

Funktionentheorie I und II (für Lehramtler)

gelesen von Prof. Steuding

Wintersemester 2008/2009

Sommersemester 2009

L^AT_EX von Maximilian Michel

von keinem Verantwortlichem korrektur gelesen

14. Mai 2009

Die Ballade vom ehrgeizigen Pol

Wie küßten sich beide so innig,
In heißer Liebe entbrannt,
Der Pol und seine Polare,
Auf des Kreises blühendem Rand!

Doch es zog ihn ins Innre des Kreises,
Da ward er gar rasch prominent,
Er glänzte als hohes Polarlicht, -
Doch lebten sie nunmehr getrennt.

Es zog immer mehr ihn zum Zentrum,
Der Ehrgeiz verlockte ihn sehr,
Doch seine schöne Polare
Entschwand ihm mehr und mehr.

Karriere, oh, stolze Karriere!
Bald wurden die Stimmen gezählt;
Da ward er zum Mittelpunkte
Des großen Kreises gewählt.

Doch seine liebe Polare
- Er hatte sie immerhin gern -
War ihm nun ganz entschwunden,
Sie war unendlich fern.

aus **Carmina Mathematica** von H. CREMER

Inhaltsverzeichnis

I. Funktionentheorie I – Wintersemester 2009/2009	6
1. Komplexe Zahlen	8
1.1. Ergänzungen	12
2. Holomorphe Funktionen	14
2.1. Ergänzungen	21
3. Kurvenintegrale	22
3.1. Ergänzungen	27
4. Der Cauchy'sche Integralsatz	28
5. Die Cauchy'schen Integralformeln	35
5.1. Ergänzungen	39
6. Lokal gleichmäßige Konvergenz	40
7. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen	47
8. Isolierte Singularitäten	56
9. Der globale Satz von Cauchy	62
10. Analytische Fortsetzung und komplexer Logarithmus	76
10.1. Ergänzungen	84
11. Laurent-Reihen	85
12. Residuensatz	92
13. Partialbruchzerlegungen	102
14. Ganze Funktionen endlicher Ordnung	109
15. Unendliche Produkte	118
II. Funktionentheorie II – Sommersemester 2009	134

16. Biholomorphe Abbildungen	136
17. Möbiustransformationen	141
18. Normale Familien	150
19. Der Riemann'sche Abbildungssatz	156
A. Approximation und Universalität	162
Index	168
Abbildungsverzeichnis	174

Teil I.

Funktionentheorie 1
Wintersemester 2008/2009

Literaturempfehlungen

- STEIN und SHAKARAZI: „Complex Analysis“- Princeton University Press
gefällt Prof. Steuding gut
- FREITAG und BUSAN „Funktionentheorie“ Springer-Verlag¹
gibt es also zum runter laden...
- FISCHER und LIEB „Funktionentheorie“
- A. KÖCHER, A. KRIEG „Elliptische Funktionen und Modulformen“ vom Springer Verlag, 1998

Allgemeines

Bemerkung. Funktionentheorie (oder auch: **Komplexe Analysis**) heißt, wir betrachten komplexwertige Funktionen **einer Veränderlichen**. Im Wesentlichen geht es hier um Differential und Integralrechnung im Komplexen.

Vieles wird dadurch einfacher:

Beispiel.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \mp \dots$$

konvergiert für $|x| < 1$. Konvergenz dieser **reellen** Potenzreihe erklärt sich aus der Lage der komplexen **Singularitäten**. Man betrachte:

$$1 + x^2 = (x + i) \cdot (x - i)$$

¹Dieses Buch ist sehr nahe an der Vorlesung und hat als Ergänzung 420 Übungsaufgaben zum Teil mit Lösungen

1. Komplexe Zahlen

Historische Motivation: Gleichungen wie

$$x^2 + 1 = 0$$

besitzen in \mathbb{R} keine Lösung. Ein anderes Beispiel ist die versteckte Lösung von $x^3 = 15x+4$:

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Satz 1.1. *Es existiert ein Körper \mathbb{C} mit folgenden Eigenschaften*

1. \mathbb{R} ist ein **Unterkörper** von \mathbb{C} (insbesondere sind Addition und Multiplikation in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} verträglich)
2. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in \mathbb{C} genau zwei Lösungen, nämlich i und $-i$ mit der **imaginären Einheit**

$$i = \sqrt{-1}$$

3. Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist **bijektiv**

Beweis. (siehe Analysis 1 WS 06/07 Vorkurs, bzw Kapitel 13.)

Wichtig zu: $0 \neq z = x + iy$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\bar{z} := x - iy$ die zu $z = x + iy$ **konjugiert komplexe Zahl** (also die Spiegelung an der \mathbb{R} -Achse) und $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** (auch **euklidischer Abstand** zum Nullpunkt genannt). Also ist damit auch

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Die Veranschaulichung der komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene. Nach Satz 1.1 3. ist \mathbb{C} ein 2 dimensionaler Vektorraum über die reellen Zahlen: $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Zu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{Re} z := x$ der **Realteil** und $\operatorname{Im} z := y$ der **Imaginärteil** von z gemäß Satz 1.1 3.. Alternativ zum Beweis mittels der eindeutigen Zuordnung

$$\mathbb{C} \ni x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und der Matrizenmultiplikation; diese liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i \cdot (x_1y_2 + x_2y_1).$$

□

Vorsicht. \mathbb{C} ist *nicht* angeordnet;

$$i^2 = -1 < 0$$

Es gibt also keine Ungleichung mit komplexen Zahlen!

Folgende Ungleichungen sind für alle $z, w \in \mathbb{C}$ definiert, da hier der Betrag der komplexen Zahl verwendet wird. Es gilt demnach:

$$\begin{aligned} |z + w| &\leq |z| + |w| \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \\ ||z| + |w|| &\leq |z - w| \end{aligned}$$

Noch einige elementare Eigenschaften der Konjugation bzw. von Real und Imaginärteil:
Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z \\ \overline{z \pm w} &= \bar{z} \pm \bar{w}, \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + (x - iy)) = \frac{1}{2} \cdot (2x) \\ \operatorname{Im} z &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i} \cdot (2iy) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $z \mapsto \bar{z}$ ein **involutorischer Körperautomorphismus** mit **Fixkörper** \mathbb{R} , algebraisch $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.

Ferner gilt außerdem noch:

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned}$$

Eine \mathbb{C} und damit auch \mathbb{R} zusammen fassende Struktur sind die **Quaternionen** \mathbb{H} (nach RODRIGUES um 1840 und unabhängig von ihm: HAMILTON um 1843). Quaternionen sind vierdimensionale, nicht kommutative \mathbb{R} Algebren von Zahlen

$$x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, \quad \forall x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}$$

1. Komplexe Zahlen

und i, j, k paarweise verschiedene Zahlen mit

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \varphi) &\mapsto r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ &= re^{i\varphi} (= r \exp(i\varphi))\end{aligned}$$

ist surjektiv (aber nicht injektiv wegen der 2π -Periodizität); insbesondere besitzt jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eine Darstellung in **Polarkoordinaten**.

Hier ist $t = |z|$ und das **Argument** $\varphi = \arg(z)$ eindeutig modulo 2π (das heißt bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π), denn

$$\begin{aligned}e^{i(\varphi+2\pi k)} &= e^{i\varphi} (e^{2\pi i})^k \\ &= e^{i\varphi} && k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Wichtig. Die Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ ist $2\pi i$ periodisch!

Etwas zum Nachdenken:

Bemerkung. Was ist hier falsch?

$$e^{ix} = e^{2\pi i \cdot \frac{x}{2\pi}} = (e^{2\pi i})^{\frac{x}{2\pi}} \stackrel{?}{=} 1$$

Die Lösung findet Ihr in der Ergänzung zum Kapitel 10

Kommen wir zurück zur Vorlesung:

Es gilt weiter:

$$(r_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i\varphi_2}) = \underbrace{r_1 r_2}_{\text{Multiplikation der Beiträge}} \underbrace{e^{i\varphi_1 + \varphi_2}}_{\text{Addieren der Argument}}$$

Speziell führt $z = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = re^{i\varphi}$ ist $\bar{z} = re^{-i\varphi}$

Beispiel. Die Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) heißen **n -ten Einheitswurzeln**, gegeben durch

$$\begin{aligned}\xi_k &:= e^{\frac{2\pi i k}{n}} && \text{für } k = 1, 2, \dots, n \\ &= \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n},\end{aligned}$$

Daraus folgt die Formel von EULER-MOIVRÉ:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

GAUSS fand heraus: Das reguläre n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn

$$n = 2^m \prod_j F_j$$

mit paarweise verschiedenen Fermat'schen Primzahlen

$$F : j = 2^{2^j+1}$$

ist (Kreisteilung).

Man beachte:

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^n (x - \xi_k)$$

Frage: Geht das immer?

Wir kennen bereits den **Fundamentalsatz der Algebra**. Dieser besagt: Jedes Polynom lässt sich über \mathbb{C} faktorisieren (\mathbb{C} ist der **algebraische Abschluss** von \mathbb{R}). „Natürliche“ Beweisidee mit der Funktionentheorie...

Gilt ähnliches auch für andere Funktionen?

Beispiel.

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Die Antwort muss lauten: „Ja, allerdings nur für hinreichen glatte Funktionen“.

Wegen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ übertragen sich aus der Topologie der Ebene bekannte Begriffe wie **Offenheit** und **Konvergenz** leicht auf komplexe Zahlen (Vgl. Analysis II).

Beispiel.

- Eine Folge $(z_n)_n$ komplexer Zahlen konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |z_n - z| < \varepsilon$$

gilt. Äquivalent hierzu ist die Konvergenz der einzelnen **reellen** Zahlenfolgen der imaginären Zahlenfolge $z_n = x_n + iy_n$, also von $(\operatorname{Re} z_n)_n$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n$ gegen $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$.

- Eine ε -**Umgebung** eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die **offene Kreisscheibe** vom Radius $\varepsilon > 0$ um z_0 :

$$D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Eine **Umgebung** von z_0 ist eine Menge, die eine ε Umgebung von z_0 enthält. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn es zu jedem Punkt $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $D_\varepsilon(z) \subset U$. Eine Folge $(z_n)_n$ konvergiert also genau dann gegen einen Grenzwert $z \in \mathbb{C}$ (in Zeichen „ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ “), wenn in **jeder Umgebung** von z fast alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder liegen.

1. Komplexe Zahlen

- Ein Punkt z_0 heißt **Häufungspunkt**, der Folge (z_n) , wenn in jeder Umgebung von z_0 unendlich viele Folgenglieder liegen. (Analog definiert man den Häufungspunkt von Mengen).

- **Cauchy-Folge und Vollständigkeit:**

Natürlich gilt: \mathbb{C} ist vollständig, da $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$!

- **abgeschlossen, Rand, beschränkt, kompakt, ...**

HEINE-BOREL: $M \subset \mathbb{C}$ ist kompakt $\Leftrightarrow M$ ist beschränkt und abgeschlossen.

17.10.08

Definition. Eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist **zusammenhängend**, wenn es keine zwei disjunkte, nicht leere, offene Mengen U_1, U_2 mit $U_1 \cup U_2 = U$ gibt. Eine zusammenhängende offene Menge heißt **Gebiet**. Insbesondere lassen sich je zwei Punkte eines Gebietes G durch eine stückweise stetige Kurve (**Weg**) γ in G verbinden.

Ist $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$, so heißen zwei Punkte $p, q \in U$ **Wege-äquivalent**, wenn es in U einen Weg von p nach q gibt. Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennt man die **Zusammenhangskomponente** von U . Jede solche Zusammenhangskomponente ist ein **Gebiet** und es gibt ihrer höchstens abzählbar unendlich viele (Siehe Übung)

Exkurs zum Apfelmännchen der ersten Vorlesung:

Iteration von $P(z) = z^2 + c$ mit variierenden $c \in \mathbb{C}$ gemäß

$$z_0 = 0, \quad z_1 = P(z_0), \quad z_2 = P(z_1), \dots, \quad z_{n+1} = P(z_n), \dots$$

liefert ein **Fraktal** ($\hat{=}$ „selbstähnlich“) – die Menge M ist die so genannte **Mandelbrotmenge**¹. Im deutschen Sprachraum verwendet man häufig den Begriff **Apfelmännchen**. Die Menge M ist folgendermaßen definiert:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid z_n := P^n(0) \not\rightarrow \infty\},$$

wobei M beschränkt ist (siehe auch Übungsblatt 1) und M ist auch **zusammenhängend** (siehe eine spätere Übung). Entdeckt wurden diese Fraktale allerdings schon viel früher von JULIA und FATON um 1919.

1.1. Ergänzungen

Der Zusammenhang zwischen der Polardarstellung und der Darstellung als $z = a + ib$ ist unter der Beachtung des Quadranten, der Betrachtet wird (hier der 1. Quadrant)

$$\arg(z) = \arg(a + ib) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{1 + a^2},$$

wobei $a > 0$ sein muss.

Aus dem zweiten Tutorium wissen wir außerdem:

¹benannt nach dem Mathematiker MANDELBROT, der diese Figuren populär gemacht hat

Merke. Die Komposition holomorpher Funktionen ist wieder eine holomorphe Funktion.

Merke. Wenn $f(z)$ holomorph ist und $f(z) \neq 0$ gilt, dann ist auch $\frac{1}{f(z)}$ holomorph.

2. Holomorphe Funktionen

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist **stetig** in $z_0 \in \Omega$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \Omega \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Äquivalent dazu ist:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Rationale Operationen (außer durch „0“ teilen) und Verkettungen erhalten die Stetigkeit. Nebenbei ist mit f auch die reellwertige Funktion $z \mapsto |f(z)|$ stetig. Das wissen wir bereits aus den Analysis- Vorlesungen.

Definition. Ganz analog zur **reellen** Diffbarkeit definieren wir :

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dann ist f in $z_0 \in \Omega$ **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{2.1}$$

existiert, hierbei ist $0 \neq h \in \mathbb{C}$ mit $z_0 + h \in \Omega$ beliebig. Im Falle der Existenz bezeichnen wir diesen mit $f'(z_0)$ und nennen dies die **Ableitung** von f in z_0 .

Äquivalent hierzu ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

bzw. **lineare Approximierbarkeit**¹ in z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\eta(z)$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (hier ist $\eta(z_0) = f'(z_0)$). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen durch sukzessives Differenzieren (wie in Ana I).

Im Gegensatz zur **reellen** Diffbarkeit ist hier die Existenz des Grenzwertes (2.1) von sehr vielen **Limiten** gefordert. Mit anderen Worten: Es reicht nicht, den Limes von nur einer Seite zu betrachten, sondern man muss sich von möglichst vielen (genau genommen von **allen**) Seiten an z_0 annähern.

Insofern ist **komplexe Diffbarkeit** viel restriktiver als reelle (siehe Beispiel 2.1 unten)

Wie im Reellen zeigt man:

- Polynome (bzw. allgemeiner: rationale Funktionen) sind in **jedem Punkt** ihres Definitionsbereiches **komplex** differenzierbar.

¹ $\hat{=}$ **Tangentenbildung**

- die Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ bzw. die **trigonometrischen Funktionen** ebenso.

Allerdings gilt:

Beispiel 2.1. Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ (Konjugation) ist in **keinem** Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

besitzt keinen eindeutigen Grenzwert für $\lim_{h \rightarrow 0}$ (betrachte hierzu $h = x$ bzw. $h = iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$).

Definition. Ohne Probleme übertragen sich aus der reellen Analysis:

- Eine in einem Punkt komplex diffbare Funktion ist dort auch stetig
- Rechenregeln wie $(f + g)' = f' + g'$, Produkt- und Kettenregel, ...

Definition. Holomorphie:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ **holomorph**² (bzw. [nach Satz 2.3] **analytisch** oder auch **regulär**) in Ω , wenn f in **jedem** Punkt von Ω komplex diffbar ist: Für abgeschlossene Ω fordern wir die **Holomorphie** in einer **offenen Obermenge**.

Beispiel 2.2. $f(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ist in $z_0 = 0$ komplex diffbar, aber in keiner Umgebung von $z_0 = 0$ holomorph.

