Übungen Funktionentheorie I

Wintersemester 2008/2009
LaTeX von Maximilian Michel
— nicht korrektur gelesen —

10. Februar 2009

Dies ist nur eine Vorlesungsmitschrift und ist daher nicht absolut fehlerfrei. Wer Fehler finden sollte, bitte eine Mail schreiben an Maximilian.Michel„at“physik.uni-wuerzburg.de. Sämtliche ©'s liegen bei Prof. Steuding, zu erreichen unter dieser E-Mail-Adresse.
Die aktuellste Version findet ihr unter http://www.uni.jock2.de

1 Übung

1.1 Aufgabe

Die Darstellung der Mengen $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ liefern ein lachendes Gesicht. Dabei beschreibt $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 3\}$ den Rand des Gesichtes um den Ursprung $z_0 = 0$. $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid (z-i)^2 = 1\}$ stellen die beiden Augen dar. Die Menge $M_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{2} \text{ und } \arg(z) \in \left[\frac{9}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right]\right\}$ ist hier der Kreisbogenabschnitt des Mundes.

1.2 Aufgabe

Gesucht $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit

$$\underbrace{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \operatorname{Re}(z)\right)}_{=\alpha(z)} \cdot \underbrace{(z^6 + z^4 + z^2 + 1)}_{\beta(z)} \cdot \underbrace{(\arg(z) - \arg(z))}_{=\gamma(z)} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(z) \cdot \beta(z) \cdot \gamma(z) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z) = 0 \vee \beta(z) = 0 \vee \gamma(z) = 0$$

Betrachten wir also die einzelnen Fälle:

$\alpha(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \operatorname{Re}(z) = 0$$
$$\Leftrightarrow \bar{z} + z = \operatorname{Re}(z) z\bar{z}$$

mit $\bar{z} + z = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z)$ folgt:

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot |z|^2$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \ \vee \ 2 = |z|^2$$

$\beta(z) = 0$

$$\Leftrightarrow z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2+1) \cdot (z^4+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2 - i^2) \cdot (z^2 - i) \cdot (z^2 + i) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-i)(z+i)(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{-i})(z+\sqrt{-i}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-i)(z+i)(z-e^{i\frac{\pi}{4}})(z+e^{i\frac{\pi}{4}})(z-e^{i\frac{3}{4}\pi})(z+e^{i\frac{3}{4}\pi}) = 0$$
$$\Leftrightarrow z \in \left\{i, -i, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3}{4}\pi}, e^{i\frac{5}{4}\pi}, e^{i\frac{7}{4}\pi}\right\}$$

$\gamma(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \arg(z) - \arg(\bar{z}) = 0$$

mit $z := re^{i\varphi}$ folgt:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \varphi = -\varphi \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow \varphi = 0 \;\vee\; \varphi = \pi \Leftrightarrow \qquad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Gesamtlösung:

$$\mathcal{L} = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\} \cup \{z \mid |z| = \sqrt{2}\} \cup \left\{i, -i, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3}{4}\pi}, e^{i\frac{5}{4}\pi}, e^{i\frac{7}{4}\pi}\right\} \cup \mathbb{R}$$

1.3 Aufgabe

Für $c \in \mathbb{C}$ sei $P_c^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rekursiv definiert durch $P_c^1(z) = z^2 + c$ und $P_c^{n+1} = P_c^1 \circ P_c^n$. Die so genannte **Mandelbrotmenge** ist definiert durch:

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid (P_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}.$$

a) $M \subset \overline{B_2(0)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$. **Hinweis:** zeigen Sie zunächst, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$|P_c^n(0)| \leq |c|\,(|c| - 1)^{2^{n-2}}$$

Beweis. Wir machen dies mit der Induktion: Zuerst zeigen wir, dass die Aussage $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|P_c^2(0)\right| &= \left|c^2 - c\right| = \left|c^2 - (-c)\right| \geq \left|\left|c^2\right| - |-c|\right| \\ &\geq |c|^2 - |c| = |c| \cdot (|c| - 1)^{\overbrace{2^{2-2}}^{=1}} \end{aligned}$$

Es folgt der Induktionsschritt von $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \left|P_c^{n+1}(0)\right| &= \left|(P_c^n(0))^2 + c\right| \geq |P_c^n(0)|^2 - |c| \\ &\geq |c|^2 \left[(|c| - 1)^{2^{n-2}}\right]^2 - |c| \\ &= |c| \cdot \left[|c| \cdot (|c| - 1)^{2^{n-2}} - 1\right] \\ &= |c|\,(|c| - 1)^{2^{n-1}} \cdot \underbrace{\left[\overbrace{|c|}^{>2} - \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\underbrace{(|c| - 1)}_{>1}{}^{2^{n-1}}}}_{>1}}_{>1}\right]}_{>1} \\ &\geq |c| \cdot (|c| - 1)^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Für $|c| > 2$ ist $|c| - 1 > 1$ also folgt $(|c| - 1)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Also ist $c \notin M$ für alle c mit $|c| > 2$. Damit folgt: $M \subset \overline{B_2(0)}$. □

b) M ist abgeschlossen. **Hinweis:** Zeigen Sie zunächst.

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{c \in \mathbb{C} \mid |P_c^n(0)| \leq 2\}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst den Hinweis:

„$\subseteq$“: Für jedes $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{c \in \mathbb{C} \mid |P_c^n(0)| \leq 2\}$ ist $|P_x^n(0)| \leq 2$, also $(P_x^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

$$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{c \in \mathbb{C} \mid |P_c^n(0)| \leq 2\} \subset M.$$

„$\supseteq$“: Sei $x \in M$. Nach a) ist $|x| \leq 2$. Angenommen, es wäre $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{c \in \mathbb{C} \mid |P_c^n(0)| \leq 2\}$. Dann exisitert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|P_x^n(0)| = 2 + y$ mit $y \in \mathbb{R}^+$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \left|P_x^{n+1}(0)\right| = \left|P_x^n(0)^2 + x\right| &\geq \underbrace{|P_x^n(0)|^2}_{=(2+y)^2} - \underbrace{|x|}_{\leq 2} \\ &= 4 + 4y + y^2 - |x| \\ &\geq 2 + 4y \end{aligned}$$

Induktiv folgt $\left|P_x^{n+k}(0)\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Damit folgt $x \notin M$. Dieser Widerspruch zeigt, dass insgesamt

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{n \in \mathbb{N} \mid |P_c^n(0)| \leq 2\}$$

gilt.

Zeige M ist abgeschlossen. Da beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, genügt es die Abgeschlossenheit **aller** Mengen $M_n := \{c \in \mathbb{C} \mid |P_c^n(0)| \leq 2\}$ zu zeigen. Sei hierzu $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ c \mapsto |P_c^n(0)|$ stetige Funktionen. Dann ist $M_n = f^{-1}(\overline{B_2(0)})$. Also ist M_n als Urbild einer abgeschlossnenen Menge abgeschlossen. □

c) Bestimmen Sie $M \cap \mathbb{R}$

Nach a) gilt: $M \cap \mathbb{R} \subseteq [-2, 2]$.

Behauptung: Für $c \in \left]\frac{1}{4}, 2\right]$ ist $(P_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Beweis. Zeige $(P_n^c(0))_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend. Wegen $P_c^{n+1}(0) = P_c^n(0)+c$ muss dafür

$$\begin{aligned} x^2 + c &> x \\ \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + c - \frac{1}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{4}\right) &> 0 \end{aligned}$$

gelten. Dies gilt für alle $c \in \left]\frac{1}{4}, 2\right]$. Damit gilt entweder

$$P_c^n(0) \to x_0 \qquad \text{oder } P_c^n(0) \to +\infty.$$

Für $P_c^n(0) \to x_0$ müsste $x_0 = x_0^2 + c$ gelten, was aber für $c > \frac{1}{4}$ nicht gilt. Damit folgt, dass $(P_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. $\square$

Behauptung: Für $c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ ist $(P_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|P_c^n(0)| \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c}) =: f(c)$$

Indutkion: $n = 1$

$$\left|P_c^1(0)\right| = |c| = \begin{cases} +c, & \text{für } c \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ -c, & \text{für } c \in [-2, 0] \end{cases} \Rightarrow |c| \le \frac{1}{2} \le f(c), \qquad \forall_{c \in \left[0, \frac{1}{4}\right]}$$

Es ist $\left|P_{-c}^1(0)\right| = 2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4(-2)}) = f(-2)$ und $f'(c) = \frac{-1}{\sqrt{1-4c}} > -1$, $c \in [-2, 0]$.

$$\Rightarrow |c| \le f(c) \qquad \forall_{c\in[-2,0]}$$
$$\Rightarrow \left|P_c^1(0)\right| \le f(c)$$

$n \to n+1$: Sei $|P_c^n(0)| \le f(c)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left|P_c^{n+1}(0)\right| &= \left|P_c^n(0)^2 + c\right| \\ &= \begin{cases} P_c^n(0)^2 + c \le f(c)^2 + c = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-4c}) + c = f(c), & \text{für } P_c^n(0)^2 + c \ge 0 \\ -P_4c^n(0)^2 - c \le -c \le |c| \le f(c), & \text{für } P_c^n(0)^2 + c < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist $|P_c^{n+1}(0)| \le f(c) < \infty$.

Damit ist $(P_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für $c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ Damit folgt, dass $M \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$

1.4 Aufgabe

Bette das Riemannsland in $\mathbb{C}$ ein. Die Palme P und die Felsen F entsprechen dann komplexe Zahlen.

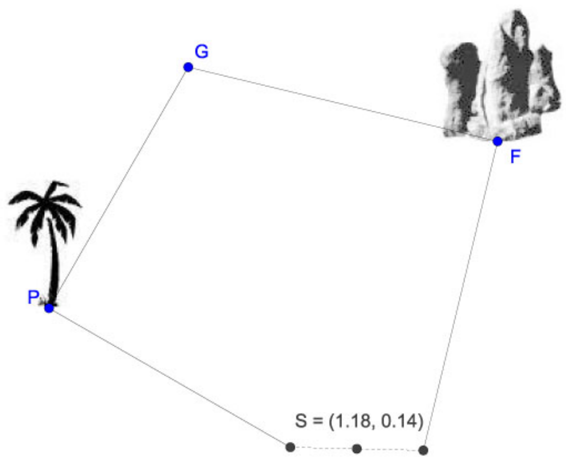

Abbildung 1.1: Darstellung der Situation mit Geogebra

Die Abbildung $\alpha : z \mapsto -i(P-z)+p$ beschreibt die Abbildung „Anfangspunkt$\rightarrow$ Erste Fahne
Die Abbildung $\beta : z \mapsto +i(F-z)+F$ beschreibt die Abbildung „Anfangspunkt$\rightarrow$ Zweite Fahne. Geraben wird bei

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\alpha(z)+\beta(z)) &= \frac{1}{2}[-i(P-z)+P+i(F-z)+F] \\ &= [-iP+P+iF+F]\end{aligned}$$

Man erkennt also, dass es **unabhängig** vom Startpunkt z ist. Eine elementargeometrische Lösung findet man auf der Übungsseite der Funktionentheorie

2 Übung

2.1 Aufgabe

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph

a) zu zeigen ist: $f'(z) = 0 \ \forall_{z \in \Omega} \Rightarrow f$ konstant. Dies folgt aus Korollar 3.4 oder $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$. Da f holomorph ist, folgt:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \forall_{z_0 \in \Omega}$$

Mit $f'(z_0) = 0 \ \forall_{z \in \Omega}$ folgt:

$$0 = f'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial yx} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z_0)$$

Mit den Cauchy-Riemann'sche DGLn (2.2)

