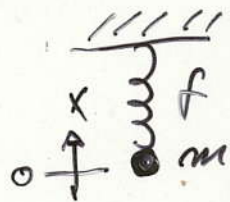
$$\approx \frac{h^2}{8me r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{2r} \quad \frac{dE}{dr} = \frac{h^2}{4me} (-2) r^{-3} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} (-1) r^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow r_{\text{min}} = \frac{h^2 \pi \epsilon_0}{me e^2} \Rightarrow$$

$$E_{\text{min}} \approx - \frac{1}{\pi^2} \frac{me e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$$
 exaktes Ergebnis

c) 1D harmonischer Oszillator

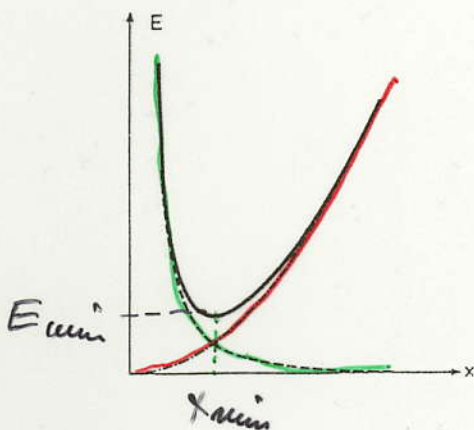


Kraft $F = -fx$
 Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\approx \frac{h^2}{8m x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \text{Min!}$$



$$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{2x} \quad \frac{dE}{dx} = \frac{h^2}{4m} (-2) x^{-3} + \frac{1}{2} m \omega^2 (2) x_{\text{min}} = 0$$

$$\Rightarrow x_{\text{min}} = \frac{h}{2m\omega} \Rightarrow E_{\text{min}} \approx 2\pi \frac{\hbar \omega}{2}$$
 exakt