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{(z_0 + h) \cdot \overline{(z_0 + h)} - z_0 \bar{z}_0}{h} \\ &= \bar{z}_0 + z_0 \cdot \frac{\bar{h}}{h} + \bar{h} \end{aligned}$$

Gegeben ist eine komplexwertige Funktion $f(z)$. Wir betrachten:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

mit $f = u + iv$, $z = x + iy$, wobei u der **Realteil-** und v der **Imaginärteil-Funktionen** **reellwertig** sind, wir schreiben $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 (\simeq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ statt $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vermöge die Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Bekanntlich (folgt aus Ana II) ist F diffbar in $P(x_0, y_0)$, wenn es eine lineare Abbildung J gibt, sodass

$$F(P + h) = F(P) + J(h) + \varepsilon(h) \quad \text{mit } \varepsilon(h) = o(\|h\|)$$

In diesem Fall ist J eindeutig und heißt **Differential** (oder auch **totale Ableitung**) von F , insbesondere existieren die partiellen Ableitungen von u und v nach den reellen Veränderlichen x und y , und J ist die **Jacobi-Matrix** von F :

$$J = J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} F & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} F \\ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} F & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} F \end{pmatrix}.$$

²(griechisch): holo=ganz und morph=Form

2. Holomorphe Funktionen

Falls f komplex diffbar ist im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ ($= P$ entsprechend $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), bestehen Relationen zwischen diesen partiellen Ableitungen. Schreiben $f(z) = f(x, y)$ für $z = x + iy$. Dann folgt aus (2.1) für $h = h_1 + ih_2$ mit $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir nun die einzelnen h_1 und h_2 :

1. Fall $h_2 = 0$, also h ist reell.

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Im Sinne von f als Funktion einer einzigen reellen Veränderlichen.

2. Fall $h_1 = 0$, also h rein imaginär $h = ih_2$:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Also gilt:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \text{ für holomorphe } f}$$

Wegen $f = u + iv$ folgt

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}}_{= \frac{\partial f}{\partial x}} &= \frac{1}{i} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Nach der Trennung von Real- und Imaginärteil erhält man die **Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen**:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{Realteil}} \text{ und } \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{Imaginärteil}}}. \quad (2.2)$$

Bemerkung. Diese Differentialgleichungen verbinden die reelle und die komplexe Analysis.

Definition. Das **Wirtinger-Kalkül**:

Mit den Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

lassen sich diese Cauchy-Riemann'sche DGL'n zu **einer** zusammenfassen

Satz 2.1. *Satz über die totale Diffbarkeit:*

Ist f holomorph in einer (offenen) Umgebung von z_0 , so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.5)$$

und

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}(z_0); \quad (2.6)$$

Schreiben wir ferner $F(x, y) = f(z)$ (wie oben), so ist F total diffbar (im Sinne der reellen Analysis) mit

$$\det J_F(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2. \quad (2.7)$$

Beweis.

$$\operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{Re} \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{f=u+iv}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \stackrel{(2.2)}{=} 0$$

analog erhält man das gleiche mit dem Imaginärteil, was die Äquivalenz von (2.2) und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ zeigt. Es gilt nach dem Wirthinger Kalkül (2.3)

$$f'(z_0) \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \stackrel{(2.3)}{=} \frac{\partial f}{\partial z}$$

und zusammen mit (2.2) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{i \frac{\partial v}{\partial x}}_{=-i \frac{\partial u}{\partial y}} \right) + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{i \frac{\partial v}{\partial y}}_{=\frac{\partial u}{\partial x}} \right) \right) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - 2i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Für den Nachweis der **totalen** Diffbarkeit von F identifizieren wir $z = x + iy$ mit (x, y) und wenden wiederum (2.2) an, (wobei $h = h_1 + ih_2$):

$$\begin{aligned} J_F(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &\stackrel{(2.2)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -i \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} (h_1 + ih_2) \\ &\stackrel{2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}}{=} f'(z_0) \cdot h \end{aligned}$$

□

2. Holomorphe Funktionen

Bemerkung. Hieraus leitet sich auch die **Determinante der Jacobimatrix** ab:

$$\det J_F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left|2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 = |f'(z_0)|^2$$

20.10.08

Bemerkung. Die Cauchy-Riemann'sche DGL (Gleichung (2.2)) in der Form $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ lässt sich so deuten:

Holomorphe Funktionen $f(z)$ sind **unabhängig** von \bar{z} und hängen allein von z ab. (vgl: Beispiel 2.2).

Nun die wichtige Umkehrung von Satz 2.1

Satz 2.2. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv$ komplexwertig mit stetig diffbaren reellwertigen Funktionen u und v , die den Cauchy-Riemann'schen DGL'n (2.2) auf Ω genügen, so ist f holomorph auf Ω und $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Beweis. Schreiben wir u in der Form:

$$u(x + h_1, y + h_2) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + \varepsilon(h)$$

und v so

$$v(x + h_1, y + h_2) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 + i\epsilon(h)$$

mit $\varepsilon, \epsilon = o(\|h\|)$, $h_1 + ih_2$. Mit (2.2) ergibt sich dann

$$f(z + h) = f(z) + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=f'(z)} \cdot (h_1 + ih_2) + \varepsilon(h) + i\epsilon(h),$$

also die **Holomorphie von** f sowie $f'(z) = 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \stackrel{(2.5)}{=} \frac{\partial f}{\partial z}$ (folgt aus Satz 2.1). □

Bemerkung. Der Mathematiker MENCHHOFF hat 1935 gezeigt:

Eine Stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist bereits dann holomorph in Ω , wenn es durch jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ **zwei verschiedene** Geraden L, L' gibt, sodass die Grenzwerte

$$\left\{ \lim_{L \ni z \rightarrow z_0}, \lim_{L' \ni z \rightarrow z_0} \right\} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existieren und **gleich** sind (vgl. Beispiel 2.1).

Spezielle Erscheinungen holomorpher Funktionen sind **Potenzreihen** der Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ mit } a_n \in \mathbb{C}$$

bzw. allgemeiner

$$\sum a_n(z - \omega)^n$$

mit einem $\omega \in \mathbb{C}$, was sich jedoch mit einer **Koordinatentransformation** stets auf $\omega = 0$ reduzieren lässt.

Auf einer solchen Potenzreihe gibt es³ $0 \leq \rho \leq +\infty$,

- $\sum a_n z^n$ konvergiert **absolut** für $|z| < \rho$
- $\sum a_n z^n$ divergiert für $|z| > \rho$
- der **Konvergenzradius** ρ berechnet sich (nach HADAMARD) gemäß $\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, wobei hier die Konventionen „ $\frac{1}{0} = \infty$ “, „ $\frac{1}{\infty} = 0$ “ gelte.
- Auf dem Rande des Konvergenzbereichs, $|z| = \rho$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man denke an $\log(1+z)$ für $z = \pm 1$ in Verbindung mit dem **Abelschen Grenzwertsatz**)

Satz 2.3. *Eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2.8)$$

definiert auf ihrer Konvergenzkreisscheibe $|z| < \rho$ eine **holomorphe Funktion**. Eine Ableitung ist gegeben durch die Potenzreihe, die durch gliedweise Differentiation entsteht, das heißt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1} \quad (2.9)$$

diese besitzt denselben Konvergenzradius wie f . Die Umkehrung des Satzes ist Satz 6.1, zu finden auf Seite 40.

Beweis. Wurde bis auf die Holomorphie in Ana II erbracht; dort wurde die **reelle** Diffbarkeit gezeigt (mittels glm Konvergenz, siehe entsprechendem Satz in der Ana II VL) Für die komplexe diffbarkeit seien z_0 und r mit $|z_0| < r < \rho$ gegeben. Wir wollen, dass f in z_0 komplex diffbar ist mit der Ableitung

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$$

schreiben:

$$f(z) = \left\{ \underbrace{\sum_{n=0}^N a_n z^n}_{=S_N} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n}_{=E_N} \right\} =: S_N(z) + E_N(z), \quad (2.10)$$

³was aus Ana II bekannt ist

2. Holomorphe Funktionen

dann gilt für h mit $|z_0 + h| < r$

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \stackrel{(2.10)}{=} \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - \underbrace{S'_N(z_0) + S'_N(z_0)}_{=0} \quad (2.11)$$

$$- g(z_0) + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \quad (2.12)$$

Wegen $X^n - Y^n = (X - Y) \cdot (X^{n-1} + X^{n-2}Y + \dots + XY^{n-2} + Y^{n-1})$ ist:

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite der **Reihenrest einer konvergenten Potenzreihe** ist (denn g konvergiert für $|z| < \varrho$ absolut). Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gib es also ein M , sodass

$$\left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| < \varepsilon \quad \forall_{N \geq M}.$$

Wegen $\lim_{N \rightarrow \infty} S'_N(z_0) = g(z_0)$ gilt nach etwaiger Vergrößerung von M ebenso

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für } N \geq M.$$

Sei nun $N \geq M$ fest, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon \quad \text{für } |h| < \delta$$

(denn die Ableitung eines Polynoms ergibt sich durch gliedweises Differenzieren). Insgesamt folgt mit (2.11) nun

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| < 3 \cdot \varepsilon \quad \text{für } |h| < \delta$$

und damit folgt: $g = f'$. □

Bemerkung. zu Potenzreihen:

Potenzreihen sind auf ihrer Kreisscheibe **unendlich oft** differenzierbar, ihre Ableitungen ergeben sich durch gliedweises Differenzieren und sind also selbst wieder Potenzreihen (und sukzessive Anwendung von Satz 2.3).

Beispiele. 1. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp'(z)$

$$2. \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \sin' z$$

$$3. \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = -\cos' z$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$$

$$\sin z = \operatorname{Im} e^{iz}$$

1. bis 3. besitzen auf ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihenentwicklungen und sind insbesondere auf ganz \mathbb{C} holomorph.

Definition. Analytisch:

Besitzt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ in jedem Punkt von Ω eine konvergente Potenzreihenentwicklung, so heißt f **analytisch** in Ω . Nach Satz 2.3 ist eine in Ω analytische Funktion dort auch holomorph; in einem späteren Kapitel zeigen wir auch die Umkehrung:

Jede holomorphe Funktion ist auch analytisch, ist also insbesondere **unendlich oft komplex diffbar!** (was für reell diffbare Funktionen sicherlich falsch ist)

2.1. Ergänzungen

In der 2. Übung Funktionentheorie haben wir gezeigt, dass nicht unbedingt $\operatorname{Re} f$ **und** $\operatorname{Im} f$ konstant sein müssen, damit f konstant ist.

Aufgabe 2.1 liefert die folgenden Bedingungen:

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Gebiet, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

a) zu zeigen ist: $f'(z) = 0 \forall z \in \Omega \Rightarrow f$ konstant. Dies folgt aus Korollar 3.4 oder $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$. Da f holomorph ist, folgt:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z} \quad \forall z_0 \in \Omega$$

Mit $f'(z_0) = 0 \forall z \in \Omega$ folgt:

$$0 = f'(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial yx} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (z_0)$$

Mit den Cauchy-Riemann'sche DGLn (2.2)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u(x, y) = \text{const} \\ v(x, y) = \text{const} \end{array} \Rightarrow \text{const}$$

b) Zu zeigen ist, dass $z \mapsto \operatorname{Re}(f(z)) = \text{const}$ zu $f = \text{const}$ führt.

$$f = u + v$$

mit $u = \text{const} \Rightarrow f' = 0 \stackrel{a)}{\Rightarrow} f = \text{const}$

c) zu zeigen ist, dass aus $z \mapsto \operatorname{Im}(f(z)) = \text{const}$ dann auch $f = \text{const}$ folgt (kann man analog zu a) zeigen, oder)

Betrachte $\tilde{f}(z) := if(z) \Rightarrow$ identisch zu b) $\Rightarrow f = \text{const}$

3. Kurvenintegrale

Bemerkung. **Kurvenintegrale** sind ein wesentliches Werkzeug der Funktionentheorie – hierbei ist der Begriff des **Integrationsweges** sehr wichtig, denn in der komplexen Ebene gibt es sehr viele Wege von einem Punkt zu einem anderen.

Zuerst müssen wir jedoch „einfache“ Integrale komplexwertiger Funktionen noch erklären:

Definition. Integrierbarkeit komplexer Funktionen:

Eine Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **komplex Integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind im Sinne der **reellen Analysis**¹. Wir benötigen im Folgenden nur Integrale stückweise stetiger Funktionen.

Dabei erklären wir, das Integral vermöge

$$\int_a^b f(z) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt$$

und ergänzen noch

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

zudem ist

$$\int_a^a f(t) dt = 0.$$

Damit sind die üblichen Rechenregeln des **Riemann-Integrales** auch auf komplexe Integrale anwendbar, Beispielsweise gilt die **\mathbb{C} -Linearität**:

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt,$$

beziehungsweise

$$\int_a^b \overline{f(t)} dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}$$

für irgendwelche stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Auch gelten die **Substitutionsregel** und die **partielle Integration** für stetig diffbare f und g :

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = f(t) g(t) \Big|_{t=a}^b + \int_a^b f'(t) g(t) dt.$$

Dies und ähnliches beweist man durch Zurückführen auf den reellen Fall (separates Betrachten von Real- und Imaginärteil). Was aber wenn wir komplexe Funktionen nur über nicht notwendigerweise reelle Intervalle, sondern „komplexe Wege“ wollen?

¹zum Beispiel im RIEMANN'schen Sinne

Definition. parametrisierte Kurve:

Eine **parametrisierte Kurve** ist eine **stetige Abbildung**

$$z : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t) \quad (\text{mit } a < b)$$

eines kompakten reellen Intervalles, in der komplexen Ebene; sie heißt **glatt**, wenn sie stetig diffbar ist und $z'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$, sie heißt **stückweise glatt**, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ gibt, sodass $z(t)$ glatt auf dem Teilintervallen $[a_j, a_{j+1}]$ ist.

Die Ableitungen in den Endpunkten der jeweiligen Intervallen sind hierbei als rechts-, bzw linksseitiger Grenzwert erklärt und müssen nicht notwendigerweise übereinstimmen.

Definition. Äquivalenz:

Zwei Parametrisierungen

$$z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

bzw.

$$\tilde{z} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$$

heißen **äquivalent**, wenn es eine stetig diffbare Bijektion $s \mapsto t(s)$ von $[c, d]$ nach $[a, b]$ gibt, so dass $t'(s) > 0$ und

$$\tilde{z}(s) = z(t(s))$$

Hierbei stellt $t'(s) > 0$ sicher, dass die Orientierung erhalten bleibt.

Die Familie aller zu $t(s)$ äquivalenten Parametrisierungen definiert eine **glatte Kurve** $\gamma \subset \mathbb{C}$, nämlich das Bild von $[a, b]$ unter $z(t)$. Zu einem solchen γ bezeichne γ^- die Kurve, die aus γ durch die Umkehrung der Orientierung entsteht, parametrisiert vermöge

$$\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t).$$

Die Endpunkte $z(a)$ und $z(b)$ einer Kurve sind unabhängig von ihrer Parametrisierung. Eine glatte oder stückweise glatte Kurve heißt **geschlossen**, wenn $z(a) = z(b)$ gilt; sie heißt **einfach**, wenn es keine **Überschneidungen (Doppelpunkte)** gibt, also wenn

$$z(s) \neq z(t) \quad \text{für } s \neq t,$$

wobei $s = a$ und $t = b$ im Falle geschlossener Kurven auszuschließen sind.

Definition. Kurve:

Im Folgenden betrachten wir nur noch **stückweise glatte Kurven** und bezeichnen diese kurz als „**Kurve**“.

3. Kurvenintegrale

Bemerkung. Die **Kreislinie** $C_r(z_0)$ vom Radius r um den Mittelpunkt z_0

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

die **positive Orientierung** (gegen den Uhrzeigersinn) ist gegeben durch

$$z(t) = z_0 + re^{it} \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]$$

die **negative Orientierung** vermöge

$$z(t) = z_0 + re^{-it}.$$

Im Folgenden bezeichne C stets eine positiv orientierte Kreislinie.