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u(x,y) = \text{const} \\ v(x,y) = \text{const} \end{array} \Rightarrow \text{const}$$

b) Zu zeigen ist, dass $z \mapsto \operatorname{Re}(f(z)) = \text{const}$ zu $f = \text{const}$ führt.

$$f = u + v$$

mit $u = \text{const} \Rightarrow f' = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} f = \text{const}$

c) zu zeigen ist, dass aus $z \mapsto \operatorname{Im}(f(z))$ dann auch $f = \text{const}$ folgt (kann man analog zu a) zeigen, oder)

Betrachte $\tilde{f}(z) := if(z) \Rightarrow$ identisch zu b) $\Rightarrow f = \text{const}$

2.2 Aufgabe

$\Omega \subset \mathbb{C}$ ist ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.

a) Falsch! Ein Gegenbeispiel: $f(z) = iz^2$ ist holomorph und $f(iz) = i^3 z^3 = -f(z)$ offensichtlich aber nicht konstant,

b) Richtig, denn aus $\arg(f(z)) = \arg \overline{f(z)}$ folgt $f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = \text{const} \overset{2.1.c)}{\Rightarrow} f$ ist konstant

c) Sei $|f(z)| = c$

$c = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow$ fertig.

$$\Rightarrow f(z) \neq 0 \qquad \forall_{z\in\Omega}$$

$\Rightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|}$ holomorph

$$\Rightarrow \frac{f^2(z)}{f(z)\overline{f(z)}} = \frac{f(z)}{\overline{f(z)}} \qquad \text{holomorph} \Rightarrow \overline{f(z)} \qquad \text{holomorph}$$

Wegen

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Re}(f(z))) = 0 \overset{2.1.c)}{\Rightarrow} \operatorname{Re}(f(z)) = \text{const} \overset{2.1.b)}{\Rightarrow} f(z) = \text{const}$$

d) Falsch! Ein Gegenbeispiel ist $f(z) = z + \frac{1}{z}$ ist auf $\Omega\backslash\{0\}$ holomorph und erfüllt die Bedingung, aber sie ist offensichtlich nicht konstant.

2.3 Aufgabe

Existiert eine Umgebung von 1 mit

a) $f(z) = \frac{y}{x^2+y^2}$ Realteil einer holomorphen Funktion ist?

Ja! Die Funktion

$$F(x+iy) = \frac{i}{x+iy}$$

ist in jeder geeigneten Umgebung von 1 $(0 \notin U)$ holomorph.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} F &= \operatorname{Re} \frac{i(x-iy)}{x^2+y^2} \qquad \Big| \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \\ &= \frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

b) $g(z) = \frac{1}{2}xy^2$ (wobei $(z = x+iy)$

Nein! den

Annahme: Existiert ein $G(x+iy)$ mit

$$G(x+iy) = g(x+iy) + iv(x+iy)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \overset{(2.2)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Wendet man nun den Satz von Schwarz an, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&\overset{(2.2)}{=} -\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}
\end{aligned}
$$

also folgt:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \overset{!}{=} 0,$$

da aus „g-harmonisch“ folgt, dass g holomorph ist

$$\Rightarrow 0 + 2x \not\equiv 0$$

2.4 Aufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ mit $|a| < r < |b|$ und $\gamma = re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Zu zeigen ist:

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)\cdot(z-b)} = \frac{2\pi}{a-b}$$

Beweis. Nehmen wir zuerst eine Partialbruchzerlegung vor

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)\cdot(z-b)} = \left[\int_\gamma \frac{dz}{z-a} - \int_\gamma \frac{dz}{z-b}\right] \frac{1}{a-b}$$

1. Wegen $|b| > r$ ist $\frac{1}{z-b}$ auf $D_{r+\frac{|b|-r}{2}}(0)$ holomorph. Satz 4.3 liefert: Es existiert eine Stammfunktion, denn
   γ geschlossen in $D \Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 0$

2. Wähle $0 < \varepsilon < r - |a|$. Wir behaupten, es existieren Ω_1, Ω_2 mit $\gamma_1 \subseteq \Omega_1$ und $\gamma_2 \subseteq \Omega_2$, so dass $\frac{1}{z-a}$ auf Ω_1 und Ω_2 holomorph ist.

   Wie kann man sich das vorstellen? Wir betrachten den Einheitskreis $C_1(0)$. In diesem Kreis gibt es einen Punkt a, um den herum gibt es eine offene Kreisscheibe $C_\varepsilon(a)$. Außerdem betrachten wir eine Sekannte, die eigentlich durch a verlaufen würde, aber entlang der Kreisscheibe $C_\varepsilon(a)$ verläuft. Dann wird der Weg γ_1 durch den Abschnitt des Einheitskreises, der Sekannte und (in Integrationsrichtung) links des Punktes a verlaufenden Halbkreises beschrieben. γ_2 entspricht dem anderen Kreisabschnitt des Einheitskreises, wieder entlang der Sekannte (diesmal in entgegengesetzte Richtung laufend) und des „restlichen“ Halbkreises von $C_\varepsilon(a)$. Kurz gesagt entspricht: „$\gamma_1 + \gamma_2$ =kleiner Kreis+großer Kreis“!

   Wegen der Holomorphie existiert eine Stammfunktion und die Integrale verschwinden. Man kann etwa folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\text{großer Kreis}} = -\int_{\text{kleiner Kreis (wg. Orientierung)}}$$

mit $C_\varepsilon(a) = \varepsilon e^{it+a}$, damit folgt:

$$\int_{\text{kleiner Kreis}} \frac{dz}{z-a} = -\int_0^{2\pi} -i \cancel{\frac{\cancel{\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it} + \underbrace{\cancel{a-a}}_{=0}}} = -\int_0^{2\pi} -idt = 2\pi i$$

Insgesamt folgt:

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)\cdot(z-b)} = \frac{2\pi}{a-b}$$

$\square$

3 Übung

3.1 Aufgabe

$f(z) = z^3$ holomorph, $a = 1$, $b = i$, $\Omega = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= \frac{1 - i^3}{1 - i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2i}{2} = i \\ f'(\zeta) &= 3\zeta^3 = 3\left[\lambda + i(1-\lambda)\right]^2 = 3(\lambda^2 - (1-\lambda)^2 + 2i\lambda(1-\lambda)) \\ &= 3 + 6\lambda + i(6\lambda(1-\lambda)) \\ \mathrm{Re}(f'(\zeta)) &\neq 0\end{aligned}$$

3.2 Aufgabe

a)

$$\sin^2(2) + \cos^2(z) = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) - \frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) = 1$$

a)

$$\begin{aligned}\sin(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{iz} &= e^{-iz} \\ \stackrel{z=a+ib}{\Longleftrightarrow} e^{-b}e^{ia} = e^{b}e^{-ia} \Rightarrow e^{-b} &= e^{b} \\ \Rightarrow b &= 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

wir haben also reelle Nullstellen $z = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\cos(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} &= e^{-iz} \\ \stackrel{z=a+ib}{\Longleftrightarrow} e^{ib}e^{ia} &= e^{b}e^{-ia} \\ \Rightarrow e^{-b} = e^{b} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

reelle Nullstellen $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c)
- $\sin,\ \cos$ sind im reellen nicht injektiv, also auch nicht in $\mathbb{C}$.
  - $\cos$ ist surjektiv! Aus Tutorium 2.2.b) $z \mapsto e^{iz}$ ist surjektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Es genügt zu zeigen:

$$\begin{aligned}\forall_{y\in\mathbb{C}}\exists_{v\in\mathbb{C}\backslash\{0\}}: \quad y &= \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right) \\ \stackrel{b\neq 0}{\Leftrightarrow} 0 &= v^2 - 2vy + y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= (v-y)^2 + 1 - y^2\end{aligned}$$

Dann ist $v = \sqrt{y^2 - 1}$ eine Lösung, daraus folgt die Surjektivität. Der sin geht analog.
Bemerkung. Eine Alternative ist

$$\cos(a+ib) = \underbrace{\frac{1}{2}(e^{-b}+e^{b})}_{=\cos(b)}\cos(a) + \underbrace{\frac{i}{2}(e^{-b}-e^{b})}_{=\sin(b)}\sin(a)$$

$\mathbb{C}$ lässt sich überdecken durch die Ellipsen:

$$\varepsilon_b := \{z \in \mathbb{C} \mid z = \cosh(b)\cos(a) + i\sin(b)\sin(a) \mid a \in [0, 2\pi[\}$$

$\Rightarrow$ cos surjektiv!

3.3 Aufgabe

a) ist richtig, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}|\exp(z) - 1| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \\ &= |z| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{k-1}}{k!} \overset{|z|<1}{\leq} |z| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= |z| \cdot (e-1) < 2\,|z|\end{aligned}$$

b) Ist auch richtig, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|e^z| \overset{z=a+ib}{=} \left|e^{a+ib}\right| = e^a \leq e^{\sqrt{a^2+b^2}} = e^{|z|}$$

c) ist auch Richtig:

$$\begin{aligned}\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) =& \frac{1}{4}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\cdot(e^{iw}+e^{-iw}) + \frac{1}{4}(e^{iz}-e^{iz})\cdot(e^{iw}-e^{-iw}) \\ =& \frac{1}{4}\left[e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}\right. \\ & \left. + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}\right] \\ =& \cos(z+w)\end{aligned}$$

d) Richtig. Sind $\sin(z), \cos(z) \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{i(a+ib)} + e^{-i(a+ib)}) = \frac{1}{2}(e^{-b}+e^{b})\cos(a) + i\frac{1}{2}(e^{b}-e^{-b})\sin(a) \\ \sin(z) &= \frac{1}{2}(e^{i(a+ib)} - e^{-i(a+ib)}) = \frac{1}{2}(e^{-b}+e^{b})\sin(a) + i\frac{1}{2}(e^{b}-e^{-b})\cos(a)\end{aligned}$$

3.4 Aufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Zeige:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

Hinweis: $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi$, $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a \leq b$. Es gilt:

$$\int_{\gamma+\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = 0,$$

da $\frac{1}{z}$ holomorph auf dem umschlossenen **Gebieten** ist. Damit folgt

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = -\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = -\int_0^{2\pi} \frac{-aie^{-it}}{ae^{-it}} dt = 2\pi$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin(t) + ib\cos(t)}{a\cos(t) + ib\sin(t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin(t) + ib\cos(t)) \cdot (a\cos(t) + ib\sin(t))}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\sin(t)\cos(t) + iab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\
\Rightarrow 2\pi = \operatorname{Im}\left[\int_\gamma \frac{1}{z} dz\right] &= \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot b\ dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

4 Übung

4.1 Aufgabe

f ist ganze Funktion mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(-n) &= 0 \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n \\
&= z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&= z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z \cdot e^z \\
f^{(1)}(z) &= (z+1)e^z
\end{aligned}$$

Angenommen:

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(z) &= (z+k)e^z \\
\Rightarrow f^{(k+1)}(z) &= (z+(k+1))e^z \\
\Rightarrow f^{(n)}(z) &= (z+n)e^z
\end{aligned}$$

für $z = -n$ erhalten wir

$$f^{(n)}(-n) = \underbrace{(-n+n)}_{=0} e^{-n} = 0$$

4.2 Aufgabe

f ist ganze Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Zu zeigen $\overline{f(\bar{z})}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $g : z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ ist holomorph in $\mathbb{C}$, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \overline{\frac{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}{h}} = \overline{f'(\bar{z})}
\end{aligned}$$