Definition. Kurvenintegral (bzw. **Wegintegral**):

Gegeben ist eine glatte Kurve $\gamma \subset \mathbb{C}$ mit der Parametrisierung $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wobei für den Definitionsbereich D von f noch $\gamma = z([a, b]) \subset D \subset \mathbb{C}$ gelte, so definieren wir das **Kurvenintegral** (bzw. **Wegintegral**) von f längs des Weges γ durch:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt. \quad (3.1)$$

Die **Wohldefiniertheit** folgt mit der Kettenregel:

Ist $\tilde{z} = z \circ t : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ eine äquivalente Parametrisierung, so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt &= \int_c^d f(z(t(s))) \cdot z'(t(s)) \cdot t'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\tilde{z}(s)) \cdot \tilde{z}'(s) ds \end{aligned}$$

das Kurvenintegral ist also **transformationsinvariant!**

Speziell für $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = t$ entsteht das übliche **Riemann-Integral**. Im Falle einer stückweise glatten Kurve γ erklärt man das Integral durch **Summation** über endlich viele glatte Bestandteile von γ (mit obigen Bezeichnungen erhält man):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(z(t)) \cdot z'(t) dt, \quad (3.2)$$

wobei $z(t)$ stückweise glatte Parametrisierungen von γ seien.

Definition. Bogenlänge:

Die **Bogenlänge** einer glatten Kurve γ mit Parametrisierung $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch²:

$$l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt, \quad (3.3)$$

wobei $l(\gamma)$ wohldefiniert ist, bei stückweise glatten Kurven wie oben durch Summation über die glatten Bestandteile.

²siehe auch Ana II

Einige natürliche Eigenschaften von Kurvenintegralen:

Satz 3.1. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\gamma \subset D$ (ist stückweise glatt).

1. **Linearität:** Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt³:

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

2. **Orientierungsumkehrung:**

Ist γ^- die zu γ gehörende Kurve umgekehrter Orientierung, so gilt:

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. **triviale Abschätzung:**

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \stackrel{(3.3)}{\leq} l(\gamma) \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$$

Beweis. 1. und 2. folgen direkt aus der Linearität des Riemann-Integrales; Wir beweisen Aussage 3.:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \stackrel{(3.2)}{\leq} \sup_{t \in [a, b]} |f(z(t))| \cdot \underbrace{\int_a^b |z'(t)| dt}_{=l(\gamma)}.$$

□

Bemerkung. Kurvenintegrale verallgemeinern das Riemann-Integral, insofern bemühen wir uns nun um das Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Definition. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$, so heißt eine in Ω holomorphe Funktion F mit $F' = f$ eine **Stammfunktion** (in mancher Literatur wird sie auch als **Primitive** bezeichnet) von f .

Satz 3.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F . Ist dann γ eine **Kurve** in Ω von ω_1 nach ω_2 . so gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\omega_2) - F(\omega_1).$$

Beweis. (einfache Anwendung des Hauptsatzes aus Ana I in Verbindung mit der Kettenregel:)

Sei $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung von γ , insbesondere $z(a) = \omega_1$, $z(b) = \omega_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \stackrel{F'=f}{=} \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

³Etwas zum Nachdenken: Was würde sich denn Ändern, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ liegen würden?

3. Kurvenintegrale

Für nur stückweise glatte **Kurven** γ ergibt sich durch Summation (mit obigen Bezeichnungen)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &\stackrel{(3.2)}{=} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (F(z(a_{j+1})) - F(z(a_j)))}_{\text{Teleskopsumme}} \\ &= F(z(a_n)) - F(z(a_1)) = F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.3. *Ist γ eine geschlossene Kurve in einer offenen Menge Ω und besitzt die stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, so gilt:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz 3.2, denn für den geschlossenen Weg γ ist $\omega_1 = \omega_2$. □

Bemerkung. In Kapitel 4 werden wir dieses Phänomen (verschwindendes Kurvenintegral über geschlossene Wege) allgemeiner für holomorphe Funktionen untersuchen (Cauchy'scher Integralsatz 4.4 auf Seite 33). Jetzt nur ein Beispiel einer stetigen Funktion, die **keine** Stammfunktion besitzt.

Beispiel. Es sei $r > 0$ und C_r die positiv orientierte Kreislinie vom Radius r um den Ursprung mit der Parametrisierung $z(t) = re^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$ die **Orthogonalitätsrelation** (vgl. Fourier-Analysis/Ana IV).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} z^m dz = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn: Für $m \neq -1$ besitzt $f(z) = z^m$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1}$; für $m = -1$ gilt hingegen:

$$\int_{C_r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it} dt = 2\pi i (\neq 0).$$

Also besitzt die stetige Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ **keine** Stammfunktion! Dieser „**Unfall**“ ist von großer Bedeutung für die Funktionentheorie; einen tieferen Einblick erhalten wir später mit Hilfe des **mehrdeutigen Logarithmus**.

Korollar 3.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein **Gebiet** und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f' \equiv 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Sei $\omega_0 \in \Omega$ fest gewählt. Da Ω zusammenhängend ist, gibt es zu jedem $\omega \in \Omega$ eine Kurve γ in Ω von ω_0 nach ω . Nach Satz 3.2 gilt:

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\omega) - f(\omega_0)$$

Nach Voraussetzung verschwindet das Integral, also gilt für alle $\omega \in \Omega$ $f(\omega) = f(\omega_0)$. □

3.1. Ergänzungen

Aufgabe 3.4:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Zeige:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

Hinweis: $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi$, $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a \leq b$. Es gilt:

$$\int_{\gamma+\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = 0,$$

da $\frac{1}{z}$ holomorph auf dem umschlossenen **Gebieten** ist. Damit folgt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = - \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{-aie^{-it}}{ae^{-it}} dt = 2\pi$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin(t) + ib \cos(t)}{a \cos(t) + ib \sin(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin(t) + ib \cos(t)) \cdot (a \cos(t) + ib \sin(t))}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin(t) \cos(t) + iab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ \Rightarrow 2\pi &= \operatorname{Im} \left[\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \right] = \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot b dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

4. Der Cauchy'sche Integralsatz

27.10.08

Bemerkung. Der Cauchy'sche Integralsatz sagt aus, dass für eine auf der offenen Menge Ω holomorphe Funktion, das Integral über **jede geschlossene Kurve** $\gamma \subset \Omega$, dessen Inneres ebenfalls in Ω enthalten ist, verschwindet:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0;$$

Ein tiefes Resultat, das Topologie (offene Mengen), Holomorphie und Integration (entlang Kurven) verbindet und wichtige Anwendungen besitzt.

Eine schwache Version lässt sich mit dem Satz von GREEN¹ beweisen:

Beweis. Ist

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit reellen und stetig differenzierbaren Funktionen u und v , wobei

$$z = x + iy,$$

so gilt:

$$(u + iv)d(x + iy) = udx + ivdx + iudy - vdy \quad (4.1)$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{(4.1)}{=} \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (vdx + udy)$$

und mit GREEN (siehe Fußnote) ist dies

$$= - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy,$$

wobei Γ das von γ umschlossene² Gebiet in \mathbb{C} sei. Mit dem Cauchy-Riemann'schen DGLn (2.2) auf Seite 16 (Kapitel 2) folgt, dass die Integranden identisch 0 sind und damit also verschwinden. Damit folgt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

□

¹Zur Erinnerung:

$$\int_{\partial\psi} (pdy - qdx) = \int_{\psi} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy$$

(siehe auch Ana III)

²genauer: der Abschluss des Gebietes

Bemerkung. Noch eleganter geht es mit dem **Wirthinger-Kalkül** (Formeln (2.3) und (2.4)), sowie mit dem Satz 2.1:

Beweis. Für holomorphes f ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \frac{1}{2} \int_{\gamma} (f dy - i f dx) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Der Beweis benötigt die **stetige Diffbarkeit** von f , was a priori über den Begriff der Holomorphie hinausgeht. Wir interessieren uns für Integrale holomorphe Funktionen – zunächst über „recht einfache“ Kurven.

Satz 4.1. (Satz von Goursat³, 1884) (Anm: GOURSAT lebte von 1858-1936).

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\Delta \subset \Omega$ ein Dreieck, dessen Inneres ganz in Ω enthalten ist, sowie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0. \quad (4.2)$$

Vorsicht. Dreieck bedeutet hier die positiv orientierte Kurve, gebildet aus den geradlinigen Verbindungsstrecken dreier nicht kollinearere Punkte von \mathbb{C} – nicht das Innere des Dreiecks!

Der wunderschöne Beweis:

Beweis. ⁴ Wir zerlegen das Dreieck $\Delta^{(0)} := \Delta$ in vier **ähnliche** Dreiecke $\Delta_1^{(1)}; \Delta_2^{(1)}; \Delta_3^{(1)}; \Delta_4^{(1)}$ (siehe Abbildung 4.1) durch errichten der geradlinigen Verbindungsstrecken der Kantenmittelpunkte von $\Delta^{(0)}$; diesen geben wir eine Orientierung konsistent mit der Orientierung von $\Delta^{(0)}$, so dass also jede Verbindungsstrecke der Kantenmittelpunkte jeweils **beide Orientierungen** trägt. Insbesondere heben sich die Integrale über diese Geradenstücke (wegen der entgegengesetzten Orientierung) gegenseitig auf.

Also: Statt der Integration über das große Dreieck integrieren wir über die vielen kleinen Dreiecke (Abb 4.1).

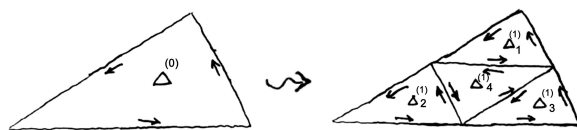


Abbildung 4.1.: Integration über dreieckige Wege

³Dieser Satz und der Beweis ist eine gern genommene mündliche Prüfungsfrage von Prof. Steuding!

⁴nach PRINGSHEIM (1850-1941); Goursat bewies seinen Satz ursprünglich mit Rechtecken

4. Der Cauchy'sche Integralsatz

In der Formelsprache schreiben wir:

$$\int_{\Delta(=\Delta^{(0)})} f(z)dz = \left\{ \int_{\Delta_1^{(1)}} + \int_{\Delta_2^{(1)}} + \int_{\Delta_3^{(1)}} + \int_{\Delta_4^{(1)}} \right\} f(z)dz$$

Für mindestens ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt dann:

$$\left| \int_{\Delta(=\Delta^{(0)})} f(z)dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta_j^{(1)}} f(z)dz \right|.$$

Für ein solches j setzen wir $\Delta^{(1)} := \Delta_j^{(1)}$. Bezeichnet $d^{(k)}$ bzw. $p^{(k)}$ den Durchmesser (=maximalen Abstand⁵) bzw. dem Umfang des $\Delta^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$, so gilt

$$d^{(1)} = \frac{1}{2}d^{(0)}$$

und

$$p^{(1)} = \frac{1}{2}p^{(0)}$$

Fahren wir auf diese Weise mit den Unterteilung der Dreiecke $\Delta^{(1)}, \dots$ fort, so ergibt sich eine Folgen von Dreiecken $\Delta^{(0)}; \Delta^{(1)}; \Delta^{(2)}, \dots$ mit dem Eigenschaften:

$$\left| \int_{\Delta^{(0)}} f(z) \right| \leq 4^k \left| \int_{\Delta^{(k)}} f(z)dz \right| \quad (4.3)$$

sowie

$$d^{(k)} = \frac{1}{2^k}d^{(0)}, \quad p^{(k)} = \frac{1}{2^k}p^{(0)} \quad (4.4)$$

für die entsprechenden Durchmesser bzw. Umfänge.

Bezeichnet $\overline{\Delta^{(k)}}$ nun den Abschluss des Inneren von $\Delta^{(k)}$, so liegen die $\overline{\Delta^{(k)}}$ ineinander geschachtelt, also gilt:

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta^{(0)}} \supset \overline{\Delta^{(1)}} \supset \dots \supset \overline{\Delta^{(k)}} \dots$$

Die entsprechenden Durchmesser $d^{(k)}$ bilden eine **Nullfolge**, mit der Vollständigkeit von $\mathbb{C} (\simeq \mathbb{R}^2)$ gibt es genau einen Punkt ω , der in allen Dreiecken $\overline{\Delta^{(k)}}$ liegt. Mit der Holomorphie von f gilt (lineare Approximierbarkeit):

$$f(z) = f(\omega) + f'(\omega)(z - \omega) + \underbrace{\varepsilon(z)(z - \omega)}_{\text{lineare Approximierbarkeit}} \quad \text{mit } \lim_{\omega \rightarrow z} \varepsilon(z) = 0.$$

Da sowohl die konstante Funktion $f(\omega)$ als auch die lineare Funktion $f'(\omega)(z - \omega)$ Stammfunktionen besitzen, sind ihre Integrale längs den geschlossenen Kurven $\Delta^{(k)}$ nach Korollar 3.3 gleich Null und damit

$$\int_{\Delta^{(k)}} f(z)dz \stackrel{\text{lin. Approx.}}{=} \int_{\Delta^{(k)}} \varepsilon(z)(z - \omega)dz.$$

⁵von was genau?

Wegen $\omega \in \overline{\Delta^{(k)}}$ und $z \in \Delta^{(k)} = \partial\overline{\Delta^{(k)}}$ folgt $|z - \omega| \leq d^{(k)}$. Also folgt nach Satz 3.1 3.:

$$\left| \int_{\Delta^{(k)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta^{(k)}} \varepsilon(z)(z - \omega) dz \right|$$

mit der trivialen Abschätzung (Satz 3.1 3.) erhält man nun:

$$\leq \varepsilon_k d^{(k)} p^{(k)}$$

mit:

$$\varepsilon_k := \sup_{z \in \Delta^{(k)}} |\varepsilon(z)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

nach Konstruktion (siehe lineare Approximation)

Insbesondere ergibt sich aus (4.3) und (4.4):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta(=\Delta^{(0)})} f(z) dz \right| &\stackrel{(4.3)}{\leq} 4^k \left| \int_{\Delta^{(k)}} f(z) dz \right| \leq 4^k \varepsilon_k d^{(k)} p^{(k)} \\ &\stackrel{(4.4)}{\leq} \varepsilon_k d^{(0)} p^{(0)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.2. *Ist f in einer offenen Menge Ω holomorph, die ein Rechteck R und dessen Inneres enthält, so gilt*

$$\int_R f(z) dz = 0 \tag{4.5}$$

Beweis. ergibt sich sofort, durch die Errichtung einer Diagonalen in dem Rechteck und Anwendung von Satz 4.1. □

Eine wichtige Konsequenz des GOURSAT'schen Satzes (Satz 4.1) ist:

Satz 4.3. *Eine in einer offenen Kreisscheibe D holomorphen Funktion f besitzt eine Stammfunktion.*

Beweis. O.B.d.A. habe D den Ursprung als Mittelpunkt. Zu $z \in D$ sei γ_z der **Polygonzug**, der aus den höchstens zwei Linienelemente $[0, \operatorname{Re} z]$ und $[\operatorname{Re} z, z]$ ($= \{\operatorname{Re} z + it \mid 0 \leq t \leq \operatorname{Im} z\}$) (bzw. umgekehrt) mit Orientierung von 0 bis z definiert ist.

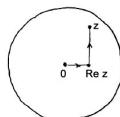


Abbildung 4.2.: Einteilung der Bewegung in Real und Imaginärteil von z , also $z = [0, \operatorname{Re} z] + [\operatorname{Re} z, z]$

4. Der Cauchy'sche Integralsatz

Sei nun:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega;$$

dann ist F **wohldefiniert** (klar) und **holomorph** in D mit $F' = f$. Zu festem $z \in D$ und $h \in \mathbb{C}$ (wobei $z + h \in D$), gilt nämlich:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(\omega) d\omega - \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega;$$

das heißt, f wird zunächst entlang des Weges γ_{z+h} integriert, dann entlang γ_z in **umgekehrter Orientierung** (wegen des negativen Vorzeichens beim zweiten Integral). Für allgemeines h ergibt sich ein Integrationsweg wie in Bild 1 (siehe Abb. 4.3) wobei sich die Integrale über die entgegengesetzten Orientierungen zu Null addieren, sodass also der Weg in Bild 2 verbleibt. Vervollständigen wir Bild 2 zu einem Rechteck und einem Dreieck (Bild 3), so liefern Satz 4.1 (Integral über Dreieck verschwindet) bzw. Korollar 4.2 (Rechteck verschwindet):

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(\omega) d\omega,$$

wobei η das gerade Linienelement $[z, z+h]$ von z nach $z+h$ bezeichnet.

31.10.08⁶

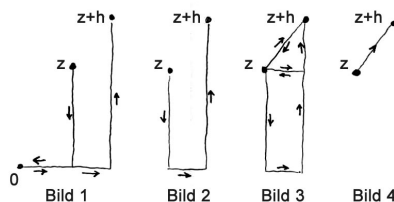


Abbildung 4.3.: Bilder 1 bis 4 des Integrationsweges von z nach $z+h$

Mit der Stetigkeit von f in z gilt:

$$f(\omega) = f(z)\varepsilon(\omega). \quad (4.6)$$

mit $\lim_{\omega \rightarrow z} \varepsilon(\omega) = 0$. Also:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(\omega) d\omega + \int_{\eta} \varepsilon(\omega) d\omega,$$

wobei sich das erste Integral über die konstante Funktion $f(z)$ nach Satz 3.2 berechnet als

$$f(z) \int_{\eta} d\omega = f(z)\omega \Big|_z^{z+h} = h \cdot f(z).$$

⁶Weierstraß erblickte am 31.10.1815 das Licht der Welt

Für das zweite Integral schätzen wir ab (Triviale Abschätzung, Satz 3.13.):

$$\left| \int_{\eta} \varepsilon(\omega) d\omega \right| \leq \sup_{\omega \in \eta} |\varepsilon(\omega)| \cdot |h|$$

mit $\lim_{\omega \rightarrow z} \varepsilon(\omega) = 0$

$$= o(|h|)$$

für $|h| \rightarrow 0$. Also ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Die Fälle $h \in \mathbb{R}$ bzw. $h \in i\mathbb{R}$ behandelt man analog. □

Bemerkung. Lokal besitzt also **jede** holomorphe Funktion eine Stammfunktion⁷!

Satz 4.4. (Cauchy'scher Integralsatz für Kreisscheiben, um 1825):

Ist f holomorph in einer Kreisscheibe, so gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ in dieser Kreisscheibe.

Beweis. Nach Satz 4.3 hat f eine Stammfunktion, die Behauptung folgt dann aus Korollar 3.3. □

Korollar 4.5. *Ist f holomorph in einer offenen Menge Ω , die einem Kreis C und sein Inneres enthält, so gilt:*

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Beweis. Ist D die Kreisscheibe mit Rand $C = \partial D$, so gibt es eine D umfassende Kreisscheibe D' nur f ist holomorph in D' (da Ω offen ist). Mit Satz 4.4 angewandt auf D' folgt die Behauptung. □

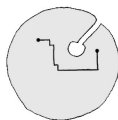


Abbildung 4.4.: Beispiel für das Innere einer Kurve

Bemerkung. Diese Resultate lassen sich ohne Probleme verallgemeinern, wenn immer das Innere einer Kurve eindeutig auszumachen ist (siehe Abb. 4.4)! Der Kurvenbegriff ist topologisch im Allgemeinen nicht trivial⁸, und einer erschöpfende Erklärung erfolgt später (**einfacher Zusammenhang, Homotopie,...**)

⁷Später dehnen wir dies auf allgemeinere Gebiete als Kreisscheiben aus...

⁸Jordan'scher Kurvensatz Vgl Ana IV

4. Der Cauchy'sche Integralsatz

Der Cauchy'sche Integralsatz erlaubt als Anwendung die Berechnung gewisser uneigentlicher Integrale, wie zum Beispiel

$$e^{-\pi\omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \omega} dx \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

(die Gauß-Dichte ist Fixpunkt der Fourier-Transformation, vgl. Ana IV)

Beweis. (Eher ein Nachweis):

Sei zunächst $\omega > 0$ und $f(z) = e^{-\pi z^2}$, also holomorph in ganz \mathbb{C} , sowie γ_R das Rechteck mit Ecken $\pm R(\in \mathbb{R})$, $\pm R + i\omega(\notin \mathbb{R})$ (siehe Abb 4.5) und positiver Orientierung.

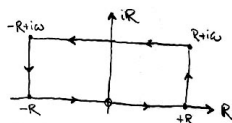


Abbildung 4.5.: Rechteck mit den entsprechenden Punkten laut Beweis

Nach Satz 4.4 gilt:

$$0 = \int_{\gamma_R} f(z) dz = \left\{ \int_{-R}^R + \int_{+R}^{R+i\omega} + \int_{R+i\omega}^{-R+i\omega} + \int_{-R+i\omega}^{-R} \right\} f(z) dz.$$

Hier gilt für die vertikalen Integrale: (wobei hier noch $z = \pm R + iy$ und $dz = idy$ gesetzt wird)

$$\begin{aligned} \int_{\pm R+i0}^{\pm R+i\omega} f(z) dz &= i \int_0^\omega f(\pm R + iy) dy \\ &= i \int_0^\omega e^{-\pi(R^2 \pm 2iRy - y^2)} dy \end{aligned}$$

bzw. $dz = d(x + iy) \stackrel{x=0}{=} idy$

$$\left| \int_{\pm R}^{\pm R+i\omega} f(z) dz \right| \stackrel{\substack{\text{(triviale Absch.} \\ \text{Satz 3.1)}}}{\leq} \underbrace{\omega \cdot e^{i\pi R^2} e^{\pi\omega^2}}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0}$$

mit $|e^{iR}| = 1$. Für die horizontalen Integrale gilt (mit $z = x$ bzw. $z = x + i\omega$):

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

(siehe hierzu die Beweise aus Ana III), sowie

$$\int_{-R}^{+R} e^{-\pi(x+i\omega)^2} dx = e^{\pi\omega^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \omega} dx$$

Vergleiche mit Formel (4.7). Bildet man den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ ist diese Formel (4.7) bewiesen. Für $\omega < 0$ betrachte man das an der reellen Achse gespiegelte Rechteck, der klassische Fall $\omega = 0$ (aus Ana III bekannt) wurde im Nachweis von (4.7) benutzt. \square

5. Die Cauchy'schen Integralformeln

Bemerkung. Die **Cauchy'schen Integralformeln** liefern eine Integraldarstellung für eine holomorphe Funktion bzw. ihre Ableitungen; sie bilden ein wichtiges Werkzeug der Funktionentheorie!

Satz 5.1. (CAUCHY, 1831 in der „*Turiner Verbannung*“):

Sei D eine offene Kreisscheibe mit Rand $C = \partial D$ sowie die abgeschlossene Kreisscheibe \bar{D} enthalten in einer offenen Menge Ω und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden Punkt $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5.1)$$

Bildlich kann man sich das ganze so vorstellen, dass in der offenen Menge Ω eine Kreisscheibe $C = \partial D$ liegt, in deren inneres der Punkt z liegt.

Bemerkung. Die Funktionswerte $f(z)$ in dem inneren Punkten $z \in D$ sind also bereits durch die Funktionswerte auf dem Rand $C = \partial D$ eindeutig bestimmt.

— Eine Bemerkenswerte **Mittelwerteigenschaft** holomorpher Funktionen —

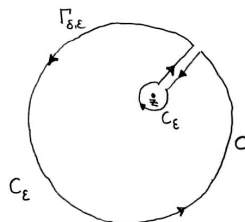


Abbildung 5.1.: Geschlitzter Kreisring

Beweis. Für $z \in D$ betrachtet man den Integrationsweg $\Gamma_{\delta, \epsilon}$. Dies ist ein Integrationsweg über einen geschlitzten Kreisring (Abb 5.1). δ ist dabei der Abstand zwischen den beiden Geraden-Segmenten und ϵ ist der Radius der kleineren Kreislinie $C_{\epsilon, \delta}$ um z . Die Funktion

$$\zeta \mapsto F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

ist holomorph für $\zeta \in \Omega \setminus \{z\}$ und also folgt mit dem Cauchy'schen Integralsatz 4.4 für $\Gamma_{\delta, \epsilon}$ (unter der Berücksichtigung der Bemerkung nach dem Beweis von Korollar 4.5)

$$\int_{\Gamma_{\delta, \epsilon}} F(\zeta) d\zeta = 0.$$

5. Die Cauchy'schen Integralformeln

Im Grenzwert $\delta \rightarrow 0$ heben sich (wegen der Stetigkeit von F) die beiden Integrale über die gegenläufig orientierten Geraden-Segmente gegenseitig auf. Zur Berechnung des Integrales über den kleinen Kreis $C_{\varepsilon,0}$ benutzen wir

$$F(\zeta) = \underbrace{\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}}_{\text{äußerer Ring}} + \underbrace{\frac{f(z)}{\zeta - z}}_{\text{innerer Ring}}.$$

Auf Grund der Holomorphie von f in z ist der erste Term rechts beschränkt (Differenzenquotient) und also folgt mit der trivialen Abschätzung:

$$\left| \int_{C_{\varepsilon,0}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \underbrace{\max_{\zeta \in C_{\varepsilon,0}} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right|}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ferner gilt (mit der negativen Orientierung $\zeta = z + \varepsilon e^{-it}$ auf C_ε)

$$\int_{C_{\varepsilon,0}} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{-i\varepsilon e^{-it}}{\varepsilon e^{-it}} dt = -2\pi i f(z).$$

Also ergibt sich:

$$0 = \lim_{\delta, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} F(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_{0,0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - 2\pi i f(z),$$

wobei wir hier wieder unsere zuerst definierte Funktion $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ verwenden. □

Bemerkung. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ reell stetig diffbar in Ω , so gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

wie man mit dem STOKES'schen Integralsatz zeigt. Insofern ist Satz 5.1 von Cauchy also ein Spezialfall des Stokes'schen Satzes (Ana III); im Falle der **Holomorphie** verschwindet auf Grund der Cauchy-Riemann'schen DGL (2.2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = 0$ (nach Satz 2.1) das **Gebietsintegral** über D

Beispiel. 1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} (\sin x)^{2n} dx = \int_0^{2\pi} (\cos x)^{2n} dx$$

mit $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{-i}{2^{2n}} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} dz \\ &= \frac{-i}{2^{2n}} \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} dz \end{aligned}$$

mit Satz 5.1 und „ $\int \sum = \sum \int$ “ bzw der Orthogonalitätsrelation aus Kapitel 3 folgt

$$= \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=2} \frac{\sin \zeta}{\zeta + i} d\zeta &= 2\pi i \sin(-i) \\ &= \pi \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

Satz 5.2. Cauchy'sche Integralformeln:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex diffbar (!) und ist $C \subset \Omega$ eine positiv orientierte Kreislinie deren Inneres ganz in Ω enthalten sei, so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (5.2)$$

für alle z aus dem Inneren von C und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Bemerkung. Dieser Satz erlaubt **fraktales Differenzieren!**

Beweis. (Geht per Induktion nach n):

Der Fall $n = 0$ ist bewiesen durch Satz 5.1. Es verbleibt der **Induktionsschritt**: $n \mapsto n+1$: Angenommen f besitzt eine $(n-1)$ -te Ableitung mit

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Für hinreichend kleines h ergibt sich damit der Differenzenquotient

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta$$

und zusammen mit der bereits benutzten Identität $X^n - Y^n = (X - Y) \cdot (X^{n-1} + X^{n-2}Y + \dots + X \cdot Y^{n-2} + Y^{n-1})$ angewandt mit $X = \frac{1}{\zeta - z - h}$ und $Y = \frac{1}{\zeta - z}$, ergibt sich:

$$\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} = \frac{h}{(\zeta - z - h) \cdot (\zeta - z)} \cdot (X^{n-1} + Y^{n-2} \cdot Y \dots + XY^{n-2} + Y^{n-1})$$

Da für kleines h aber $z+h$ und z endlichen Abstand zur Kreislinie C haben, ergibt sich für $h \rightarrow 0$ also der Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^2} \cdot \underbrace{\frac{n}{(\zeta - z)^{n-1}}}_{=\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{n-1} X^j Y^{n-1-j}} d\zeta, \end{aligned}$$

was die Existenz der n -ten Ableitung $f^{(n)}(z)$ impliziert mit genau dem angegebenen Grenzwert. \square

5. Die Cauchy'schen Integralformeln

Bemerkung. Weshalb kann ich den Grenzwert unter das Integral ziehen? Wir betrachten eine beschränkte Funktion und daher folgt glm. Konvergenz

Korollar 5.3. Cauchy'sche Ungleichungen:

Sei Ω offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sowie D eine offene Kreisscheibe vom Radius R um den Mittelpunkt z_0 , die mit ihrem Rand $C = \partial D$ ganz in Ω enthalten sei. Dann gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \cdot \|f\|_C, \quad (5.3)$$

wobei $\|f\|_C := \max_{z \in C} |f(z)|$ das **Betragsmaximum** von f auf C ist.

Beweis. durch Anwenden von der Cauchy'schen Integralformeln (Satz 5.2, genauer Formel (5.2)) und der trivialen Abschätzung (Satz 3.1 3.)

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\stackrel{(5.2)}{=} \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi})}{(Re^{i\varphi})^{n+1}} iRe^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq n!R^{-n} \|f\|_C. \end{aligned}$$

□

Definition. ganze Funktion:

Eine in ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion nennt man auch **ganze Funktion**.

Nun beschreiben wir die Wertemenge ganzer Funktionen:

Satz 5.4. ¹(Satz von Liouville, 1847):

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Bemerkung. Nicht konstante, auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktionen nehmen also dem Betrage nach beliebig große Werte an! (Beispiel: \cos : Im reellen ist er eher langweilig, im komplexen nimmt er allerdings beliebig große Werte an!

Beweis. Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ und jedes $R > 0$ liefern die Cauchy'schen Ungleichungen (Korollar 5.3)

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \|f\|_{C_R(z_0)} \leq \frac{B}{R}$$

mit einer absoluten konstanten $B \geq |f(z)|$ für die auf ganz \mathbb{C} beschränkte ganze Funktion f . Mit $R \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$f'(z_0) = 0$$

bzw., da $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, $f' \equiv 0$ und nach Korollar 3.4 folgt die Konstantheit von f □

¹Auch dieser Satz mit Beweis ist eine beliebte mündliche Prüfungsfrage von Prof. Steuding!

Korollar 5.5. Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes nicht konstante Polynom \mathcal{P} mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C}

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (5.4)$$

Beweis. Angenommen, \mathcal{P} besäße keine Nullstelle in \mathbb{C} , so wäre $\frac{1}{\mathcal{P}}$ eine beschränkte ganze Funktion und also nach dem Satz 5.4 von LIUVILLE konstant.

Hierbei ist lediglich noch die Beschränktheit zu zeigen; Sei also:

$$\mathcal{P}(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

mit $n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $z \neq 0$

$$\frac{\mathcal{P}(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Hierzu geht jeder Term in der Klammer gegen Null für $|z| \rightarrow \infty$; es gibt also ein $R > 0$, so dass für $|z| > R$

$$|\mathcal{P}(z)| \geq c |z|^n$$

(etwa $c = \frac{|a_n|}{2} \neq 0$). Also ist $\mathcal{P}(z)$ für $|z| > R$ nach unten beschränkt gegen eine positive Konstante.

Als stetige Funktion ohne Nullstellen (nach Voraussetzung) gilt selbiges auch für $|z| \leq R$ (womöglich mit einer anderen positiven unteren Schranke). Damit ist $\frac{1}{\mathcal{P}(z)}$ beschränkt auf ganz \mathbb{C} . \square

Bemerkung. Per Induktion nach dem Grad folgt somit leicht, dass **jedes Polynom** $\mathcal{P}(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ mit komplexen Koeffizienten und $a_n \neq 0$ (bzw. $\deg \mathcal{P} = n$) über \mathbb{C} in Linearfaktoren zerfällt:

$$\mathcal{P}(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j); \quad (5.5)$$

hierbei sind die ζ_j die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen von \mathcal{P} und das Produkt ist leer (d.h. $\equiv 1$), wenn $n = \deg \mathcal{P} = 0$ ist, also \mathcal{P} konstant.