Setze $h(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$. h ist holomorph und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$h(1/h) = \underbrace{f(1/n)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\overline{f(1/n)}}_{\in \mathbb{R}} = 0h(0) \qquad = 0$$

der Identitätssatz liefert dann

$$h \equiv 0$$
$$\Rightarrow \overline{f(\bar{z})} = f(z) \qquad \forall_{z\in\mathbb{C}}$$

Alternativ:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Für $r \in \mathbb{R}$ folgt:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) r^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n) r^n \qquad \in \mathbb{R}$$

Da $f(z) \in \mathbb{R}$ folgt für den Imaginärteil:

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n) r^n \qquad = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}(a_n) = 0 \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow a_n \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$$

4.3 Aufgabe

Zu zeigen ist, dass

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$

konvergieren gleichmäßig auf

$$B_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$$

für $r \in (0,1)$. Wir verwenden hier das Kriterium von Weierstraß (aus AnaII):

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und $f_k : D \to \mathbb{C}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ konvergiert, dann konvergeiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig auf D.

$$g_n(z) := \frac{nz^n}{1-z^n} \qquad h_n(z) := \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$

auf B_r gilt:

$$\begin{aligned}
\|g_n\| &= \max_{|z|\le r} |g_n(z)| = \max_{|z|\le r} n\,|z| \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{\infty} (z^n)^k\right|}_{=\frac{1}{1-z^n}} \\
&\le \max_{|z|\le r} n\,|z| \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (|z|^n)^k}_{=\frac{1}{-|z|^n}} = \max_{|z|\le r} \frac{n\,|z|^n}{1-|z|^n} \\
&= n\frac{r^n}{1-r^n} = \frac{n}{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z^n} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{nk} \\
\Rightarrow \frac{nz^{n-1}}{(1-z^n)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} nkz^{nk-1} \\
\Rightarrow \frac{z^n}{(1-z^n)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} kz^{nk} \qquad \text{Identität für alle } |z| < 1
\end{aligned}$$

Nebenrechnung Ende

$$\begin{aligned}
\|h_n\| &= \max_{|z|\le r} |h_n(z)| = \max_{|z|\le r} \left|\frac{z^n}{(1-z^n)^2}\right| \overset{Id}{=} \max_{|z|\le r} \left|\sum_{k=0}^{\infty} kz^{nk}\right| \\
&\le \max_{|z|\le r} \sum_{k=1}^{\infty} k\,|z|^{nk} \overset{Id}{=} \max_{|z|\le r} \frac{|z|^n}{(1-|z|^n)^2} \\
&= \frac{r^n}{(1-r^n)^2} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1} < \infty \quad \text{(Wurzelkriterium)} \\
\limsup \sqrt[n]{\frac{n}{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}} &= \limsup \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}} = \frac{1}{\frac{1}{r}} = r < 1 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(1-r^n)^2} < \infty
\end{aligned}$$

Dies folgt aus dem Quotientenkriterium. $\frac{r^{n+1}(1-r^n)^2}{r^n(1-r^{n+1})^2} \le r < 1$. Das heißt, sie sind gleichmäßig konvergent auf B_r für $r \in (0,1)$.

b) zu Zeigen ist, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)$$

Für alle z mit $|z| < 1$ gilt:(wegen der Identität):

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2} \overset{Id}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} kz^{nk}$$

wegen der absoluten Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=1}^{\infty} z^{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{1-z^k} - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^k}{1-z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)
\end{aligned}$$

holomorph nach Weierstraß (Satz 6.3) auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$

4.4 Aufgabe

Gesucht sind alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right| dt \le r^3 \qquad \forall_{r>0}$$

Lösung: Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

mit

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{|\zeta - 0|^{k+1}} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^k e^{itk}} dt
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
|a_k| &\le \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right| dt \\
\Rightarrow |a_k| &\le \frac{1}{2\pi} r^{3-k}
\end{aligned}$$

Falls $k \in \{0,1,2\}$ so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines r existiert, sodass schließlich

$$\begin{aligned}
|a_k| &\le \frac{r^{3-k}}{2\pi} < \varepsilon \\
\Rightarrow a_k &= 0 \qquad \text{für } k = 0,1,2
\end{aligned}$$

Falls $k \geq 4$ ist, muss gelten: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein r, das hinreichend groß ist, so dass

$$|a_k| \leq \frac{r^{3-k}}{2\pi} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow a_k = 0 \qquad \forall_{k\geq 4}$$

Notwendige Bedingun ist $f(z) = a_3 z^3$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right| dt = \int_0^{2\pi} |a_3|\, r^3 dt \leq r^3$$
$$\Rightarrow |a_3| \leq \frac{1}{2\pi}$$

das ist die notwendige Bedingung. Einsetzen zeigt, dass die Bedingungen hinreichend sind

$$\Rightarrow \left\{a_3 z^3 \mid |a_3| \leq \frac{1}{2\pi}\right\}$$

5 Übung

5.1 Aufgabe

a) Gesucht: Alle ganze Funktionen mit $\arg(f(z)) \in \mathbb{Q}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ Wäre f nicht konstant, so wäre $f(\mathbb{C}\backslash\{0\}$ nach dem Satz von der Gebietstreue ein Gebiet, also Insbesondere offen, was aber $\arg(f(z)) \in \mathbb{Q}$ widerspräche, denn $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ alos hat

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in \mathbb{Q}\}$$

keine offene Teilmenge.

Damit erfüllen genau die konstanten Funktionen $f \equiv re^{i\varrho},\ \varrho \in \mathbb{Q}$ die Bedingung $\arg(f(z)) \in \mathbb{Q}$

b) Gesucht: alle ganzen Funktionen mit $f(i\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ und $|f(z)| = e^{|z|} - 1$. Aus $|f(z)| = e^{|z|} - 1$ folgt $|f(0)| = e^0 - 1 = 0$ und $\left|f\left(\frac{i}{n}\right)\right| = e^{\frac{i}{n}} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+ \Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$; Außerdem $f(0) = 0$ $f(z) = e^{iz} - 1$ ist nach dem Identitätssatz der einzig mögliche Kandidat.

für $z = -i$ gilt

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{e} - 1\right| \leq 1 < e - 1 = e^{|z|-1}$$

es gibt also keine solche Funktion!

c) Gesucht: Alle ganzen Funktionen mit $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Betrachte $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{f(z)}{z}$. Für diese ist $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = 1$

Aufgabe 2.2 c) liefert: g ist konstant $\Rightarrow g(z) = \frac{f(z)}{z} = e^{i\varrho}$ $\varrho \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$

d) Gesucht: Alle ganzen Funktionen mit $f \circ f = f$

Betrachte eine Nullfolge $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to 0$ und die Folge der Funktionswerte $w_k := f(z_k)$. Dann gilt weil f stetig ist: $w_k = f(z_k) \to f(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(w_k) = f(f(z_k)) = f \circ f(z_k)f(z_k) = w_k$$

und

$$f(0) = f(f(0))$$

Gilt „$w_k = a_j$“ für fast alle $k \neq j$ so folgt nach dem Identitätssatz, dass f konstant ist.

Gilt „$w_k \neq a_j$“ für fast alle $k \neq j$ so folgt nach dem Identitätssatz, dass $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

Also erfüllen die Konstanten Funktionen und die Identität $f \circ f = f$.

5.2 Aufgabe

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^b f(t)e^{zt}dt$ ist die ganze Funktion mit Ableitung $F'(z) = \int_a^b t \cdot f(t)e^{-zt}dt$.
Zunächst einmal existiert $-\int_a^b t \cdot f(t)e^{-zt}dt$, da $\mathrm{Re}[t \cdot f(t)e^{-zt}]$ und $\mathrm{Im}[t \cdot f(t) \cdot e^{-zt}]$ stetig, also integrierbar sind. Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \int_a^b f(t)e^{-zt}\frac{1}{h}(e^{-ht}-1)dt = \int_a^b f(t)e^{-zt}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-ht)^k}{h!}dt. \\ &= \int_a^b \underbrace{f(t)e^{-zt}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-t)^{k-1}h^{k-1}}{h!}}_{=G(h,t)}dt = \int_a^b G(h,t)dt\end{aligned}$$

Nach Satz 6.5 ist $h \mapsto \int_a^b G(h,t)dt$ holomorph, also auch stetig. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0}\int_a^b G(h,t)dt = \int_a^b G(\lim_{h\to 0} h,t)dt \\ &= \int_a^b G(0,t)dt \\ &= -\int_a^b t \cdot f(t)e^{-zt}dt \cdot 1dt\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass F holomorph ist und dass die Ableitung

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-F(z)}{h} = -\int_a^b t \cdot f(t)e^{-zt}dt$$

5.3 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und existiere zu jedem $\omega \in \mathbb{C}$ ein $k_\omega \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k_\omega)}(\omega) = 0$. Zeige: f ist ein Polynom.

1. Jede überabzählbare Teilmenge in $\mathbb{C}$ hat einen Häufungspunkt.

   Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine überabzählbare Teilmenge ohne Häufungspunkt. Dann gibt es zu jedem $m \in M$ ein $\varepsilon_m > 0$, sod dass $B_{\varepsilon_m} \cap M = \{m\}$. In jeder offenen Kugel $B_{\varepsilon_m}(m)$ liegt ein Punkt aus der abzähbaren Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Damit ist die Menge der Kugeln $B_{\varepsilon_m}(m)$ abzählbar. Also ist

   $$M = \bigcup_{m\in M}(B_{\varepsilon_m}(m) \cap M)$$

   abzählbar!

2. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass die Menge $A_k := \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(k)}(z) = 0\}$ überabzählbar ist. Da für jedes $\omega \in \mathbb{C}$ ein $k_\omega \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^{(k)}(\omega) = 0$, ist $\omega \in A_{k_m}$ und somit $\mathbb{C} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Da $\mathbb{C}$ überabzählbar ist und als abzählbare Vereinigung darstellbar ist, muss A_k für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ überabzählbar sein.

3. nach *2.* gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass A_k überabzählbar ist und nach *1.* hat a_k einen Häufungspunkt. Nach dem Identitätssatz ist somit

   $$f^{(k)} \equiv 0. \Rightarrow f \text{ ist ein Polynom}$$

5.4 Aufgabe

Seien $a_1, \ldots, a_N \in \partial D$ die Positionen der N Engel auf dem Einheitskreis. Zeige: Es gibt ein $z \in \partial D$ mit

$$\prod_{i=1}^{N} |z - a_i| \geq 1$$

Die Funktion $f(z) := \prod_{i=1}^{N}(z - a_i)$ ist holomorph und es gilt:

$$|f(0)| = \prod_{i=1}^{N} |a_i| = 1.$$

Nach dem Maximumsprinzip gibt es ein $z \in \partial D$ mit

$$|f(z)| = \prod_{i=1}^{N} |z - a_i| \geq |f(0)| = 1$$

6 Übung

6.1 Aufgabe

a) Zu zeigen: Ist f ein Polynom vom Grad>0 dann hat $f(1/z)$ in $z=0$ einen Pol.

Da f ein Polynom vom Grad >0 ist, folgt

$$
\begin{aligned}
f(1/z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k} \\
\Rightarrow z^n \cdot f(1/z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k
\end{aligned}
$$

damit ist $g(z) := z^n f(1/z)$, $g(0) = a_n \neq 0$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Mit Satz 8.2 folgt, dass $f(1/z)$ in $z=0$ eine Pol hat.

b) f ist ganz, nicht periodisch und nicht konstant. Dann folgt: $f(1/z)$ hat in $z=0$ eine wesentliche Singularität.