Algebraisch: \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen (obwohl nur aus der Adjungierten von $i = \sqrt{-1}$ aus \mathbb{R} entstanden).

Bemerkung. In der Algebra beweist man den wichtigen Satz, dass **jeder Körper** einen algebraischen Abschluss besitzt.

5.1. Ergänzungen

Satz 5.6. Fundamentalsatz der Algebra (schärfer):

Jedes nicht konstante komplexe Polynom \mathcal{P} vom Grad g besitzt genau g Nullstellen!

6. Lokal gleichmäßige Konvergenz

In diesem Kapitel werden wir für folgenden Fragen Antworten finden:

- Wie verhalten sich Folgen holomorpher Funktionen?
- Welche Konvergenz wird benötigt, dass die Grenzfunktionen wiederum holomorph ist?

Wir beginnen mit Potenzreihen, genauer: mit der Umkehrung der in Satz 2.3 (Seite 19) gezeigten Aussage, dass Potenzreihen holomorph im Inneren ihres Konvergenz-Bereiches sind:

Satz 6.1. (WEIERSTRASS):

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist D eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 deren Abschluss in Ω enthalten sei. Dann besitzt f eine in D konvergente Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D \quad (6.1)$$

wobei die Koeffizienten durch $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ gegeben sind.

Bemerkung. Die spezielle Form der Koeffizienten verwundert nicht¹ wohl aber die Äquivalenz:

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Ex. lok. Stammfkten</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Cauchy-Riemann'sche DGL</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>holomorph</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>lokale komplexe Diffbarkeit</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>analytisch</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>lokal in Potenzreihen entwickelbar</p> </div> </div> <div style="margin-left: 10px;"> <p>\Leftrightarrow $\xleftrightarrow{\text{Satz 2.3}}$ \Leftrightarrow $\xleftrightarrow{\text{Satz 6.1}}$</p> </div>	(6.2)
---	-------

sowie die damit verbundene komplexe Differenzierbarkeit²

Beweis. für festes $z \in D$ liefert Satz 5.1:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei $C = \partial D$. Wobei mit der geometrischen Reihe gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\underbrace{\zeta - z_0 + z_0 - z}_{=0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n ; \end{aligned}$$

¹vgl Taylor- und Potenzreihendarstellung in Ana II bzw Satz 2.3

²bereits in Korollar 5.2 gezeigt

hierbei ist

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < r, \quad r \in (0, 1)$$

(da $\zeta \in C$ und $z \in D$ fest). Die geometrische Reihe **konvergiert gleichmäßig** für $z \in C$, weshalb im Folgenden Summation und Integration vertauschbar sind (vgl. Ana II)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Potenzreihenentwicklung, die Cauchy'schen Integralformeln (Satz 5.2) bzw. gliedweise Differenzierbarkeit liefern die Formeln für die Koeffizienten a_n . \square

07.11.08

Bemerkung. Die Potenzreihe konvergiert in der größten Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt, in der die dargestellte Funktion holomorph ist³.

Beispiel 6.1. Arcustangens:

$$\arctan'(z) = 1 - z^2 + z^4 - \dots \text{ für } |z| < 1$$

Beispiel 6.2. Die Funktion $f(z)$ mit

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1}, & \text{für } z \neq 0 \\ 1, & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

ist holomorph/analytisch für $|z| < 2\pi$ mit der dort konvergenten Potenzreihenentwicklung

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n;$$

hierbei sind B_n die **Bernoulli-Zahlen**. Sie sind rational und berechnen sich rekursiv über

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j = 0$$

und sie sind **unbeschränkt** (vgl. Ana IV). $B_{30} = \frac{8\ 615\ 841\ 276\ 005}{14\ 322}$, und $B_{30} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{31} \in \mathbb{Z}$. Kommen wir zurück zu $\frac{B_n}{n!} z^n$:

$$= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + \dots$$

³bzw. holomorph fortgesetzt werden kann, später hierzu mehr

6. Lokal gleichmäßige Konvergenz

Bemerkung. Ist f eine ganze Funktion, also in ganz \mathbb{C} holomorph, so besitzt f eine in ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihenentwicklung (von jedem komplexen Entwicklungspunkt)!

Jetzt als eine weitere Anwendung von Satz 6.1 nun die Umkehrung des Satzes 4.4⁴ von CAUCHY – ein weiteres **Holomorphie-Kriterium** Korollar 6.2

Korollar 6.2. *Der Satz von Morera:*

Angenommen f ist stetig in der offenen Kreisscheibe D und für jede Dreiecksfläche $\Delta \subset D$ gilt:

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0. \quad (6.3)$$

so ist f holomorph/analytisch in D

Beweis. Nach dem Beweis von Satz 4.3 besitzt f die Stammfunktion

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega$$

in D mit $F' = f$. Nach Satz 6.1 ist F unendlich oft komplex diffbar und f also holomorph in D . \square

Bemerkung. Ausschlaggebend für den Beweis von Satz 6.1 war die gleichmäßige Konvergenz, die die Vertauschbarkeit von Summation und Integration ermöglicht hat. Gleichmäßige Konvergenz transportiert auch Stetigkeit, im Allgemeinen aber **nicht reelle** Diffbarkeit (vgl. Ana II). Im Gegensatz hierzu ist die **komplexe** Diffbarkeit stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz⁵. Jetzt etwas genauer:

Satz. Satz von Heine-Borel:

Eine Folge von Funktionen $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem Punkt $\omega \in \Omega$ eine Umgebung U von ω gibt, sodass die Folge (f_n) auf $\Omega \cap U$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Mit diesem Satz von HEINE-BOREL konvergieren solche Folgen auf kompakten Mengen gleichmäßig; insofern nennt man **lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen** auch **kompakt konvergent**.

Satz 6.3. (Satz von Weierstraß, 1841):

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen. Dann ist auch die Grenzfunktion f holomorph und die Folge der Ableitungen (f'_n) konvergiert lokal gleichmäßig gegen f' .

Beweis. Sei D eine Kreisscheibe, dessen Abschluss \bar{D} ganz in Ω enthalten sei, sowie $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Mit dem Satz 4.1 (Satz von Goursat) gilt für die holomorphen Funktionen f_n

$$\int_{\Delta} f_n(z) dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

⁴Die Äquivalenzen sind sehr wichtig für das Staatsexamen

⁵da sich die Ableitung nach der Cauchy-Integralformel (Satz 5.2, Seite 37) durch eine Integrationsprozess gewinnen lässt

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_n gegen f auf \bar{D} folgt die Stetigkeit von f sowie

$$\int_{\Delta} f_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} f(z) dz$$

(mit der Stabilität des Kurvenintegrals bzgl. glm. Konvergenz, siehe Ana II). Damit folgt:

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0$$

und mit dem Korollar 6.2 (Satz von Morera) folgt die Holomorphie von f in D bzw. in Ω (da Ω offen und $D \subset \Omega$ beliebig). Die Behauptung für die Folge der Ableitungen ergibt sich mit den Cauchy'schen Integralformeln (Satz 5.2) wie folgt:

Sei $D \subset \Omega$ eine Kreisscheibe um z_0 vom Radius r , dann gilt für z mit

$$|z - z_0| \leq r - \delta;$$

für ein $\delta > 0$ mit Satz 5.2 angewandt auf $f' - f'_n$

$$f'(z) - f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = r} \frac{f(\omega) - f_n(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega$$

Bildlich gesprochen haben wir also einen Kreis D auf dem ω liegt, in dem ein kleinerer Kreis mit Radius r liegt, in dem z enthalten ist (siehe Abb 6.1)

trivial abgeschätzt erhält man (wenn man $|\omega - z| \geq |\omega - z_0| - |z_0 - z| \geq r - (r - \delta) = \delta$)

$$\begin{aligned} |f'(z) - f'_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{\delta^2} \|f - f_n\|_{\partial D} \\ &\leq \frac{r}{\delta^2} \max_{\omega \in \partial D} |f(\omega) - f_n(\omega)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Dank der glm. Konvergenz $f_n \rightarrow f$ auf ∂D . Also folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz von $f'_n \rightarrow f'$.

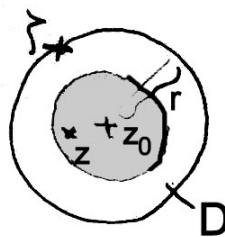


Abbildung 6.1.: Zwei ineinander liegende Kreisscheiben mit Zentrum z_0

□

6. Lokal gleichmäßige Konvergenz

Bemerkung. Der Satz 6.3 (Satz von Weierstraß) kann zur Konstruktion holomorpher Funktionen als unendliche Reihe benutzt werden:

Definition. normal konvergente Funktionenreihen:

Eine Reihe von Funktionen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{mit } f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt **normal konvergent** in Ω , wenn zu jedem Punkt $\omega \in \Omega$ eine Umgebung U von ω und eine Folge (M_n) nicht negativer reeller Zahlen existiert, sodass

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in \Omega \cap U$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Eine normal konvergente Funktionenreihe konvergiert **absolut** und **lokal gleichmäßig**; sie kann daher beliebig um geordnet werden. Ferner gilt:

Korollar 6.4. (Majorantentest):

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe holomorpher Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen sei. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph in Ω und es gilt

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \quad (6.4)$$

Beweis. folgt sofort aus Satz 6.3; die normale Konvergenz ergibt sich wiederum mit den Cauchy'schen Ungleichungen. \square

Beispiel 6.3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $s \mapsto \zeta(s) = n^s$ hierbei bezeichne $s = \sigma + it$ die komplexe Veränderliche (Tradition nach RIEMANN und LANDAU). Wegen

$$|n^s| = \left| e^{(\sigma+it) \log n} \right| = \underbrace{\left| e^{\sigma \log n} \right|}_{\text{nicht negativ}} \cdot \underbrace{\left| e^{it \log n} \right|}_{=1} = n^\sigma$$

folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

in jeder Halb-Ebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = \sigma > 1 + \delta\}$ mit $\delta > 0$ absolut und gleichmäßig, bzw. in der Halb-Ebene $\Omega := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = \sigma > 1\}$ normal konvergiert. Dort definiert sie eine holomorphe Funktion (nach Korollar 6.4):

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \operatorname{Re} s > 1;$$

dies ist die berühmte **Riemann'sche Zeta-Funktion**, von großer Bedeutung in der Zahlentheorie! (später mehr)

Beispiel 6.4. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$

konvergiert in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^6$ lokal gleichmäßig aber nicht normal (warum?)

Als weitere Anwendung untersuchen wir nun parameterabhängige Integrale auf Holomorphie. Wir denken hierbei an spezielle Funktionen wie etwa die **Gamma-Funktion**:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (6.5)$$

für $z > 0$ bzw für $\operatorname{Re} z > 0$. Dies wurde auch in Ana I bzw Ana III behandelt. Tatsächlich beschränken wir uns zunächst auf kompakte Intervalle:

Satz 6.5. Sei $F(z, s)$ definiert für $(z, s) \in \Omega \times [0, 1]$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist. Angenommen:

1. $F(z, s)$ ist holomorph in z für jedes $s \in [0, 1]$.
2. $F(z, s)$ ist stetig in $\Omega \times [0, 1]$

dann ist die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

$$f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds \quad (6.6)$$

holomorph in Ω

Beweis.

10.11.08

Es genügt die Holomorphie von f in einer beliebig kleinen in Ω enthaltenen Kreisscheibe zu zeigen, bzw. nach dem Satz von Morera (Korollar 6.2):

$$\int_{\Delta} \int_0^1 F(z, s) ds dz = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset D$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir hierzu (die Riemann-Summen zum Integral $\int_0^1 F(z, s) ds$):

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(z, \frac{k}{n}\right). \quad (6.7)$$

Nach 1. sind die f_n wieder holomorph in Ω . Als Nächstes zeigen wir, dass die f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergieren. Sei hierzu D eine Kreisscheibe, deren Abschluss noch ganz in Ω enthalten sei. Da eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist, folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \sup_{z \in D} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \varepsilon, \quad \text{falls } |s_1 - s_2| < \delta.$$

⁶wobei hier $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ meint: \mathbb{C} ohne \mathbb{N}

6. Lokal gleichmäßige Konvergenz

Für $n > \frac{1}{\delta}$ und $z \in D$ beliebig ergibt sich also:

$$|f_n(z) - f(z)| \stackrel{(*)}{=} \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(z, \frac{k}{n}\right) - f(z, s) \right) ds \right|,$$

wobei (*) sich ergibt, wenn man $f_n(z) - f(z)$ in Formel (6.6) einsetzt und f_n wie in Formel (6.7) verwendet

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(z, \frac{k}{n}\right) - f(z, s) \right| ds \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

also konvergieren die f_n lokal gleichmäßig gegen f und der Grenzwert f ist nach dem Satz 6.3 von Weierstraß holomorph. \square

Beispiel 6.5. Die Gamma-Funktion⁷ $\Gamma(z)$ ist holomorph für $\operatorname{Re} z > 0$ (also in der Halbebene, in der das uneigentliche Integral (Γ), welches $\Gamma(z)$ definiert, existiert), denn wegen $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}e^{-t}$ konvergiert das Integral nicht nur für reelle $z > 0$ (Ana I), sondern für $\operatorname{Re} z > 0$. Für alle $z < \delta < M < \infty$ konvergiert

$$F_\varepsilon(z) := \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} t^{z-1} e^{-t} dt$$

für z mit $\delta \leq \operatorname{Re} z \leq M$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $\Gamma(z)$; dabei sind die Funktionen F_ε nach Satz 6.5⁸ holomorph. Mit dem Satz 6.3 von Weierstraß verbleibt für den Beweis der Holomorphie von $\Gamma(z)$ lediglich noch die lokal gleichmäßige Konvergenz der F_ε gegen $\Gamma(z)$ auf dem Streifen $\delta \leq \operatorname{Re} z \leq M$ zu zeigen: Mit $z = x + iy$ gilt:

$$|\Gamma(z) - F_\varepsilon(z)| \leq \int_0^\varepsilon t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Das erste Integral ist beschränkt durch $\frac{\varepsilon^\delta}{\delta}$ (denn $\operatorname{Re} z \geq \delta$) und konvergiert mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0. Das zweite Integral ist konstant Null und das letzte Integral behandelt man ähnlich wie das erste. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt &\stackrel{x=\operatorname{Re} z \leq M}{\leq} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} t^{M-1} e^{-t} dt \\ &\leq c \cdot \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

unabhängig von z mit einer Konstanten $c > 0$. Also ist die Konvergenz gleichmäßig und $\Gamma(z)$ holomorph für $\operatorname{Re} z > 0$. (Später mehr).

⁷Die Gamma-Funktion ist definiert als:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

⁸mit $[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$ statt $[0, 1]$

7. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Kapitel werden die folgenden Fragen beantwortet:

Wie sind die Nullstellen holomorpher Funktionen verteilt? Diskret wie bei Polynomen oder können sich Nullstellen häufen?

Satz 7.1. Der Identitätssatz:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent.

1. $f \equiv g$
2. Die Menge $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in Ω (ist also **nicht diskret**)
3. Es gibt ein $z_0 \in \Omega$ mit

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Für die folgenden Betrachtungen in der Funktionentheorie benötigen wir eine exakte Definition des Begriffes „Gebiet“:

Definition. Gebiet(nach Busam und Freitag's „Funktionentheorie 1“):

Ein **Gebiet** ist ein **bogenweise zusammenhängende offene Menge**¹ $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Ω heißt **bogenweise zusammenhängende Menge**, wenn zu je zwei Punkten z_1 und $z_2 \in \Omega$ eine stückweise glatte Kurve γ existiert, die ganz in Ω liegt und die beiden Punkte z_1, z_2 miteinander verbindet. Formel ausgedrückt heißt das

$$\gamma[a, b] \rightarrow \Omega, \quad \gamma(a) = z_1, \quad \gamma(b) = z_2 \quad (7.1)$$

Mit Prof. Steudings Worten: Ein Gebiet ist **eine Art Fläche**, evtl mit Löchern und Schlitzen, aber niemals „aufgeteilt“ in zwei unabhängige Flächen.

Bemerkung. Speziell für $g \equiv 0$ (bzw. $\equiv \text{const}$) folgt also, dass die Nullstellen einer nicht konstanten holomorphen Funktion $f(z)$ (bzw. die Wurzel der Gleichung $f(z) = \text{const}$) eine diskrete Menge bilden, sich also nirgends häufen!

Vorsicht. Diskret ist ein relativer Begriff, zum Beispiel ist $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$ diskret in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nicht aber in \mathbb{C} . Folgt dann:

$$f \stackrel{?}{\equiv} g \Leftrightarrow f - g \stackrel{?}{\equiv} 0$$

¹Der Teil **offene Menge** sollte aus den Analysis-Vorlesungen noch bekannt sein.

7. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Beweis. (ähnlich zum Identitätssatz für Potenzreihen aus der Ana II):

Es genügt, die Behauptung für den Fall $g \equiv 0$ zu zeigen (ansonsten betrachte $\tilde{f} = f - g$ statt f). Sei $z_0 \in \Omega$ ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge²

$$N(f) := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = 0\}$$

von f . Wir entwickeln f gemäß Satz 6.1 in eine Potenzreihe um $z_0 \in \Omega$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Dann gibt es in jeder Umgebung des Häufungspunktes z_0 Punkte $z_n \neq z_0$ mit $f(z_n) = 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Mit der Stetigkeit von f folgt

$$a_0 = f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$$

(a priori ist nicht klar, dass $z_0 \in N(f)$ liegt)

Ist $z_0 \neq 0$ so kann man analog mit einer Folge von Nullstellen $z_n \in \Omega$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ argumentieren. Mit demselben Argument angewandt auf die in $z = z_0$ stetige Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{z - z_0} = a_1 + a_2(z - z_0) + \dots$$

folgt

$$a_1 = g(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{z_n - z_0} = 0$$

und sukzessive $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

Also ergibt sich $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nach Satz 6.1. Damit ist $2. \Rightarrow 3.$ gezeigt.

Insbesondere folgt: $f(z) = 0$ in einer offenen Umgebung von z_0 (wiederum nach Satz 6.1) und die Menge

$$U := \{z \in \Omega \mid z \text{ ist Häufungspunkt von } N(f)\}$$

ist also offen. Trivialerweise ist jedoch

$$V := \{z \in \Omega \mid z \text{ ist **kein** Häufungspunkt von } N(f)\}$$

offen, diese ist aber auch das Komplement von U (also $V = \mathbb{C}U$) in Ω . Damit ist $\Omega = U \cup V$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen, und weil Ω zusammenhängend ist, folgt, dass entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Wegen $z_0 \in U$ (nach Voraussetzung) muss also $V = \emptyset$ und somit $f \equiv 0$ in $U = \Omega$, was $3. \Rightarrow 1.$ zeigt. Die verbleibende Implikation $1. \Rightarrow 2.$ ist trivial³ □

² ω beschreibt die Nullstellen der Menge Ω allgemein

³wenn $f \equiv g$ ist, folgt ganz offensichtlich, dass die Menge $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt hat. Genau genommen gilt es für **alle** $z \in \Omega$!

Bemerkung. Die Folgerung aus diesem Satz sind unglaublich! Es genügt zu wissen, dass zwei Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ **vollständig bestimmt** sind, beispielsweise auf einem Wegstückchen (siehe Satz 7.12.) oder auf einer Folge $(z_n)_n$ (mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in \Omega$ und $a \neq z_n \in \Omega$) übereinstimmen. Im Buch von BUSAM und FREITAG „Funktionentheorie 1“ sprechen sie hier von einer **ziemlichen Solidarität** unter den Funktionswerten.

Wichtig ist bei dem Identitätssatz, dass Ω ein **zusammenhängendes Gebiet** sein muss. Betrachtet man als Beispiel für diese Notwendigkeit ein Ω der Bauart $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, des weiteren sei $g \equiv 0$ auf ganz Ω , dann könnte auf Ω_1 einerseits $f = g$ sein, allerdings besteht für Ω_2 nicht die Notwendigkeit, dass $g = f$ gilt ($f|_{\Omega_1} = 0$ und $f|_{\Omega_2} = 1$ wäre hier zulässig).

Bemerkung. Das Analogon für reelle C^∞ -Funktionen ist **hoffnungslos falsch!**

Die topologische Bedingung, dass Ω ein Gebiet sein muss (also zusammenhängend und offen), ist zwingend.

Definition. Permanenzprinzip:

Eigenschaften holomorpher Funktionen, die sich durch Identitäten zwischen holomorphen Funktionen ausdrücken, lassen sich zum Beispiel von \mathbb{R} nach \mathbb{C} fortsetzen – dies ist das so genannte **Permanenzprinzip** für analytische Identitäten:

Beispiel 7.1.

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Denn: die Identität ist wahr für alle $z \in \mathbb{R}$ und mit dem Identitätssatz folgt die Aussage für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aus dem Reellen bekannte Funktionalgleichungen übertragen sich also in Komplexe, zum Beispiel:

$$\exp(z + \omega) = \exp(z) \cdot \exp(\omega) \quad \forall z, \omega \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 7.2. $\cot(\pi z)$ ist 1-periodisch, das heißt $\cot(\pi(z + 1)) = \cot(\pi z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Definition für $\exp(z)$, $\cos(z)$ oder $\sin(z)$ als **komplexe** Funktion sind nach dem Identitätssatz 7.1 die einzige sinnvolle / „analytische“ Fortsetzungen der **reellen** Funktionen $\exp(z)$, $\cos(z)$ bzw. $\sin(z)$ von \mathbb{R} nach \mathbb{C} !

Beispiel 7.3. In jeder **geloichten Umgebung**⁴ des Nullpunktes (d.h. in der Umgebung ohne Null) ist nach dem Identitätssatz 7.1 die Funktion

$$z \mapsto \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

die einzige analytische Fortsetzung der entsprechenden C^∞ -Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sie ist aber nicht holomorph/analytisch fortsetzbar nach 0, da sie nicht einmal stetig in $z = 0$ ist, denn:

$$\lim_{\mathbb{R} \ni y \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{(iy)^2}\right) = \infty \neq 0 = \lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

4

Definition. gelochte Umgebung Eine gelochte Umgebung ist eine Umgebung, bei der **einzelne Punkte** herausgelassen werden.

Bemerkung. Erweiterung zum Identitätssatz 7.1:

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Ω ein Gebiet, das von einer einfach geschlossenen Kurve $\gamma = \partial\Omega$ berandet werde; das Kurvenstück C sei ein Stück (mehr als ein Punkt) des Randes. Wenn dann $\lim f(z) = a$ bei jeder Annäherung von $z \in \Omega$ an C , so folgt

$$f(z) \equiv a \text{ in } \Omega$$

Beweis. BEHNKE und SOMMER (in der Mathe-Teilbib) □

Wir untersuchen „analytische Fortsetzungen“ etwas genauer:

Definition. Symmetrie von Ω :

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und **symmetrisch bzgl. \mathbb{R}** , das heißt

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega,$$

also die Spiegelung einer Menge an der reellen Achse (siehe Abb 7.1). Mit Ω^+ bezeichnen wir die Anteile von Ω oberhalb der reellen Achse und Ω^- die Anteile unterhalb der reellen Achse, schließlich bezeichnet $I := \Omega \cap \mathbb{R}$ den entsprechenden Abschnitt auf der reellen Achse, die von Ω geschnitten wird, also das Innere der Ränder von Ω^+ und Ω^- , also

$$\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$$

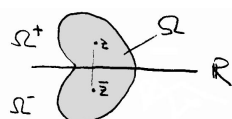


Abbildung 7.1.: Symmetrie der Menge Ω

Satz 7.2. Sind f^+ auf Ω^+ und f^- auf Ω^- holomorphe Funktionen, die sich stetig nach I fortsetzen lassen mit

$$f^+(x) = f^-(x) \quad \forall x \in I \quad (7.2)$$

dann ist die Funktion

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \begin{cases} f^+(z), & \text{für } z \in \Omega^+ \\ f^\pm(z), & \text{für } z \in I \\ f^-(z), & \text{für } z \in \Omega^- \end{cases} \quad (7.3)$$

holomorph in Ω

Beweis. f ist stetig in ganz Ω ; delikater ist nur der Nachweis der Holomorphie in I . Angenommen D ist eine Kreisscheibe um einen Punkt $\omega \in I$ mit $\bar{D} \subset \Omega$, sowie $\Delta \subset D$ ein Dreieck (siehe Abb 7.2). Wenn $\Delta \cap I = \emptyset$, so, folgt mit der Holomorphie von f in Ω^\pm sofort nach Satz 4.1

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

Ist eine Seite von Δ oder eine Ecke enthalten in I und der Rest in o.B.d.A. Ω^+ , so bezeichne Δ_ε das Dreieck bei dem diese Kante oder Ecke um ε nach oben verschoben sei; Dann folgt:

$$\int_{\Delta_\varepsilon} f(z) dz = 0.$$

Bildlich gesprochen verschieben wir das Dreieck, welches mit einer Seite auf I liegt um ε nach „oben“

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt über die Stetigkeit von f dann

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

Wenn Δ Punkte sowohl in Ω^+ als auch in Ω^- besitzt, so kann man dieses Dreieck entlang der Menge I in drei Dreiecke aufgeteilt werden. Damit erhalten wir wieder das bereits Bewiesene. Also gilt stets:

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0$$

und f ist somit holomorph in D bzw. Ω nach dem Satz von Morera (Korollar 6.2).

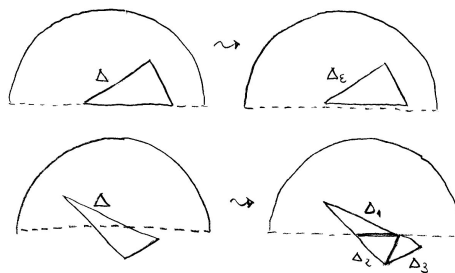


Abbildung 7.2.: Bildliche Darstellung vom Beweis

□

Damit folgt nun

Satz 7.3. (Satz von Schwarz, bzw. das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip): Angenommen, f ist holomorph in Ω^+ und besitzt eine stetige Fortsetzung nach I mit reellen Funktionswerten auf I , dann gibt es eine in Ω holomorphe Funktion F mit

$$F(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega^+ \quad (7.4)$$

das heißt $F(z)$ ist die holomorphe Fortsetzung von Ω^+ nach Ω .

7. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Beweis. Wir definieren F vermöge

$$F(z) = f(z) \quad \text{für } z \in \Omega^+$$

bzw. $z \in I$ (mit Hilfe der stetigen Fortsetzung von f nach I), sowie

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{für } z \in \Omega^-.$$

Es gilt $\bar{z} \in \Omega^+$, deshalb ist $f(\bar{z})$ definiert. Für $z, z_0 \in \Omega^-$ sind $\bar{z}, \bar{z}_0 \in \Omega^+$ und mit der Potenzreihenentwicklung der holomorphen Funktion f (existent nach Satz 6.1)

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n$$

folgt also

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n}$$

da bei Folgen von komplexen Zahlen gilt: $\overline{z + z_0} = \bar{z} + \bar{z}_0$ und damit:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n}$$

mit $\bar{\bar{z}} = z$ ist weiter

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z - z_0)^n$$

Damit ist F also analytisch in Ω^- und nach Satz 2.3 auch holomorph in Ω^- . Da f auf I reellwertig ist, gilt:

$$\overline{f(x)} = f(x) \quad \forall x \in I$$

und also lässt sich F stetig nach I fortsetzen. Mit Satz 7.2 ist F holomorph in ganz Ω . \square

Beispiel 7.4. Sowohl die Riemann'sche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ als auch die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ (Siehe Beispiel 6.3 und 6.4) sind reellwertig auf \mathbb{R} , also folgt insbesondere:

$$\begin{aligned} \zeta(\bar{s}) &= \overline{\zeta(s)}, \\ \Gamma(\bar{z}) &= \overline{\Gamma(z)} \end{aligned}$$

Jetzt noch allgemeinere Aussagen über die Wertverteilung holomorpher Funktionen.

Definition. Im Folgenden bezeichne

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

die **offene Kreisscheibe** und $\overline{D_r(z_0)}$ die **abgeschlossene Kreisscheibe** vom Radius r um z_0 .

Satz 7.4. Die Funktion f sei in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ holomorph. Gilt

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|, \quad (7.5)$$

dann besitzt f eine Nullstelle in $D_r(z_0)$

Beweis. Besitzt f keine Nullstelle in $D_r(z_0)$, so ist $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ holomorph in $D_r(z_0)$ und sogar in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ (denn nach (7.5) gilt: $f(z) \neq 0$ für $|z - z_0| = r$ und mit der Stetigkeit auch in einer kleinen Umgebung!). Mit den Cauchy'schen Ungleichungen (Korollar 5.3) folgt für $n = 0$:

$$|g(z_0)| \leq \|g\|_{\partial D_r(z_0)}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f(z_0)|} &\leq \max_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|f(z)|} \\ &= \frac{1}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z)|}, \end{aligned}$$

dies ist ein Widerspruch zu (7.5)! □

Der Satz 7.4 hat erstaunliche Folgen, unter Anderem den folgenden Satz:

Satz 7.5. (Satz von der Gebietstreue bzw. Satz von der offenen Abbildung):

Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω . Dann ist das Bild $f(\Omega)$ wieder ein Gebiet oder besteht aus einem Punkt; letzteres genau dann, wenn f konstant ist.

Bemerkung. Das reelle Analogon gilt nur, wenn der Rang der Abbildung voll ist (siehe hierzu Ana II Satz 16.3 [vom regulären Wert] (Steuding-Skript)). Wir erinnern uns: Ein Gebiet ist eine offene und zusammenhängende Menge. Das Bild vom **reellen** Sinus hingegen ist das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$! Das reelle Analogon ist also im Allgemeinen falsch, (Ana II Satz 16.3 (Steuding-Skript));

Beweis. O.B.d.A. sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ nicht konstant. Mit der Stetigkeit von f ist $f(\Omega)$ zusammenhängend (klar); es verbleibt also nur die **Offenheit** zu zeigen: Betrachte $\omega_0 \in f(\Omega)$ und wähle $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) = \omega_0$. Nach dem Identitätssatz 7.1 gibt es eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ um z_0 die ganz in Ω liegt und neben z_0 kein weiteres Urbild von ω_0 enthält⁵ (sonst wäre $f(z) \equiv \omega_0$). Auf der kompakten Kreislinie $C_r(z_0) = \partial \overline{D_r(z_0)}$ ist dann:

$$|f(z) - f(z_0)| \geq 3 \cdot \varepsilon \quad \text{für } |z - z_0| = r$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Für alle ω mit $|\omega - \omega_0| < \varepsilon$ und $|z - z_0| = r$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - \omega| &= |f(z) - \omega_0 + \omega_0 - \omega| \\ &\geq |f(z) - \omega_0| - |\omega_0 - \omega| \\ &\geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

⁵Betrachten wir das Gebiet Ω und das Bild $f(\Omega)$. Auf $f(\Omega)$ liegt der Punkt ω_0 . Dieses hat (mindestens) ein Urbild in Ω . Eventuell gibt es ein z'_0 , welches auch auf ω_0 abbildet, allerdings muss dieses wegen des Identitätssatzes einen gewissen Abstand zu z_0 haben, so dass es nicht in der Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ liegt.

7. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

jedoch ist

$$|f(z_0) - \omega| = |\omega_0 - \omega| < \varepsilon$$

Mit Satz 7.4 folgt nun die Existenz einer Nullstelle von $f(z) - \omega$ in $D_r(z_0)$. Es gibt also ein $z' \in D_r(z_0) \subset \Omega$ mit $\omega = f(z') \in f(\Omega)$. wir haben also damit gezeigt, dass $f(\Omega)$ eine ε -Umgebung $D_\varepsilon(\omega)$ enthält, wobei ω_0 beliebig. Damit ist $f(\Omega)$ offen.