Da f periodisch folgt, dass ein $p \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $f(z+p) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert. Da f nicht konstant ist folgt, dass $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ existieren, wobei $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$ ist. Definiere die Nullfolge

$$
z_n^1 : = \frac{1}{\omega_1 + np}, \qquad z_n^2 := \frac{1}{\omega_2 + np}
$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$
\lim_{n\to\infty} f(1/2_n^1) = \lim_{n\to\infty} f(\omega_1 + np) = f(\omega_1)
$$

des weiteren

$$
\lim_{n\to\infty} f(1(2_n^2) = \lim_{n\to\infty} f(\omega_2 + np) = f(\omega_2)
$$

Wegen $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$ ist nach Riemann'schen Hebbarkeitssatz keine hebbare Singularität. Da f ganz ist, gilt: $f(\omega_1) \neq \infty$ und ist dann also keinen Pol.

wesentliche Singularität in $z=0$

c) $f = \frac{p}{q}$ ist rationale Funktion mit $\operatorname{grad} p \leq \operatorname{grad} q$ so hat $f(1/z)$ in $z=0$ eine hebbare Singularität. Wegen $\operatorname{grad} p \leq \operatorname{grad} q$ folgt, dass $\lim_{z\to 0} f(z) = \text{const}$. Wenn $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ ist, folgt, dass $\text{const} = 0$ sein muss. Damit wissen wir nun, dass $\lim_{z\to 0} = \text{const}$ und damit ist $z=0$ nach Riemann eine hebbare Singularität.

6.2 Aufgabe

a) Wir setzen o.B.d.A. $z_0 = 0$ (der allgemeine Fall dann analog), so gilt:

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}^k$$

verwenden wir an dieser Stelle das Cauchy-Produkt, so erhalten wir

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \bar{a}_k \bar{z}^k z^{n-k}.$$

Da diese Reihe gleichmäßig konvergiert, folgt:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \bar{a}_k r^k e^{i\varphi k} r^{n-k} e^{i\varphi(n-k)} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} a_{n-k} \bar{a}_k r^n e^{i\varphi(n-2k)} d\varphi
\end{aligned}$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt nun

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} a_{n-k} \bar{a}_k r^n e^{i\varphi(n-2k)} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \begin{cases} \left[a_{n-k} \bar{a}_k r^n \frac{e^{i\varphi(n-2k)}}{i(n-2k)} \right]_{-\pi}^{\pi}, & \text{für } n \neq 2k \\ \left[a_{n-k} \bar{a}_k r^n \varphi \right]_{-\pi}^{\pi}, & \text{für } n = 2k \end{cases} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \begin{cases} 0, & \text{für } n \neq 2k \\ 2\pi a_{n-k} r^n r^n, & \text{für } n = 2k \end{cases}
\end{aligned}$$

somit betrachten wir den Fall: $n = 2k$, also n ist gerade:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} 2\pi a_{2k-k} \bar{a}_k r^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{a}_k r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.
\end{aligned}$$

b) aus a) den Satz von Liouville folgern: Es sei f eine gerade, beschränkte Funktion, das heißt $|f(z)| \leq B$ mit $B \in \mathbb{R}^+$

Beweis. Da f ganz ist, lässt es sich auf einer beliebigen Kreisscheibe als Potenzreihe darstellen.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \overset{6.2\mathbf{a)}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{\varphi})|^2 d\varphi$$

mit der trivialen Abschätzung erhalten wir

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi B^2 = B^2$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ $|a_k|^2 r^{2n} > 0$ und $B^2 > 0$ folgt:

$$|a_n|^2 r^{2n} \leq B^2 \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}} \vee \forall_{r>0}$$

Da aber r beliebig groß gewählt werden kann, muss gelten: $|a_n| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit folgt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 z^0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = a_0 = \text{const}\,.$$

□

c) aus a) das Maximumsprinzip folgern: Hierzu nehmen wir an, f habe in z_0 ein lokales Maximum.

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(z_0 + re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi$$

sei gegeben, dann folgt mit der trivialen Abschätzung weiter:

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \left| \varphi(z_0) \right|^2$$

das führt uns im weiteren auf

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} &\leq |P(z_0)|^2 - \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - z_0)^n \right|^2 \\ &= \left| a_0 (z_0 - z_0)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_z (z_0 - z_0)^n \right|^2 = |a_0|^2 \end{aligned}$$

und schließlich erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0$$

da aber $|a_n|^2 r^{2n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \in [0, 1]$ folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n} &\leq 0 \\ \Rightarrow |a_n|^2 = 0 & \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}} \\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= a_0 = \text{const} \end{aligned}$$

□

6.3 Aufgabe

[1]

a) *2.⇒1.* $\tilde{G} := G \backslash \{\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(G)\}$ ein Gebiet f und g sind holomorph in $\tilde{G}$. Der Identitätssatz liefert $f \equiv g$ auf $\tilde{G}$.
Hätten f und g Pole unterschiedlicher Ordnung (minimale Ordnung k) in x_0, so wäre

$$(z - x_0)^k f(z)$$

das beschränkt in $U_\varepsilon(x_0) \cap \tilde{G}$ und

$$(z - x_0)^k g(z)$$

unbeschränkt (oder umgekehrt).Damit erhalten wir den Widerspruch zu $f \equiv g$ auf $\tilde{G}$

Damit folgt $f \equiv g$ in ganz G.

b) zu zeigen ist: $f \equiv g \;\Leftrightarrow \{\omega \in G \mid f(\omega) = g(\omega)\}$ hat in G einen Häufungspunkt.

„⇐" Ist der Häufungspunkt von $\{\omega \in G \mid f(\omega) = g(\omega)\}$ **keine** Polstelle, dann folgt aus Aufgabenteil **a)** $f \equiv g$.

Ist der Häufungspunkt z_0 eine **Polstelle** von f mit Ordnung $k_1 \in \mathbb{N}_0$ und Polstelle von g mit Ordnung $k_2 \in \mathbb{N}_0$, dann folgt:

- Angenommen $k_1 \neq k_2$, dann folgt:

  $\tilde{f}(z) = f(z) \cdot (z - z_0)^{\min\{k_1,k_2\}}$ beschränkt in $U_\varepsilon(z_0) \cap G$

  $\tilde{g}(z) = g(z) \cdot (z - z_0)^{\min\{k_1,k_2\}}$ unbeschränkt in $U_\varepsilon(z_0 \cap \tilde{G}$ (oder Umgekehrt). Das ist ein Widerspruch zu Aufgabenteil **a)**. Deshalb folgt: $k_1 = k_2$

Damit folgt:

$$\{\omega \in G \mid \tilde{f}(\omega) = g(\omega)\} = \{\omega \in G \mid f(\omega) = g(\omega)\}$$

hat einen Häufungspunkt, der keine Polstelle ist, da $\tilde{f}, \tilde{g}$ holomorph.

Damit folgt schließlich: $\tilde{f} \equiv \tilde{g}$ und daraus resulitert:

$$f \equiv g$$

[1] nicht unbedingt Klausurrelevant

6.4 Aufgabe

a) Gesucht: Alle Funktionen f, die auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph sind mit

$$|f(z)| \geq \frac{1}{|z|} \qquad \forall_{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}}$$

Wegen $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|} > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ folgt, dass f **nullstellenfrei** in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist.

Damit folgt, dass $\frac{1}{z\cdot f(z)}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und wegen $\frac{1}{|z\cdot f(z)|} \leq 1$ beschränkt. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz ist die Singularität in $z = 0$ hebbar. Damit gibt es eine holommorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Liouville liefert uns dann:

$$\frac{1}{z\cdot f(z)} = d \in \mathbb{C}.$$

Damit hat f notwendig die Form

$$f(z) = \frac{c}{z} \qquad \forall_{z\in\mathbb{C}}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} &|f(z)| = \left|\frac{c}{2}\right| \geq \frac{1}{|z|} && \forall_{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}} \\ &\Rightarrow |c| \geq 1. \end{aligned}$$

Alle Funktionen $\{f(z) = \frac{c}{2} \mid |c| \geq 1\}$ sind Lösungen.

b) Sei f auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph und nicht konstant. Gelte $|f(z)| \geq \frac{1}{1+|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Zu zeigen ist:

$$f(z) = \frac{1}{a+ib} \qquad \forall_{a,b\in\mathbb{C}}.$$

Wegen $|f(z)| \geq \frac{1}{1+|z|} > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist f Nullstellenfrei auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Damit ist $\frac{1}{f}$ holomorph un hat nur $z = 0$ als Singularität. Wegen $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq 1 + |z|$ ist diese nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz hebbar. Damit folgt: $\frac{1}{f}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$.
Betrachte die Potenzreihenentwicklung von

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

um $z = 0$.

$$g(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$$

Mit dem Cauchy'schen Integralformeln folgt:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{\left|g^{(n)}(0)\right|}{n!} = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2\pi i}\max_{|\zeta|=R}\frac{g(\zeta)}{|\zeta|^{n+1}}\cdot 2\pi R\right| && \leq R\frac{1+R}{R^{n+1}} = \frac{1+R}{R^n} \end{aligned}$$

Ist $n \geq 2$, so folgt für $R \to \infty$

$$\begin{aligned} |a_n| &= 0 && \forall_{n\geq 2} \\ \Rightarrow g(z) &= a_0 + a_1 z \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{1}{a+bz}. && \text{(notwendige Bed.)} \end{aligned}$$

f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned} a+bz = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ \Rightarrow a &= 0 \\ |f(z)| &\geq \frac{1}{1+|z|} \\ \Rightarrow \frac{1}{|bz|} &\geq \frac{1}{1+|z|} \\ \Rightarrow 1+|z| &\geq |b|\cdot|z| \\ \Rightarrow |b| &\geq 1+\frac{1}{|z|} && \forall_{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}} \end{aligned}$$

mit $|z| \to \infty$ folgt

$$|b| \leq 1.$$

Alle Funktionen mit $\{f(z) = \frac{1}{bz} \mid |b| \leq 1\}$ sind Lösungen.

c) f ist meromorph auf $\mathbb{C}$. Es gebe $r > 0$, $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n \qquad \forall_{z\in\mathbb{C}\backslash\{D_r(0)\cup\mathcal{P}(f)\}}$$

Zu zeigen: f ist eine rationale Funktion.

Alle Singularitäten außerhalb von $D_r(0)$ sind nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz wegen $|f(z)| \leq M \cdot |z|^n$ hebbar.

In $\overline{D_r(0)}$ kann es nur endlich viele Polstellen geben, denn $\overline{D_r(0)}$ ist kompakt und Polstellen können sich nicht häufen. Das heißt, es existiert kein $k \in \mathbb{N}$, so dass $z_1, \ldots z_k$ genau die Polstellen sind. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ das Maximum der Ordnungen, dann folgt:

$$\prod_{j=1}^{k}(z-z_j)^m \cdot f(z) =: g(z)$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
|g(z)| &= \left| \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^m \cdot f(z) \right| \leq \left| \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^m \cdot M \left| z \right|^k \right| \\
&\leq \tilde{M} \cdot M \left| z \right|^{n+k \cdot m}
\end{aligned}
$$

für geeignetes $\tilde{M} \in \mathbb{R}^+$ und $|z|$ hinreichend groß. Damit folgt, dass g ein Polynom ist. (Polynomiale beschränkt sind nut holomorphe Funktionen). Also ist f eine rationale Funktion.

7 Übung

7.1 Aufgabe

$$\eta\left(\gamma, \frac{i}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \text{auf } \mathbb{C}\backslash\left\{\frac{i}{2}\right\} \text{ nullhomolog}$$
$$\eta\left(\gamma\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \text{nicht nullhomolog auf } \mathbb{C}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

7.2 Aufgabe

a) $\subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise differenzierbar, geschlossen; $\eta(\gamma, \omega)$ die Umlaufzahl von γ um $\omega \in \mathbb{C}$

Zu Zeigen: $z \mapsto \eta(\gamma, z)$ ist stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{\gamma(t) \mid t \in I\}$.

Da I kompakt ist, ist $L(\gamma)$ endlich. Sei ein $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{g(t) \mid t \in I\}$ gegeben. Dann existiert ein $r > 0$ mit $|z - z_0| > r$ für alle $z \in \{\gamma(t) \mid t \in I\}$. Insbbesondere folgt für alle $\omega \in D_{\frac{r}{2}}(z_0)$, das

$$|z - \omega| = |z - z_0 + z_0 - \omega| \geq |z - z_0| - |z_0 - \omega| > \frac{r}{2}$$

für alle $z \in \{\gamma(t) \mid t \in I\}$. Also folgt:

$$\left|\frac{1}{(z - z_0) \cdot (z_0 - \omega)}\right| < \frac{2}{r^2}$$

für alle $z \in \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ und für alle $\omega \in D_{\frac{r}{2}}(z_0)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein δ mit

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon r^2 \pi}{L(\gamma)}; \frac{r}{2}\right\}.$$

Dann gilt für alle ω mit $|\omega - z_0| < \delta$:

zeigen wir die Stetigkeit:

$$\begin{aligned}
|\eta(\gamma, z_0) - \eta(\gamma, \omega)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \left(\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{dz}{z - \omega} \right) \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{z_0 - \omega}{(z - z_0) \cdot (z - \omega)} dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \cdot |z_0 - \omega| \cdot \max_{z \in \{\gamma(t) | t \in I\}} \left| \frac{1}{(z - z_0) \cdot (z - \omega)} \right| \\
&\leq |z_0 - \omega| \cdot \frac{L(\gamma)}{2\pi} \cdot \frac{2}{r^2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

b) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$m $t \mapsto (2e^{2\pi it} + 1)^2$. Bestimme $\eta(\gamma, 0)$, $\eta(\gamma, 2)$ und $\eta(\gamma, \mathbb{C} \backslash \{\gamma(t) \mid t \in I\})$.

Sei $a = r^2 e^{2i\varphi} \in \mathbb{C} \backslash \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ beliebig gewählt. Definiere $\delta : [0,1] \to \mathbb{C}$ und $\delta(t) = 2e^{2i\pi t}$.

$$\begin{aligned}
\eta(\gamma, a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2(2e^{2\pi it} + 1) \cdot 4\pi i e^{2\pi it}}{(2e^{2\pi it} + 1)^2 - a} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2(\delta(t) + 1) \cdot \delta'(t)}{(\delta(t) + 1)^2 - r^2 e^{2i\varphi}} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{\delta'(t)}{\delta(t) + 1 - re^{i\varphi}} + \frac{\delta'(t)}{\delta(t) + 1 + re^{i\varphi}} \right) dt \\
&= \eta(\delta, -1 + re^{i\varphi}) + \eta(\delta, -1 - re^{i\varphi})
\end{aligned}$$

Da δ ein einfach geschlossener Weg ist, ist die Umlaufzahl von δ um einen Punkt immer 0 oder 1.
Damit ist $\eta(\gamma, a) \in \{0, 1, 2\}$. Speziell gilt:

$$\begin{aligned}
\eta(\gamma, 0) &= \eta(\delta, -1) + \eta(\delta, -1) = 1 + 1 = 2 \\
\eta(\gamma, 2) &= \eta(\delta, -1 + \sqrt{2}) + \eta(\delta, -1 - \sqrt{2}) = 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

Da γ beschränkt ist,existiert auch Umlaufzahl 0. Damit ist $\eta(\gamma, \mathbb{C} \backslash \{\gamma(t) \mid t \in I\} = \{0, 1, 2\}$.

7.3 Aufgabe

Sei $P(z)$ ein Polynom mit m_i-fachen Nullstellen a_i, und $i = 1, \ldots, k$.

a) zu Zeigen:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{(z - a_j)}$$

Allgemein gilt für holomorphe Funktionen f und g:

$$\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f'g}{fg} \cdot \frac{fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

Induktiv folgt für holomorphe Funktionen $f_1, \dots f_k$:

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^k f_j\right)'}{\prod_{j=1}^k f_j} = \sum_{j=1}^k \frac{f_j'}{f_j}$$

speziell für das Polynom $P(z) = \prod_{j=1}^k (z-a_j)^{m_j}$ folgt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{c}{c} \sum_{j=1}^k \frac{m_j (z-a_j)^{m_j - 1}}{(z-a_j)^{m_j}} = \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{z-a_j}.$$

b) Für jeden geschlossenen Weg γ mit $a_j \neq \gamma$ für alle $j = 1, \dots, k$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k m_j \eta(\gamma, a_j) &= \sum_{j=1}^k m_j \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a_j} \sum_{j=1} k \frac{m_j}{z-a_j} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz\end{aligned}$$

für $P(z) = c \cdot \prod_{j=1}^k (z-a_j)$.

c) Zu zeigen ist: Die Nullstellen von $P'(z)$ sind Konvexkombinationen von $a_1, \dots, a_k$. Ist $z_0 = a_j$ für $j = \{1, \dots, k\}$ eine Nullstelle von $P'(z)$, so ist die Behauptung klar. Sie $z_0 \neq a_j$ für alle $j = 1, \dots, k$ eine Nullstelle von $P'(z)$. Nach **a)** gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{P'(z_0)}{P(z_0)} &\overset{\textbf{a)}}{=} \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{z_0 - a_j} = \sum_{j=1}^k m_j \frac{\bar{z}_0 - \bar{a}_j}{|z_0 - a_j|^2} \\ \Leftrightarrow \bar{z}_0 \cdot \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{|z_0 - a_j|^2} &= \sum_{j=0}^k \frac{m_j \bar{a}_j}{|z_0 - a_j|^2} \\ \Leftrightarrow z_0 &= \sum_{j=1}^k \frac{\frac{m_j}{|z_0 - a_j|}}{\sum_{i=1}^k \frac{m_j}{|z_0 - a_j|^2}} \cdot a_j \end{aligned}$$

7.4 Aufgabe

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in U, $\omega \in U$ mit $f'(\omega) \neq 0$. zu zeigen ist, für $r > 0$ hinreichend klein gilt:

$$\frac{2\pi i}{f'(\omega)} = \int_{\partial D_r(\omega)} \frac{1}{f(z) - f(\omega)} dz.$$

Wegen $0 \neq f'(\omega) = \lim_{z \to \omega} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$ existiert ein $r > 0$ mit $f(\omega) \neq f(z)$ für alle $z \in \dot{D}_r(\omega)$. Damit ist $g(z) := \frac{z - \omega}{f(z) - f(\omega)}$ auf $\dot{D}_r(\omega)$ holomorph. Ferner ist g in ω holomorph mit $g(\omega) = \frac{1}{f'(\omega)}$. Also ist g auf $D_r(\omega)$ holomorph und die Cauchy-Rieamnn'sche Integralformel liefert:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_r(\omega)} \frac{1}{f(z) - f(\omega)} dz &= \int_{\partial D_r(\omega)} \frac{g(z)}{z - \omega} \\ &= 2\pi i g(\omega) = \frac{2\pi i}{f'(\omega)}\end{aligned}$$

8 Übung

8.1 Aufgabe

a) $\alpha, \beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = 2e^{it}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
\alpha, \beta : [0,1] &\to \mathbb{C} \\
\alpha(s) &= 2e^{2\pi is}, \qquad \beta(s) = e^{2\pi is} \\
H : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{C}\backslash\{0\} \\
H(s,t) &= (2-t) \cdot e^{2\pi is} \\
H(s,0) &= 2e^{i\pi s} = \alpha(s) && \forall_{s\in[0,1]} \\
H(s,1) &= e^{2\pi is} = \beta(s) && \forall_{s\in[0,1]} \\
H(0,t) &= (2-t)e^0 = (2-t)e^{2\pi i} = H(1,t) && \forall_{t\in[0,1]}
\end{aligned}$$

b) $\alpha, \beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = e^{it} + 2i,\ \beta(t) = -e^{it} - 2i\text{in } \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}^+\}$

$$\begin{aligned}
\alpha, \beta[0,1] &\to \mathbb{C} \\
\alpha(s9 &= e^{2\pi is} + 2i \\
H : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}^+\} \\
H(s,t) &= e^{i\pi t}(e^{2\pi is} + 2i) \\
H(s,0) &= e^{2\pi is} + 2i = \alpha(s) && \forall_{s\in[0,1]} \\
H(s,1) &= e^{i\pi}(e^{2\pi is} + 2i) = -e^{2\pi is} - 2i = \beta(s) && \forall_{s\in[0,1]} \\
H(0,t) &= e^{i\pi t}(e^0 + 2i) = e^{i\pi t}(e^{2\pi i} + 2i) = H(1,t) && \forall_{t\in[0,1]}
\end{aligned}$$

c) $\alpha, \beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = e^{it} + 1,\ \beta(t) = e^{it} - 1$ in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

α und β sind wegen

$$\eta(\alpha, 1) = 1$$

und

$$\eta(\beta, 1) = 0$$

nicht homolog. Mit Satz 9.5 folgt dass sie nicht **homotop** sind.

8.2 Aufgabe

a) $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ sind Wege, die folgendermaßen beschrieben sind:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= 1 - e^{2\pi i t}\\ \beta(t) &= -1 + e^{2\pi i t}\\ \gamma(t) &= 1 - e^{-2\pi i t}\end{aligned}$$

$\beta \circ \alpha$ und $\gamma \circ \beta$ sind in $\mathbb{C}\backslash\{-1, +1\}$ nicht homotop. Da α, β, γ geschlossen sind, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\eta(\beta \circ \alpha, 1) &= \eta(\beta, 1) + \eta(\alpha, 1) = 0 + 1 = 1\\ \eta(\gamma \circ \beta, 1) &= \eta(\gamma, 1) + \eta(\beta, 1) = -1 + 0 = -1\end{aligned}$$

sind nicht homolog und nach Satz 9.5 auch nicht homotop.

b) $\beta \circ \alpha,\ \alpha \circ \beta$ sind homotop in $\mathbb{C}\backslash\{1, +1\}$, denn

$$\begin{aligned}H : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{C}\backslash\{-1, +1\}\\ H(s,t) &= \alpha \circ \beta\left(\left(\frac{1}{2}t + s\right) \mod 1\right)\\ H(s,0) &= \alpha \circ \beta(s \mod 1) = \alpha \circ \beta(s) && \forall_{s\in[0,1]}\\ H(s,1) &= \alpha \circ \beta\left(\left(\frac{1}{2} + s\right) \mod 1\right) = \beta \circ \alpha(s) && \forall_{s\in[0,1]}\\ H(0,t) &= \alpha \circ \beta\left(\frac{1}{2}t \mod 1\right) = \alpha \circ \beta\left(\frac{1}{2}t\right)\\ &= \alpha \circ \beta\left(\left(\frac{1}{2}t + 1\right) \mod 1\right) = H(1,t) && \forall_{t\in[0,1]}\end{aligned}$$

ist eine Homotopie!