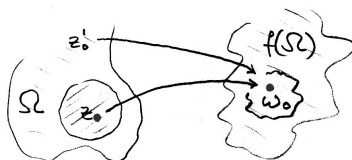


Abbildung 7.3.: Bildliche Darstellung des Beweises

□

Bemerkung. Gebietstreue hat wichtige Konsequenzen:

Zum Beispiel sind holomorphe Funktionen mit konstanten Real- bzw. Imaginärteil selbst konstant⁶

Noch erstaunlicher ist der folgende Satz:

Satz 7.6. (Maximumsprinzip):

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Wenn $|f(z)|$ in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum besitzt (das heißt $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle z aus einer Umgebung von z_0), so ist f konstant. Ist Ω beschränkt und f auf dem Abschluss $\bar{\Omega}$ noch stetig, so nimmt $|f(z)|$ das Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an:

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)| \quad \forall z \in \bar{\Omega}. \quad (7.6)$$

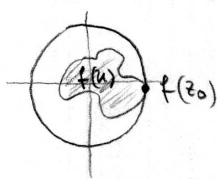


Abbildung 7.4.: Das Maximumsprinzip als Bild

Beweis. Sei $U \subset \Omega$ eine Umgebung von $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in U$$

Dann ist

$$f(U) \subset \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| \leq |f(z_0)|\}$$

und also ist $f(U)$ keine Umgebung von $f(z_0)$. Also folgt $f(z) \equiv f(z_0)$ in U nach dem Satz 7.5 von der Gebietstreue und mit dem Identitätssatz 7.1 folgt $f \equiv f(z_0)$ sogar in ganz Ω . Die Behauptung für beschränkte Ω folgt leicht. □

⁶Dies ist ein alternativer Beweis für die Aufgabe aus Ergänzung 2.1

Bemerkung. Wendet man das Maximums-Prinzip auf $\frac{1}{f}$ mit $f \neq 0$ an, so ergibt sich unmittelbar das **Minimumsprinzip**:

Definition. Minimumsprinzip:

Eine auf einem Gebiet Ω holomorphe Funktion f mit einem lokalen **Betragsminimum** in z_0 ist konstant oder besitzt eine Nullstelle in z_0 . Ist Ω beschränkt und f auf dem Abschluss $\bar{\Omega}$ stetig, so hat f Nullstellen in Ω oder $|f|$ nimmt das Minimum auf $\partial\Omega$ an:

$$|f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in \Omega \quad (7.7)$$

Bemerkung. Dies erlaubt zum Beispiel einen alternativen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ($|P(0)| < \min_{|z|=r} |P(z)|$ für hinreichend große Radien r , wobei $P \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstant ist).

8. Isolierte Singularitäten

Bemerkung. Die Funktionen

$$\frac{\sin z}{z}, \frac{1}{z}, \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

sind im Nullpunkt nicht definiert, aber in einer gelochten Umgebung holomorph; Ihr Verhalten in der Nähe von $z = 0$ ist jedoch sehr unterschiedlich.

Definition. isolierte Singularität und Hebbarkeit Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht zu Ω gehört, es allerdings ein $r > 0$ gibt, so dass die **punktierte (gelochte) Kreisscheibe**

$$\dot{D}_r(\xi) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \xi| < r\}$$

ganz in Ω enthalten ist, dann heißt ξ eine **isolierte Singularität** von f .

Sie heißt **hebbbar**, wenn sich f auf (der offenen Menge) $\Omega \cup \{\xi\} = \Omega \cup \dot{D}_r(\xi)$ **analytisch fortsetzen** lässt, es also eine holomorphe Funktion $F : \Omega \cup \{\xi\} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $F|_{\Omega} = f$. In diesem Fall schreiben wir lieber f statt F und definieren $f(\xi) := \lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$ (denn mit der Hebbarkeit folgt die Existenz des Grenzwertes).

Zum Beispiel besitzen die Funktionen $\frac{\sin z}{z}$ und $\frac{z}{e^z - 1}$ eine hebbare Singularität in $z = 0$ (jeweils mit $f(0) = 1$); etwa mit der Potenzreihenentwicklung:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \dots}{z} = 1 + \dots$$

Satz 8.1. (Riemann'scher Hebbarkeitssatz, 1851):

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Eine isolierte Singularität ξ von f ist genau dann **hebbbar**, wenn es eine **punktierte Umgebung** von $\dot{D}_r(\xi) \subset \mathbb{C}$ von ξ gibt, **in der f beschränkt ist**. Setzt man in diesen Fall $f(\xi) := \lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$, so ist die so definierte Fortsetzung von f auf $\Omega \cup \{\xi\}$ holomorph.

Bemerkung. Statt der Beschränktheit von f in $\dot{D}_r(\xi)$ kann man äquivalent auch $\lim_{z \rightarrow \xi} f(z) \cdot (z - \xi) = 0$ fordern.

Beweis. Ist ξ hebbare Singularität, dann ist f stetig nach ξ fortsetzbar und insbesondere in einer kleinen Umgebung beschränkt. Für den Beweis der Umkehrung sei o.B.d.A $\xi = 0$ und

$$g(z) := \begin{cases} z^2 f(z), & \text{falls } z \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $g(z)$ in einer kleinen punktierten Umgebung $\dot{D}_r(0)$ komplex diffbar. Sie ist sogar in $z = 0$ komplex diffbar, denn:

$$g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = 0$$

Die Funktion g ist holomorph und damit um $z = 0$ nach Satz 6.1 in eine Potenzreihe entwickelbar

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \underbrace{a_0}_{=g(0)=0} + \underbrace{a_1 z}_{=0} + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

(wegen $a_0 = g(0) = 0$ und $a_1 = g'(0) = 0$). Für $z \neq 0$ folgt somit

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} = a_2 + a_3 z + \dots$$

Diese Potenzreihe definiert nach Satz 2.3 nun eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $z = 0$ (inkl); dieses F ist die gesuchte analytische Fortsetzung von f . \square

Definition. Pol:

Ist ξ eine Singularität von f , jedoch keine hebbare Singularität, so ist also $f(z)$ um ξ nicht beschränkt. In diesem Fall ist es naheliegend zu fragen, ob $(z - \xi)^k f(z)$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ um ξ beschränkt bleibt. Ist dies der Fall, so nennt man ξ ein **Pol** von f der Ordnung

$$n := \min \{k \in \mathbb{N} \mid (z - \xi)^k f(z) \text{ ist beschränkt um } \xi\}.$$

Analog heißt ξ eine Nullstelle von f der Ordnung n , falls

$$f(\xi) = 0, \dots, f^{(n-1)}(\xi) = 0, \quad \text{aber } f^{(n)}(\xi) \neq 0;$$

bzw.

$$f(z) = (z - \xi)^n g(z)$$

mit einer bei ξ holomorphen Funktion g , wobei $g(\xi) \neq 0$. Ist die Ordnung eines Pols bzw. einer Nullstelle gleich Eins, so heißt der Pol bzw. die Nullstelle **einfach** (bei Ordnung zwei dann **doppelt**, usw).

Merke. Pole entstehen grundsätzlich aus Nullstellen durch Reziprokenbildung ($1. \Leftrightarrow 3.$):

Satz 8.2. Es sei f holomorph in der punktierten Kreisscheibe $\dot{D}_r(\xi)$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

1. f hat in ξ einen Pol der Ordnung n .
2. Es gibt eine in $D_r(\xi)$ ($= \dot{D}_r(\xi) \cup \{\xi\}$) holomorphe Funktion g mit $g(\xi) \neq 0$, so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \xi)^n} \quad \text{für alle } z \in \dot{D}_r(\xi)$$

8. Isolierte Singularitäten

3. Es gibt eine offene Umgebung $U \subset D_r(\xi)$ von ξ und eine in $U \setminus \{\xi\}$ nullstellenfreie holomorphe Funktion h mit einer Nullstelle n -ter Ordnung in ξ , so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \setminus \{\xi\}$.

4. Es gibt eine Umgebung $U \subset D_r(\xi)$ von ξ und konstanten $0 < m \leq M$, so dass

$$m |z - \xi|^{-n} \leq |f(z)| \leq M \cdot |z - \xi|^{-n} \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{\xi\}$$

Beweis. $1. \Rightarrow 2.$: Da $(z - \xi)^n f(z)$ um ξ beschränkt ist, existiert nach dem Hebbbarkeitssatz 8.1 eine bei ξ hebbare holomorphe Funktion g der Form; $g(z) = (z - \xi)^n f(z)$ für $z \neq \xi$. Wäre $g(\xi) = 0$, so erhalten wir mit $g(z) = (z - \xi) \tilde{g}(z)$ mit einer bei ξ holomorphen Funktion \tilde{g} auch, dass $(z - \xi)^{n-1} f(z)$ um ξ beschränkt wäre, im **Widerspruch zur Minimalität von n !**

$2. \Rightarrow 3.$: Wegen $g(\xi) \neq 0$ ist g in einer Umgebung von ξ nullstellenfrei und $h(z) = \frac{(z - \xi)^n}{g(z)}$ leistet das Gewünschte.

$3. \Rightarrow 4.$: Ist U hinreichend klein, so gilt $h(z) = (z - \xi)^n \tilde{h}(z)$ mit einer auf U nullstellenfreien holomorphen Funktion \tilde{h} . Mit

$$0 < m := \inf_{z \in U} \frac{1}{|\tilde{h}(z)|} \leq M := \sup_{z \in U} \frac{1}{|\tilde{h}(z)|} < \infty$$

folgt die Behauptung.

$4. \Rightarrow 1.$: Wegen $|(z - \xi)^n f(z)| \leq M$ für $z \in U \setminus \{\xi\}$ ist $(z - \xi)^n f(z)$ um ξ beschränkt. Wegen $|(z - \xi)^n f(z)| \geq m$ liegt ein Pol in ξ der Ordnung n vor.

(sonst „explodiert“ $|(z - \xi)^{n-1} f(z)| \geq \frac{m}{|z - \xi|}$ bei $z \rightarrow \xi$)

□

Bemerkung. Aus $1. \Rightarrow 4.$ lesen wir das charakteristische Wachstumsverhalten im Pole ab. Wir sagen f **wächst** um ξ gleichmäßig gegen ∞ , und schreiben

$$\lim_{z \rightarrow \xi} f(z) = \infty,$$

wenn zu jedem $m > 0$ eine Umgebung U von ξ existiert, so dass

$$\inf_{z \in U \setminus \{\xi\}} |f(z)| \geq m.$$

Korollar 8.3. Eine in $\dot{D}_r(\xi)$ holomorphe Funktion f besitzt genau dann einen Pol in ξ , wenn

$$\lim_{z \rightarrow \xi} f = \infty. \quad (8.1)$$

Definition. Meromorph¹:

Eine Funktion f heißt **meromorph** in Ω , wenn es eine (von f abhängige) diskrete Teilmenge $\mathcal{P} = \mathcal{P}(f) \subset \Omega$ gibt, so dass f in $\Omega \setminus \mathcal{P}$ holomorph ist und in jedem Punkt $\mathcal{P}(f)$ einen Pol besitzt. Insbesondere sind also die in Ω holomorphen Funktionen meromorph ($\mathcal{P} = \emptyset$). Ähnlich wie für die Nullstellen (bzw. die Lösung der Gleichung $f(z) = a$ zu festem $a \in \mathbb{C}$) einer holomorphen Funktion f gilt:

Die Polstellen-Menge $\mathcal{P}(f)$ einer in Ω meromorphen Funktion f ist leer (f ist holomorph), endlich, oder abzählbar unendlich (da $\mathcal{P}(f)$ diskret).

¹Mero=griech. und bedeutet Teil, in diesem Sinne bedeutet es also Teilweise holomorphe Funktionen

Im Hinblick auf Korollar 8.3 setzen wir den Funktionswert von f in einem Pol als

$$f(z) := \infty \quad \text{für } z \in \mathcal{P}(f)$$

Dann sind meromorphe Funktionen Abbildungen von Ω nach $\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{C}}$.

Beispiel 8.1. Jede rationale Funktion $f (= \frac{p}{q}$: Quotient zweier Polynome) ist meromorph in \mathbb{C} , hier ist $\mathcal{P}(f)$ endlich, also in $N(q)$ enthalten.

Beispiel 8.2. Der Cotangens

$$\cot \pi z = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

ist meromorph in \mathbb{C} ; die Polstellen-Menge ist abzählbar unendlich ($\mathcal{P}(\cot(\pi z)) = N(\sin(\pi z))$) und insbesondere ist $\cot(\pi z)$ keine rationale Funktion, **denn:** für z bei $m \in \mathbb{Z}$ gilt mit der Potenzreihenentwicklung;

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= (-1)^m \pi(z - m) + \mathcal{O}(|z - m|^3) \\ \cos(\pi z) &= (-1)^m + c(z - m)^2 + \mathcal{O}(|z - m|^4) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten c und \mathcal{O} als höhere Terme. Also folgt:

21.11.08

$$\pi \cot \pi z = \pi \frac{(-1)^m + \dots}{(1 - (-1)^m \pi(z - m) + \dots)} + \text{Potenzreihe in } (z - m)$$

diese ist insbesondere holomorph bei $z = m$. Dies ist eine lokale Form der **Partialbruchzerlegung** des \cot :

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Fall: } m=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - m} + \frac{1}{z + m} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2} \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{z}$ eine einfache Polstelle in $z = 0$ bzw in $z = \pm m$ ist. Diese Reihe in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorpher Funktionen konvergiert normal (dank der Zusammenfassung der Pole $\pm m$; vgl mit Beispiel 6.4) und definiert also **dort** nach Korollar 6.4 eine holomorphe Funktion. Mit dem Identitätssatz 7.1 (bzw der Erweiterung auf meromorphe Funktionen; siehe Übungsaufgabe) folgt die obige Identität. Später werden wir mehr über Partialbruch-Darstellungen und ähnliche Darstellungen erfahren.

Bemerkung. Holomorphe Funktionen auf einem Gebiet Ω lassen sich punktweise addieren und multiplizieren (**Superposition**); sie bilden einen Ring $\mathcal{O}(\Omega)$ (Menge aller holomorphen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$)².

Meromorphe Funktionen kann man sogar invertieren:

²das \mathcal{O} geht auf HENRI CARTAN zurück, der im Sommer 2008 im Alter von 104 Jahren verstarb

8. Isolierte Singularitäten

Definition. $\mathcal{M}(\Omega)$ = Menge aller um Ω meromorphen Funktionen ist ein **Körper** (=Quotientenkörper zu $\mathcal{O}(\Omega)$).

Sowohl \mathcal{O} als auch $\mathcal{M}(\Omega)$ sind abgeschlossen bzgl. der Differenzierbarkeit!

$$\mathbb{C}(z) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

Definition. wesentliche Singularität:

Eine isolierte Singularität ξ von f heißt **wesentliche Singularität**, wenn ξ keine hebbare Singularität und auch kein Pol von f ist.

Beispiel. $\xi = 0$ ist eine wesentliche Singularität von $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, **denn:** $\xi = 0$ ist

nicht hebbar:

$$\lim_{\mathbb{R} \ni y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{yi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(e^{-\frac{1}{y}} - e^{\frac{1}{y}} \right) = „i\infty“$$

kein Pol:

$$0 = \sin k\pi = \sin \frac{1}{z_k}$$

mit

$$z_k = \frac{1}{k\pi} \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

also besitzt f in jeder noch so kleinen Umgebung von $\xi = 0$ unendliche viele Nullstellen.

Beispiel. $z \mapsto \exp \frac{1}{z}$ besitzt eine wesentliche Singularität in $z = 0$. Dies zeigt man ganz ähnlich zum obigen Beispiel.

Holomorphe Funktionen besitzen in der Nähe wesentlicher Singularitäten ein „sehr nervöses“ Werte-Verhalten:

Satz 8.4. Satz von Casorati-Weierstraß:

Es sei $\xi \in \Omega$ und $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen sowie $f : \Omega \setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Dann sind äquivalent:

1. ξ ist eine wesentliche Singularität von f .
2. Das Bild jeder punktierten Umgebung $\dot{D}_\varepsilon(\xi)$ von ξ liegt **dicht** in \mathbb{C}^3 :

$$\overline{f(\dot{D}_\varepsilon(\xi))} = \mathbb{C}$$

3. Es gibt Folgen $z_n \in \Omega \setminus \{\xi\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi$, so dass die Bildfolge $(f(z_n))_n$ keinen Limes in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ besitzt.