8.3 Aufgabe

$G \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Gebiet. Zu zeigen: „G ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Jede in G holomorphe Funktion hat eine Stammfunktion“

„$\Rightarrow$“ [1] Sei G einfach zusammenhängend und f eine in G holomorphe Funktion. Sei $c \in G$ beliebig. Da G ein Gebiet ist, ist G offen und zusammenhängend, alos wegzusammenhängend! Also existiert zu jedem $z \in G$ ein Weg $\gamma_{[0,z]}$ von c nach z in G. Definiere $F : G \to \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_{\gamma_{[c,z]}} f(\zeta) d\zeta.$$

[1] Die Abschätzung könnte in der Klausur drankommen, allerdings nicht in einer solchen langen Aufgabe

Diese ist wohldefiniert, denn für zwei Wege $\gamma_{[c,z]}$ und $\tilde{\gamma}_{[c,z]}$ von c nach z, ist $\gamma_{[c,z]} \circ \tilde{\gamma}_{[c,z]}^{-1}$ ein geschlossener Weg und damit nullhomolog, da G einfach zusammenhängend ist. Also liefert der Cauchy'sche Integralsatz

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_{[c,z]} \circ \tilde{\gamma}_{[c,z]}^{-1}} f(\zeta) d\zeta = 0. \\
&\Rightarrow \int_{\gamma_{[c,z]}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_{[c,z]}} f(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}$$

Ferner gilt, da G offen ist, lässt sich für h hinreichend klein ein

$$\gamma_{[z,z+h]}(t) = z + th$$

wählen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|F'(z) - f(z)| &= \left| \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \\
&= \left| \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{[c,z+h]}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{[c,z]}} f(\zeta) d\zeta \right) - f(z) \right| \\
&= \left| \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_{[z,z+h]}} f(\zeta) d\zeta - f(z) \right| \\
&= \left| \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_{[z,z+h]}} f(\zeta) - f(z) d\zeta \right| \\
&\leq \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \max_{\zeta \in \mathrm{Tr}(\gamma_{[z,z+h]})} |f(\zeta) - f(z)| \cdot h \\
&\leq \lim_{h \to 0} \max_{\zeta \in \mathcal{O}_h(\zeta)} |f(\zeta) - f(z)| \to 0,
\end{aligned}$$

da f stetig ist, folgt schließlich $F'(z) = f(z)$ also ist F eine Stammfuntion!

„$\Leftarrow$“ Noch offen!

Ergänzung Habe jede auf G holomorphe Funktion eine Stammfunktion. Sei $\omega \in \mathbb{C} \backslash G$. Dann ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-\omega}$ auf G holomorph, hat also eine Stammfunktion. $\overset{\text{Korollar 3.3}}{\Longrightarrow} \int_\gamma f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma \Rightarrow \eta(\gamma, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-\omega} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = 0$. Dies gilt für alle $\omega \in \mathbb{C} \backslash G \Rightarrow \gamma$ ist nullhomolog. Da dies für alle geschlossenen Wege γ gilt folgt, dass G einfach zusammenhängend ist.

8.4 Aufgabe

Beweis für die Riemann'sche ζ-Funktion

a) zu zeigen ist, dass für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \cdot \sum_{n=1} \infty \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

b) Zu zeigen ist hier: Für $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$ und

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{M \leq n \leq x} (-1)^{n-1} : \\
\int_M^N A(x)(x^{-s})' dx &= \frac{A(N)}{N} - \sum_{n=1} \infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \\
\int_M^N A(x) \cdot (x^{-s})' dx &= \sum_{M \leq j \leq N-1} \int_j^{j+1} A(j)(x^{-s})' dx \\
&= \sum_{M \leq j \leq N-1} A(j) \cdot \left[(x^{-s}\right]_j^{j+1} = \sum_{M \leq j \leq N-1} \underbrace{\sum_{M \leq n \leq j} (-1)^{n-1}}_{=A(j)} \left[\frac{1}{(j+1)^s} - \frac{1}{j^s}\right] \\
&= \sum_{M \leq n \leq N-1} (-1)^{n-1} \sum_{M \leq j \leq N-1} \left(\frac{1}{(j+1)^s} - \frac{1}{j^s}\right)
\end{aligned}
$$

wir haben hier also eine Teleskopsumme, diese liefert uns nun

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{M \leq n \leq N-1} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{N^s} - \frac{1}{n^s}\right) + 0 \\
&= \sum_{M \leq n \leq N(!!!)} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{N^s} - \frac{1}{n^s}\right) \\
&= \frac{A(N)}{N^s} - \sum_{M \leq n \leq N} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^s}
\end{aligned}
$$

c) Da $|A(x)| \leq 1$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{M \leq n < N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| &= \left| \frac{A(N)}{N^s} - \int_M^N A(x)(x^{-s})' dx \right| \\
&\leq \frac{1}{N^{\mathrm{Re}(s)}} + \frac{1}{N^{\mathrm{Re}(s)}} + \frac{1}{M^{\mathrm{Re}(s)}} \\
&\leq \frac{3}{M^{\mathrm{Re}(s)}} && \forall_{N<M} \\
f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \\
f_k(s) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} && \forall_{s \in \mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$
|f_k(s) - f(s)| = \left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| \leq \frac{3}{k^{\mathrm{Re}(s)}}
$$

Zu jedem s mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ existiert eine Umgebung $U(s)$, so dass für alle $\tilde{s} \in U$ gilt: $\operatorname{Re}(\tilde{s}) > 0$. Außerdem existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3}{k^{\operatorname{Re}(\tilde{s})}} < \varepsilon$ für alle $\tilde{s} \in U(s)$. Also ist f_k lokal gleichmäßig konvergent gegen f. Mit Weierstraß folgt: f ist holomorph auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$. Damit hat $\xi(s)$ genau dann Singularitäten, wenn $1 - 2^{1-s} = 0$ ist

$$\begin{aligned} 1 - 2^{1-s} = 0 &\Leftrightarrow e^{(1-s)\log 2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (1-s)\log 2 = 2\pi i k, && k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow s = 1 + \frac{2\pi i k}{\log 2}, && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Diese Singularitäten sind hebbar oder Polstellen (Reihendarstellung von $1 - 2^{1-s}$). Damit folgt, dass ξ meromorph.

d) Für $0 < s < 1$ ist $n \mapsto n^s$ streng monoton wachsend und damit folgt:

$$\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} > 0$$

wir fassen je zwei Therme zusammen und erhalten damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} > 0$$

Ferner ist $1 - 2^{1-s} < 0$ für alle s mit $0 < s < 1$ und mit Aufgabenteil **a)** erhalten wir

$$\xi(s) < 0 \qquad \forall_{0<s<1}$$

8.5 Aufgabe

$$\left\{ \sum_{1leqn \not\equiv 0 \mod 3} -2 \cdot \sum_{n \leq n \equiv 0 \mod 3} \right\} \frac{1}{n^s} = \xi(s)(1 - \xi^{1-s})$$

Abschätzung wie in 8.4 **b)**

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{M \leq n \leq N} a_n \\ a_n &= \begin{cases} 1 & n \not\equiv 0 \mod 3 \\ -2 & n \equiv 0 \mod 3 \end{cases} \\ s &= 1 + \frac{2\pi i k}{\log 3} && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

9 Übung

9.1 Aufgabe

f holomorph in $K_0 \subset \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $P(x_0, \ldots, x_k)$, Polynom $P(f, f', \ldots, f^{(k)}) = 0$ in K_0
Zu zeigen: Läst sich f längs Kreisketten $(K_0, \ldots, K_n)$ fortsetzen $\Rightarrow P(f, f', \ldots, f^{(k)}) = 0$ für alle $z \in \bigcup_{l=0}^n K_l$. Ist f fortsetzbar, so bezeichne f_i die holomorphe Fortsetzung von f auf K_i. Da P ein Polynom ist, ist $g_i(z) := P(f_i(z), f_i'(z), \ldots, f^{(k)}(z))$ holomorph auf K_i. Nach Definition der Kreiskette ist $K_0 \cap K_1 \neq \emptyset$. Wegen $g_0(z) = 0$ auf K_0 folgt aus dem Identitätssatz $g_1(z) = 0$ auf K_1. Induktiv folgt $g_i(z) = 0$ für alle $z \in K_i$ und für alle $i = 0, \ldots, n$.

$$P(f, f', \ldots, f^{(k)}) = 0 \qquad \forall_{z \in \bigcup_{l=0}^n K_l}$$

9.2 Aufgabe

a) zu zeigen: f auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph und injektiv $\Rightarrow$ in $z = 0$ keine wesentliche Singularität.

Sei $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $r = \frac{|a|}{3}$. Dann ist $D_r(a) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und der Satz von der Gebietstreue[1] liefert, dass $f(D_r(a))$ offen ist. Damit existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$D_\delta(f(a)) \subset f(D_r(a)).$$

Da f injektiv ist, gilt:

$$D_\delta(f(a)) \cap f(\dot{D}_r(0)) = \emptyset.$$

Also ist $f(\dot{D}_r(0))$ nicht dicht in $\mathbb{C}$. Nahc Casorati-Weierstraß[2] ist $z = 0$ keine wesentliche Singularität.

b) zu zeigen: Jede in $\mathbb{C}$ holomorphe, injektive Funktion f hat die Form $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ b \in \mathbb{C}$[3]. Die Potenzreihe von f ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Dann ist

$$f(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_{-k} z^k$$

[1] Gebietstreue und der Satz von Casorati- Weierstraß kommen sehr häufig in einer Aufgabe gemeinsam vor!!!
[2] siehe obige Fußnote
[3] da probier ich doch mal eine Potenzreihe aus, die nach dem 1. Glied abbricht

die Laurent-Reihe von $f(1/z)$. Mit $f(z)$ ist auch $f(1/z)$ injektiv. Nach Teil **a)** hat $f(1/z)$ keine wesentliche Singularität in $z = 0$. Damit ist die Laurent-Reihe endlich, das heißt es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$f(1/z) = \sum_{k=-m}^{0} a_{-k} z^k$$

und damit ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

ein Polynom. Nach dem Fundamentalsatz sind nur Polynome vom Grad 1 injkektiv. Damit folgt die Behauptung.

9.3 Aufgabe

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Gebiet, f ist holomorph in Ω, $M \subseteq \mathbb{N}$ unbeschränkt.

a) zu zeigen: f hat holomorphen Logarithmus $\Rightarrow$ f hat holomorphe Wurzeln (Gilt für alle $m \in M$.

Sei $g : \Omega \to \mathbb{C}$ der holomorphe Logarithmus von f, das heißt g ist holomorph mit $f(z) = e^{g(z)}$. Ferner ist f nullstelenfrei. Dann ist $q_m(z) = e^{\frac{1}{m} g(z)}$ eine holomorphe Funktion $q_m : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = q_m(z)^m$ für alle $z \in \Omega$ und für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit folgt, q_m is holomorphe m-te Wurzel von f.

b) zu zeigen: f hat holomorphe m-te Wurzel,$\Rightarrow$ dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass f einen holomorphen Logarithmus hat.

Sei q_m holomorphe m-te Wurzeln, das heißt q_m ist holomorph, $(q_m)^m = f$ für alle $m \in M$ und f ist nullstellenfrei in Ω. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in Ω und alle $m \in M$

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{m \cdot q_m'(z)}{q_m(z)} dz = m \cdot \int_{q_m \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = m \cdot 2\pi i \eta(q_m \circ \gamma, 0)$$

Da dies für alle $m \in M$ gilt udn M unbeschränkt und die Umlaufszahl ganzzahlig ist muss

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

gelten. Da dies für jedes γ gilt, hat $\frac{f'}{f}$ einen Stammfunktion $F(z)$ auf Ω. Diese ist ein holomorpher Logarithmus von f auf Ω (vgl. Beweis Satz 10.3).

9.4 Aufgabe

Sei $f(z))\frac{z}{1+z}$. Beweise oder Wiederlege.

a) $f|_{\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+}$ hat einen holomorphen Logarithmus

Ja! $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$ ist einfach zusammenhängend und f ist dort holomorph und nullstellenfrei. Aus Satz 10.3 liefert die Existenz.

b) $f|_{\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}_0^+\cup\{-1\}\}}$ hat einen holomorphn Logarithmus.

Nein! Angenommen $g(z)$ wäre ein holomorpher Logarithmus von f auf $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}_0^+\cup\{-1\}\}$. Dann ist g holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}_0^+\cup\{-1\}\}$ und $f(z)=\exp(g(z))$.

$$\exp(-g(z))=\frac{1}{f(z)}=\frac{z+1}{z}\cdot h(z)$$

Die Funktion $h(z)$ lässt sich in $z=-1$ durch $h(-1)=0$ holomorph fortsetzen. Da $\exp(-g(z))\neq 0$ für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt, ist das ein Widerspruch!

c) $f|_{\{z\in\mathbb{C}|2<|z|<3\}}$ hat einen holomorphen Logarithmus

Ja! Betrachte

$$\begin{aligned}h(z) &:= f(1/z)=\frac{1/z}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{1+z},\\ h(0) &:= 0\end{aligned}$$

Dann ist $h: D_{\frac{1}{2}}(0)\to\mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Da $D_{\frac{1}{2}}(0)$ einfach zusammenhängend ist folgt mit Satz 10.3: Es gibt einen holomorpher Logarithmus $g: D_{\frac{1}{2}}(0)\to\mathbb{C}$ mit g holomorph und $\exp(g(z))=h(z)$ fmür alle $z\in D_{\frac{1}{2}}(0)$. Also auch für $z\in D_{\frac{1}{2}}(0)\backslash\overline{D_{\frac{1}{3}}(0)}$

$$\Rightarrow f(z)=h(1/z)=\exp(g(1/z))\qquad \forall_{z\in D_3(0)\backslash\overline{D_3(0)}}$$

also hat f einen holomorphen Logarithmus!

Alternativer Beweis: Es gilt: f besitzt einen holomorphen Logarithmus

$\Leftrightarrow \frac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion

$\Leftrightarrow \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$ für alle geschlossenen Wege in $A_2^3(0)$.

Für jeden geschlossenen Weg γ in $A_2^3(0)$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_\gamma \frac{((1+z)-z)\cdot(1+z)}{(1+z)^2\cdot z}dz\\ &= \int_\gamma \frac{1}{z(1+z)}dz=\int_\gamma\frac{1}{z}dz-\int_\gamma\frac{1}{z-(-1)}dz\\ &= 2\pi i[\eta(\gamma,0)-\eta(\gamma,-1)]\end{aligned}$$

Mit obiger Äquivalenz folgt die Existenz eines holomorphen Logarithmus.

10 Übung

10.1 Aufgabe

Begründen Sie die Konvergenz der folgenden uneigendlichen Integrale und berechnen Sie ihren Grenzwert.
Nach dem Riemann'schen Reihenvergleichskriterium existieren die Integrale von

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1}, \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{z^2+1}$$
$$\int_0^\infty \frac{dz}{z^4+1}, \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{z^4+1},$$

da die Reihen

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2+1},$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^4+1}$$

konvergieren und auf $\mathbb{R}$ keine Polstellen sind. Also existieren auch

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2+1} \text{ und } \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^4+1}$$

und ihr Wert ist gleich dem Cauchy'schen Hauptwert. Daher gilt für den Weg γ

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{dz}{z^2+1}}_{\textbf{Cauchy'scher Hauptwert}} = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma\setminus[-R,R]} \frac{dz}{z^2+1}$$

wegen

10.2 Aufgabe

a) zu zeigen: Nullstellen von $P(z) = 3z^3 + z + i$ in $D_1(0)$

Für alle $z \in \partial D_1(0)$ gilt:

$$\left|P(z) - 3z^3\right| = |z+i| \leq 2 < 3 = \left|2z^3\right|$$

„Jetzt kann ich Rouché darauf anwenden". Nach dem Satz von Rouché hat P genauso viele Nullstellen in $D_1(0)$ wie $3z^3$. Also liegen alle drei Nullstellen von $P(z)$ in $D_1(0)$

b) Berechne
$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{P(z)} dz.$$

Das uneigentliche Integral existiert[1] nach Satz 12.4, wenn $\operatorname{grad} P(z) \geq 2$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{P(z)} dz &= \lim_{R\to\infty} \int_{i-R}^{i+R} \frac{e^{iz}}{P(z)} dz \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{P(z)} dz - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma\setminus[-R,R]} \frac{e^{iz}}{P(z)} dz\end{aligned}$$

Da nach **a)** alle Nullstellen von P in $D_1(1)$ liegen, ist $\frac{e^{iz}}{P(z)}$ holomorph auf dem betrachteten Gebiet.

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{e^{iz}}{P(z)} dz = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left|\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma\setminus[-R,R]} \frac{e^{iz}}{P(z)} dz\right| &\leq \lim_{R\to\infty} \pi \cdot R \cdot \frac{c}{R^3} \cdot \max_{t\in[0,\pi]} \underbrace{\left|e^{i(i+R\cdot\cos t + i\sin t)}\right|}_{e^{-1-\sin t}} \\ &\leq \lim_{R\to\infty} \pi c \frac{1}{R^2} = 0\end{aligned}$$

c) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ mit $P(z) = e^{h(z)}$.

[2] Ja, da D einfach zusammenhängendes Gebiet und P nach **a)** keine Nullstelle dort hat (da sie in $D_1(0)$ liegen), liefert Satz 10.3 die Behauptung.

10.3 Aufgabe

Sie $0 < |\lambda| < 1,\ n \in \mathbb{N},\ f(z) = (z-1)^n e^z - \lambda$. Zu zeigen ist:

a) f hat in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ genau n Nullstellen[3].

Definiere $g(z) := (z-1)^n e^z$. Dann hat g genau eine n fache Nullstelle in $z = 1$ und es gilt für alle $z \in \partial K_1(1)$:

$$|f(z) - g(z)| = |\lambda| < 1 = |g(0)| \leq |g(z)|$$

Nach dem Satz von Rouché hat f die gleiche Anzahl von Nullstellen n wie g in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$

[1] auch in der Klausur dürft ihr dann auf diesen Satz bzw auf die reelle Analysis verweisen
[2] Hier passt zufällig Satz 10.3
[3] Es sollte auch hier gleich wieder der Satz von Rouché ins Gedächtniss springen

b) f hat in $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ keine weiteren Nullstellen

Angenommen, z_0 ist eine Nullstelle von f mit $z_0 \notin K_1(1)$ und $\mathrm{Re}(z_0) > 0$. Dann folgt

$$f(z_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \left(\underbrace{|z_0 - 1|}_{\geq 1}\right)^n \underbrace{e^{\mathrm{Re}(z_0)}}_{\geq 1} = |\lambda| < 1.$$

Wegen $z_0 \notin K_1(1)$ ist $|z_0 - 1| \geq 1$ und wegen $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ ist $e^{\mathrm{Re}(z_0)} \geq 1$. Dies ist ein Widerspruch. Damit wissen, wir, dass es keine weiteren Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z_0) > 0\}$ geben kann.

c) Die Nullstellen von f in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ sind einfache Nullstellen.

Wäre z_0 eine mehrfache Nullstelle, so folgt:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= (z_0 - 1)^n e^{z_0} - \lambda = 0, \\ f'(z_0) &= n \cdot (z_o - 1)^{n-1} e^{z_0} + (z_0 - 1)^n \cdot e^{z_0} = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $(z_0(1-n)) \cdot (z_0 - 1)^{n-1} e^{z_0} = 0$ also entweder $z_0 = 1$ oder $z_0 = 1 - n$, Im ersten Fall ist $f(z_0) = f(1) = -\lambda \neq 0$. Im zweiten Fall ist $z_0 \notin \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$. Also sind alle Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ einfach.

10.4 Aufgabe

a) Folgern Sie aus dem Satz von Rouché den Fundamentalsatz der Algebra.

Sei P ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$.

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_n \neq 0.$$

Wähle $R > 1$ so, dass $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < R \cdot |a_n|$ gilt. Dann folgt für alle z mit $|z| = R$

$$\begin{aligned} |P(z) - a_n z^n| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot R^k \\ &\leq R^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < R^n \cdot |a_n| = |a_n z^n| \end{aligned}$$

Also hat P nach dem Satz von Rouché genau wie $a_n z^n$ n-Nullstellen in $\mathbb{C}$, da R beliebig groß gewählt werden kann.

b) Folgern Sie aus dem Satz von Rouché den Satz von der Gebietstreue.

Sei Ω ein Gebiet, f nicht konstant und holomorph. Zu zeigen: $f(\Omega)$ ist ein Gebiet. Da f stetig ist, ist $f(\Omega)$ zusammenhängend. Es bleibt die Offenheit von $f(\Omega)$ zu zeigen, das heißt, für alle $\omega_0 \in f(\Omega)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(\omega_0) \subseteq f(\Omega)$, das heißt wiederum, dass für alle $\omega \in K_\delta(\omega_0)$ ein $z \in \Omega$ existiert mit $f(z) = \omega$. Sei

$\omega_0 \in f(\Omega)$ und $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) = \omega_0$. Da f holomorph und nicht konstant ist, existiert also ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ und

$$f(z) = \omega_0 + a_k(z - z_0)^k + \underbrace{\left[\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k}\right]}_{=:q(z)}(z - z_0)^k.$$

Da q stetig ist und $q(z_0) = 0$, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $z \in K_\varepsilon(z_0)$

$$|q(z)| < |a_k|$$

gilt und $K_\varepsilon(z_0) \subseteq \Omega$ ist offen (Ω ist offen). Somit gilt für ale $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$:

$$\left|f(z) - \omega_0 - a_k(z - z_0)^k\right| = \left|q(z) \cdot (z - z_0)^k\right| < \left|a_k(z - z_0)^k\right|$$

da $f(z) - \omega_0 - a_k(z - z_0)^k$ stetig in ω_0 (bzgl ω) ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $\omega \in K_\delta(\omega_0)$ und für alle $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$

$$\left|f(z) - \omega - a_k(z - z_0)^k\right| < \left|a_k(z - z_0)^k\right|$$

gilt. Nach dem Satz von Rouché hat $f(z) - \omega$ gleich viele Nullstellen in $K_\varepsilon(z_0)$ wie $a_k(z - z_0)^k$, also wegen $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$ mindestens eine. Damit existiert zu jedem $\omega K_\delta(\omega_0)$ ein $z \in K_\varepsilon(z_0) \subseteq \Omega$ mit $f(z) = \omega$, das heißt $\omega \in f(\Omega) \Rightarrow f(\Omega)$ ist offen.

11 Übung

11.1 Aufgabe

f meromorph in einer Umgebung von $\overline{D_1(0)}$, keine Pole auf $\partial D_1(0)$. $z \in D_1(0)$. Die Anzahl der Polstellen stimmt mit der Anzahl der a-Stellen überein, falls $|a| > \max_{z \in \partial D_1(0)} |f(z)|$. Nach dem Argument-Prinzip gilt (da f wegen $|a| > \max_{z \in \partial D_1(0)} |f(z)|$ auf $\partial D_1(0)$ keine a-Stellen und keine Pole hat):

$$\begin{aligned}\#\{a\text{-Stellen von } f \text{ in } D_1(0)\} - \#\{\text{Polstellen von } f \text{ in } D_1(0)\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial D_1(0))} \frac{1}{z - a} dz \\ &= \eta(f(\partial D_1(0), a))\end{aligned}$$

Wegen

$$|a| > \max_{z \in \partial D_1(0)} |f(z)|$$

ist

$$\eta(f(\partial D_1(0)), a) = 0.$$

Damit folgt: Die Anzahl der Polstellen von f in $D_1(0)$ ist gleich der Anzahl der a-Stellen.

11.2 Aufgabe

Berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz$.

Es gilt für alle $z \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

Daher existiert das uneigentliche Integral, da es eine Majorante gibt, und sein Wert ist gleich dem Cauchy'schen Hauptwert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{+r} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} dz.$$

Sei $M_r := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0,\ r > 1,\ |z| < r\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M_r} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} dz &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{-i} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} \\
&= 2\pi i \lim_{z \to -i} \left[(z+i)^2 \cdot \frac{e^{-iz}}{(z+i)^2 \cdot (z-i)^2}\right]' \\
&= 2\pi i \lim_{z \to -i} \frac{-ie^{-iz}(z-i)^2 - e^{-iz} \cdot 2(z-i)}{(z-i)^4} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{-i \cdot e^{-1}(-2i) - 2e^{-1}}{(-2i)^3} \\
&= 2\pi i \frac{i}{2e} = -\frac{\pi}{e}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to \infty} \left| \int_{\partial M_r \setminus [-r,r]} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} dz \right| &\leq \lim_{r \to \infty} \pi r \cdot \max_{z \in \partial M_r \setminus [-r,r]} \left| \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} \right| \\
&\leq \lim_{r \to \infty} \pi r \frac{e^{r \cdot \sin \pi}}{(1+r^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

Insgesamt ist somit

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz &= \lim_{r \to \infty} \operatorname{Re} \int_{-r}^{r} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} dz \\
&= \lim_{r \to \infty} \operatorname{Re} \left[- \int_{\partial M_r} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} dz - \int_{\partial M_r \setminus [-r,r]} \frac{e^{-iz}}{(1+z^2)^2} dz \right] \\
&= \lim_{r \to \infty} \operatorname{Re} \left[- \left(-\frac{\pi}{e} \right) \right] = \frac{\pi}{e}.
\end{aligned}$$

11.3 Aufgabe

Gegeben: f und g sind ganz und haben keine gemeinsame Nullstellen. Zu zeigen: Es existieren A, B ganz mit $A \cdot f + B \cdot g = 1$.
Sei $f, g \not\equiv 0$, z_n die Nullstellen von g und $h_n(z)$ die Hauptteile von $\frac{1}{fg}$ in z, Nach Mittag Leffler gibt es eine in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion M, die in z_n die Hauptteile $h_n(z)$ hat. Das heißt, $\frac{1}{fg} - M$ hat nur Pole in den Nullstellen von f. Damit folgern wir, dass $\left(\frac{1}{fg} - M\right) \cdot f =: B$ ist eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Da die Ordnung des Pols in z_n von M gleich der Ordnung der Nullstelle in z_n von g ist, ist $A := M \cdot g$ holomorph in $\mathbb{C}$. Also sind A, B ganze Funktionen mit

$$A \cdot f + B \cdot g = M \cdot f \cdot g + \left(\frac{1}{f \cdot g} - M\right) f \cdot g = 1$$

Ist $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$ so folgt die Behauptung mit $B = \frac{1}{g}$ bzw $A = \frac{1}{g}$.

11.4 Aufgabe

Gesucht: p meromorph mit Hauptteilen $h_w(z) = \frac{1}{(z-w)^2}$, $w \in \Lambda := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und zeige, es gibt doppelt periodische Funktion bzgl. Λ.
Als Summationsreihenfolge über die Gitterpunkte von Λ legen wir die des Bildes fest (von innen nach außen). Unser betrachtete Reihe wird absolut konvergieren, weshalb die Reihenfolge später hinfällig wird. Wir definieren die Quadrate $Q_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq R,\ |Imm(z)| \leq R\}$. Dann gilt für alle $R \in \mathbb{N}$:

$$|\partial Q_R \cap \Lambda| = 8R.$$

Sei ein $R \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Dann gilt für alle $z \in Q_R \backslash \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in \Lambda \backslash Q_{2R}} \left| \frac{1}{(1-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| &= \sum_{w \in \Lambda \backslash Q_{2R}} \\
&\leq \sum_{K=2R}^{\infty} 8K \cdot \max_{w \in \Lambda \cap \partial Q_k} \frac{|z| \cdot |2w - z|}{|w|^2 \cdot |z-w|^2} \\
&\leq \sum_{K=2R}^{\infty} 8K \cdot \frac{\sqrt{2}R \cdot (2\sqrt{2}K + \sqrt{2}R)}{K^2 \cdot (K-R)^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Damit ist die Reihe

$$\sum_{w \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

normal konvergent[1] für jedes $z \in Q_R \backslash \Lambda$ und beschreibt nach dem Majorantentest (Korollar 6.4) eine holomorphe Funktion auf $Q \backslash \Lambda$.
Sei

$$\mathcal{P}(z) := \sum_{w \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Dann ist

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$$

ebenfalls nach Korollar 6.4 holomorph und absolut konvergent. Daher lassen sich die Summanden beliebig umordnen, also ist $\mathcal{P}'(z)$ doppelt periodisch bzgl. Λ.

Damit sind die Funktionen $p_1(z) := \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z+1)$ und $p_2(z) := \mathcal{P}(z) + \mathcal{P}(z+i)$ konstant, wegen $p_1'(z) = 0 = p_2'(z)$. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \backslash \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(-z) &= \sum_{w \in \Lambda} \left(\frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \sum_{w \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-(-w))^2} - \frac{1}{w^2} \right) \\
&= \sum_{w \in -\Lambda} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \mathcal{P}(z)
\end{aligned}$$

[1] also auch absolut konvergent, das heißt insbesondere, dass wir umordnen können

Daher ist

$$p_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathcal{P} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

also $p_1 \equiv 0$, das heißt, das heißt

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z+i)$$

und

$$p_2\left(-\frac{i}{2}\right) = \mathcal{P}\left(-\frac{i}{2}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{i}{2}\right) = 0,$$

also $p_2 \equiv 0$, das heißt

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z+i)$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$.

$$\Rightarrow \mathcal{P}(z+w) = \mathcal{P}(z)$$

Gilt für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$ und für alle $w \in \Lambda$

12 Übung

12.1 Aufgabe

$f : \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $re^{it} \mapsto \frac{r}{1+r^2}e^{it}$ ist nicht holomorph

(i) Es gilt $0 \leq \frac{1}{2}(r-1)^2 \Leftrightarrow \frac{r}{1+r^2} \leq \frac{1}{2}$. Daher ist $f(D_2(0)) = \overline{D_{\frac{1}{2}}(0)}$, also das Bild des Gebietes $D_2(0)$ ist nicht offen. Da f nicht konstant ist, ist f nach dem Satz von der Gebietstreue nicht holomorph.

(ii) Definiere $g(z) := \frac{z}{1+z^2}$. Wäre f meromorph, so wäre wegen $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nach dem Identitätssatz für meromorphe Funktionen (Aufgabe 6.3) $f \equiv g$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, im Widerspruch zu $g(i) = \infty \neq \frac{1}{2}i = f(i)$. $\Rightarrow$ f ist nicht meromorph und damit folgt, dass f auch nicht holomorph ist.

(iii) Betrachte das Gebiet $D_2(0)$. Dann ist $|f(\partial D_2(0))| = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} = |f(1)|$. Nach dem Maximumsprinzip ist f also nicht holomorph. (Beachte f ist in 0 stetig fortsetzbar)[1].

(iv) Wäre f holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, so ließe sich f in 0 holomorph durch $f(0) = 0$ fortsetzen. Wegen $|f(re^{it})| = \frac{r}{1+r^2} \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2}$ ist f beschränkt, nach Liouville also konstant. Dies steht im Widerspruch zu $f(0) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(1)$. Deswegen folgt: f ist nicht holomorph!

12.2 Aufgabe

Gegeben sind die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)^3},$$
$$g(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Zu zeigen: Für alle $N > 1$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)g(z)dz = \sum_{n=-N}^{N}(-1)^n f(n) + \mathrm{Res}_{z=-\frac{1}{2}}(fg)$$
$$\lim_{N\to\infty}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)g(z)d = 0$$

und folgere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

[1] unebdingt auf die Stetigkeit auf dem **Abschluss** achten!

Die Funktion f hat in $z = -\frac{1}{2}$ einen Pol 3.er Ordnung und g hat Pole in $z \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$ der Ordnung 1. Der Resisduensatz liefert:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)g(z)dz = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{Res}_{z=n}(fg) + \mathrm{Res}_{z=-\frac{1}{2}}(fg).$$

Mit

$$\mathrm{Res}_{z=n}(fg) = \lim_{z\to n} \frac{(z-n)\pi}{\sin \pi z} \cdot f(z)$$

mit l'Hospital erhalten wir

$$= \frac{1}{\cos(\pi n)} \cdot f(n) = (-1)^n f(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\cdot g(z) = \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n f(n) + \mathrm{Res}_{z=-\frac{1}{2}}(fg)$$

Sei $Q_{N+\frac{1}{2}}$ des um 0 zentrierten Quadrates mit Kantenlänge $2N+1$. Nach dem Residuensatz gilt für alle $N \in \mathbb{N}$, da die gleichen Singularitäten umschlossen werden:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)g(z)dz &= \int_{\partial Q_{N+\frac{1}{2}}} f(z)g(z)dz \\ &\leq 4\cdot(2N+1)\cdot \max_{z\in\partial Q_{N+\frac{1}{2}}} \left|\frac{1}{(2z+1)^3}\right| \cdot \left|\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right|\end{aligned}$$

da der zweite Term schwerer ist, schätzen wir ihn zuerst ab! Für $z = t \pm i(N+\frac{1}{2})$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}|\sin(\pi z)| &= \frac{1}{2}\left|e^{i\pi t \mp \left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} - e^{-i\pi t \pm \left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\left|e^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} - e^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}\right| > 1\end{aligned}$$

Für $z = (N+\frac{1}{2}) \pm it$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}|\sin \pi z| &= \left|\frac{1}{2i}\left(e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \mp \pi t} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \pm \pi t}\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \mp \pi t} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \pm \pi t}\right)\cdot\left(e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \mp \pi t} - e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \pm \pi t}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{\mp 2\pi t} + e^{\pm 2\pi t} - e^{i(2N+1)\pi} - e^{-i(2N+1)\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cosh(\pm 2\pi t)}_{\geq 1} - \underbrace{\cosh((2N+1)\pi i)}_{\cos((2N+1)\pi)=-1}\right) \geq 1\end{aligned}$$

Insgesamt folgt für alle $z \in Q_{N+\frac{1}{2}}$

$$|\sin(\pi z)| \geq 1$$

(bis hierhin muss man es nicht abschätzen können in der Klausur, aber ab jetzt wieder...)

Damit ist

$$\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)g(z) \leq 4 \cdot (2N+1) \cdot \frac{1}{(2N)^3} \cdot \pi \to 0$$

für $N \to \infty$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}}(fg) &= \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left[\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)}{(2z+1)^3} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right]^{(2)} \\
&= \frac{\pi}{16} \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sin \pi z} \right)^{(2)} = -\frac{\pi^3}{16}
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
(-1)^{-n} f(-n) &= (-1)^{-n} \frac{1}{(-2n+1)^3} = (-1)^{+n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)^3} \\
&= (-1)^{n-1} f(n-1),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = -\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}}(fg) = \frac{\pi^3}{16} \\
\Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.
\end{aligned}$$

12.3 Aufgabe

(i)

(ii)

(iii)

12.4 Aufgabe

(i)

(ii)