Beweis. 1. \Rightarrow 2. Angenommen, es gibt eine punktierte Umgebung $\dot{D}_\varepsilon(\xi) \subset \Omega \setminus \{\xi\}$, so dass $f(\dot{D}_\varepsilon(\xi))$ nicht dicht in \mathbb{C} liegt. Dann gibt es $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, so dass

$$f(\dot{D}_\varepsilon(\xi)) \cap \underbrace{\overline{D_r(c)}}_{=\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\}} = \emptyset$$

³ f kommt also in einer beliebig kleinen Umgebung einer wesentlichen Singularität jeder komplexen Zahl beliebig nahe!

$f(\dot{D}_\varepsilon(\xi))$ liegt, wie in Abb 8.1 ersichtlich, außerhalb vom Punkt c und seiner abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_r(c)}$, das heißt

$$|f(z) - c| \geq r \quad \forall z \in \dot{D}_\varepsilon(\xi)$$

die Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)-c}$ ist also holomorph in $\dot{D}_\varepsilon(\xi)$ und beschränkt gegen $\frac{1}{r}$. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 8.1 ist ξ damit eine hebbare Singularität von g . Also besitzt

$$f(z) = c + \frac{1}{g(z)}$$

entweder eine hebbare Singularität in ξ (falls $\lim_{z \rightarrow \xi} g(z) \neq 0$) oder ein Pol in ξ (falls $\lim_{z \rightarrow \xi} g(z) = 0$). Auf alle Fälle ist ξ **keine wesentliche Singularität von f !**

2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1. sind trivial.

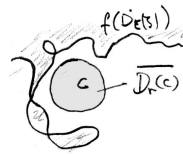


Abbildung 8.1.: Veranschaulichung vom Beweis des Satzes 8.4, genauer 1. \Rightarrow 2.

□

Bemerkung. Nach Satz 7.5 von der Gebietstreue ist $f(\dot{D}_\varepsilon(\xi))$ für nicht konstantes f offen. Weit darüber hinausgehend besagt der große Satz von PICARD⁴, dass im Falle einer wesentlichen Singularität ξ einer holomorphen Funktion f das Bild $f(\mathbb{C} \setminus \{\xi\})$ entweder ganz \mathbb{C} ist (wie beispielsweise im Fall $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$) oder \mathbb{C} mit Ausnahme eines einzigen Punktes (wie etwa Null bei $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$). **Es kann keine größeren Lücken geben!**

23.11.08

Im Folgenden entwickeln wir das Analogon des Cauchy'schen Integralsatzes für Funktionen mit isolierten Singularitäten. Hierzu benötigen wir zunächst Kapitel 9!

Ergänzungen

Da dieser Begriff in diesem Kapitel häufiger Aufgetaucht ist, soll er nun an dieser Stelle definiert werden:

Definition. Zusammenhangskomponente:

Die Zusammenhangskomponente entspricht der maximalen⁵ zusammenhängende Menge.

⁴Der Beweis folgt in „Funktionentheorie II“.

⁵sobald etwas hinzu kommt ist die Menge nicht mehr zusammenhängend

9. Der globale Satz von Cauchy

Bemerkung. Das Integral längs eines geschlossenen Weges innerhalb des Holomorphie-Bereiches des Integranden muss nicht notwendigerweise verschwinden; zum Beispiel gilt für die $|m|$ -mal durchlaufene Einheitskreisscheibe mit der Parametrisierung:

$$\gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{i\pi m t}$$

mit festem $m \in \mathbb{Z}$, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i m e^{2\pi i m t}}{e^{2\pi i m t}} dt = m$$

(vgl auch die Orthogonalitätsrelation aus Kapitel 3). Tatsächlich hängt das Verschwinden oder nicht Verschwinden solcher Wegintegrale von der Topologie der Integrationswege bzgl etwaiger Singularitäten des Integranden ab!

Definition. Umlaufzahl:

Sei γ ein geschlossener Weg und ω ein Punkt in \mathbb{C} , der nicht auf γ liege. Dann heißt

$$n(\gamma, \omega) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \omega}$$

die **Umlaufzahl** von γ um ω . Im obigen Beispiel ist $n(\gamma_m, 0) = m$ wobei das Vorzeichen von m der Orientierung von γ_m entspricht.

Satz 9.1. Sei γ ein geschlossener Weg in \mathbb{C} und $\Omega := \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$. Dann ist $\omega \mapsto n(\gamma, \omega)$ eine **ganzahlige Funktion** auf Ω , die in jeder Zusammenhangskomponente von Ω konstant, und auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente gleich Null ist.

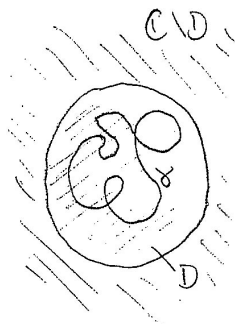


Abbildung 9.1.: Anschauliche Darstellung von Satz 9.1

Bemerkung. Da $\text{Bild}(\gamma)$ kompakt ist, gibt es eine diese Menge umfassende, beschränkte Kreisscheibe D , deren Komplement $\mathbb{C} \setminus D$ zusammenhängend ist (siehe Abb. 9.1). Also liegt $\mathbb{C} \setminus D$ in einer Zusammenhangskomponente und insbesondere besitzt Ω genau eine unbeschränkte Komponente¹.

Beweis. Sei γ durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$ gegeben und $\omega \in \mathbb{C}$ fest. Dann gilt:

$$n(\gamma, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \omega} dt. \quad (9.1)$$

Es ist genau dann $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, wenn $e^z = 1$ ist (Siehe Übung 1 oder 2). Damit ist $n(\gamma, \omega) \in \mathbb{Z}$ äquivalent zu $\varphi(1) = 1$, wobei

$$\varphi(\tau) := \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \omega} dt\right), \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1$$

Differenzieren (Kettenregel) liefert:

$$\varphi'(\tau) = \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega} \cdot \varphi(\tau)$$

mit Ausnahme einer höchstens endlichen Menge T , auf der φ nicht (notwendig) diffbar ist. Äquivalent hierzu ist

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega}.$$

Damit ist

$$\tau \mapsto \frac{\varphi(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega}$$

eine stetige Funktion auf $[0, 1]$, deren Ableitung auf $[0, 1] \setminus T$ gleich

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\varphi(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega} = \frac{\varphi'(\tau)(\gamma(\tau) - \omega) - \gamma'(\tau)\varphi(\tau)}{(\gamma(\tau) - \omega)^2} \equiv 0$$

(denn: $\varphi'(\tau) = \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega} \varphi(\tau)$). Da T endlich ist, ist $\frac{\varphi(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega}$ konstant auf $[0, 1]$, und wegen $\varphi(0) = e^0 = 1$ ist, folgt schließlich

$$\frac{\varphi(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega} \equiv \frac{\varphi(0)}{\gamma(0) - \omega} = \frac{1}{\gamma(0) - \omega}$$

bzw.

$$\varphi(\tau) = \frac{\gamma(\tau) - \omega}{\gamma(0) - \omega} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1.$$

¹Einen ganz ähnlichen Satz hatte Prof. Steuding in Ana IV bewiesen

9. Der globale Satz von Cauchy

Da γ geschlossener Weg ist (also $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt), folgt $\varphi(1) = \frac{\gamma(1) - \omega}{\gamma(0) - \omega} = 1$. Also ist $n(\gamma, \omega)$ eine ganze Zahl.

Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Funktion – wie $\omega \mapsto n(\gamma, \omega)$ – ist wieder zusammenhängend; damit ist $n(\gamma, \omega)$ als ganzzahlige Funktion konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$. Für hinreichend großes $|\omega|$ gilt (siehe Abb 9.2)

$$|n(\gamma, \omega)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{|z - \omega|} \stackrel{\text{trivial}}{\leq} \frac{l(\gamma)}{2\pi} \left\| \frac{1}{z - \omega} \right\|_{\gamma} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\omega|}\right)$$

also $n(\gamma, \omega) = 0$ auf der unbeschränkten Komponente. □

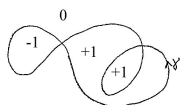


Abbildung 9.2.: Orientierungen der Umlaufzahlen

Bemerkung. Hätten wir bereits den „komplexen Logarithmus“ zur Verfügung, so hätten wir kürzer mittels

$$\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - \omega} = (\log(\gamma(\tau) - \omega))'$$

argumentieren können. Hierzu und zur Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus mehr in Kapitel 10.

Definition. Kette und Träger/Spur, sowie Zyklus:

Nun verallgemeinern wir die Kurvenintegrale auf Integrale über so genannte **Ketten**². Eine **Kette** Γ ist eine formale (endliche) Summe

$$\Gamma = \sum_{j=1}^J m_j \gamma_j \quad \text{mit } m_j \in \mathbb{Z},$$

wobei die γ_j (stückweise stetig diffbare) Wege sind. Die Summe zweier solcher Ketten, in denen genau dieselben Wege γ_j vorkommen (was man stets erzielen kann durch Addition von Termen der Form „ $0 \cdot \gamma_j$ “), ist erklärt durch

$$\begin{aligned} \Gamma + \Gamma' &= \left(\sum_{j=1}^J m_j \gamma_j \right) + \left(\sum_{j=1}^J m'_j \gamma_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^J (m_j + m'_j) \gamma_j. \end{aligned}$$

Die Menge aller Ketten besitzt also eine Gruppenstruktur, es ist die von allen Wegen erzeugte freie abelsche Gruppe. Das Integral über eine Kette Γ (wie oben) ist definiert durch:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^J m_j \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

²vgl Ana III

(vgl. mit Differentialform-Kalkül in Ana III). Unter dem **Träger (Spur)** der Kette Γ verstehen wir die Menge

$$\text{Tr}(\Gamma) := \bigcup_{\substack{j=1 \\ m_j \neq 0}}^J \text{Bild } \gamma_j.$$

Die Kette heißt **geschlossene Kette**, wenn **alle** γ_j geschlossene Wege sind; eine geschlossene Kette nennt man auch **Zyklus**. Ist γ ein Integrationsweg und γ^- der umgekehrt orientierte Weg, so ist $\gamma + \gamma^-$ eine geschlossene Kette (bzw ein Zyklus).



Abbildung 9.3.: Beispiele für geschlossene und nicht geschlossene Ketten

Bemerkung. Die **Umlaufzahl** einer geschlossenen Kette Γ (wie oben) ist

$$n(\Gamma, \omega) = \sum_{j=1}^J m_j n(\gamma_j, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \omega}$$

für $\omega \notin \text{Tr}(\Gamma)$.

Definition. Nullhomolog:

Ist Ω ein Gebiet und Γ eine Kette mit Träger in Ω , so heißt Γ **nullhomolog**³ in Ω , wenn Γ geschlossen ist und

$$n(\Gamma, \omega) = 0 \quad \forall \omega \notin \Omega.$$

(siehe Abb 9.4).

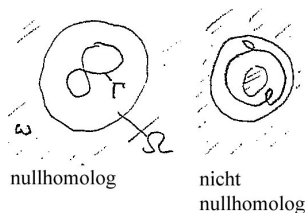


Abbildung 9.4.: Beispiel für (nicht) nullhomologe Kette

Bemerkung. Betrachten wir zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 . Ω_1 ist Null-homolog, da Γ in Ω liegt und ω außerhalb des Weges Γ liegen **muss**. Im Fall Ω_2 betrachten wir ein Gebiet mit einer „Insel“, der Weg Γ_2 verläuft um diese Insel. Dieses Gebiet ist nicht Null-homolog, denn das ω kann sich auf diese „Insel“ retten.

Zwei Ketten Γ und Γ' heißen **homolog** in Ω (in Zeichen $\Gamma \sim \Gamma'$), wenn ihre Differenz $\Gamma - \Gamma'$ nullhomolog in Ω ist, also

$$n(\Gamma, \omega) = n(\Gamma', \omega)$$

für alle $\omega \notin \Omega$ (siehe Abb 9.5).

³Homo=gleich; Logos=Wort

9. Der globale Satz von Cauchy

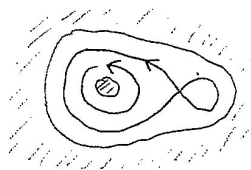


Abbildung 9.5.: Zwei homologe Wege Γ_1 und Γ_2

Beispiel. Es ist $\gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_m(t) = e^{2\pi i m t}$ für festes $m \in \mathbb{Z}$ die $|m|$ -mal durchlaufene Einheitskreislinie mit positiver bzw negativer Orientierung, je nachdem, ob $m > 0$ oder $m < 0$ (siehe Abb 9.6). Die Kette $\Gamma = \sum a_m \gamma_m$ ist genau dann nullhomolog in $\dot{D}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$ mit $r > 1$, wenn

$$0 = n(\Gamma, \omega) = \sum a_m n(\gamma_m, \omega)$$

für alle $\omega \notin \dot{D}_r(0)$ bzw.

$$0 = \sum a_m m$$

da $n(\gamma_m, \omega) = 0$ für $|\omega| \geq r$ und $n(\gamma_m, \omega) = m$ für $\omega = 0$

In $D_r(0) = \dot{D}_r(0) \cup \{0\}$ hingegen ist Γ stets nullhomolog (da „0“ aus dem Komplement



Abbildung 9.6.: Beispiel einer nullhomologen Kette

entfernt wurde).

Jetzt ein Haupt-Ergebnis der Funktionentheorie.

Satz 9.2. (Globaler Cauchy'scher Integralsatz und Integralformeln):

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und Γ eine nullhomologe Kette in Ω sowie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten:

1. $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
2. Für jeden Punkt $\zeta \in \Omega \setminus \text{Tr}(\Gamma)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n(\Gamma, \zeta) \cdot f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz$$

28.11.08

Bemerkung. Dieser Satz verallgemeinert den Cauchy'schen Integralsatz 4.4 und die Cauchy'schen Integralformeln (Satz 5.1 bzw Korollar 5.2) (Siehe hierzu auch Satz 9.5)

Beweis. ⁴

1. \Leftarrow 2.: Denn es gilt: Zu $\zeta \in \Omega \setminus \text{Tr}(\Gamma)$ ist $F(z) = (z - \zeta)f(z)$ holomorph in Ω mit $F(\zeta) = 0$, sodass mittels 2. und der Definition der Umlaufszahl n gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{n(\Gamma, \zeta)}_{= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z-\zeta} dz} F(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-\zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

zu zeigen ist 2.: Hierzu folgen wir einem eleganten Beweis von DIXON (1971), welcher im Wesentlichen nur die Cauchy'schen Integralformeln für Kreisscheiben und den Satz von Liouville (Satz 5.4) verwendet. Wir definieren:

$$g : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C},$$

$$g(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}, & \text{falls } z \neq \zeta \\ f'(z), & \text{falls } z = \zeta. \end{cases}$$

Dann ist $\zeta \mapsto g(\zeta)$ holomorph für jedes $z \in \Omega$ (die Singularität in $z \in \zeta$ ist **behoben**). Wir zeigen nun, dass g stetig auf $\Omega \times \Omega$ ist. Das ist klar für $z \neq \zeta$. zeigen wir also die Stetigkeit nahe der Singularität, wir betrachten (z, ζ) nahe (ω, ω) :

$$g(z, \zeta) - g(\omega, \omega) = \frac{1}{z - \zeta} \int_{\zeta}^z (f'(u) - f'(\omega)) du$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{z - \zeta} \int_{\zeta}^z f'(u) du = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

Ende Nebenrechnung

wobei das Integral über das Linien-Segment $[\zeta, z]$ genommen ist. Die triviale Abschätzung des Integrales und die Stetigkeit von f' implizieren die Stetigkeit von g in (ω, ω) :

$$\begin{aligned} |g(z - \zeta) - g(\omega, \omega)| &\leq \frac{1}{|z - \zeta|} \int_{\zeta}^z |f'(u) - f'(\omega)| du \\ &\leq \max_{u \in [\zeta, z]} |f'(u) - f'(\omega)| \xrightarrow{\zeta, z \rightarrow \omega} 0 \end{aligned}$$

⁴in umgekehrter Reihenfolge

9. Der globale Satz von Cauchy

damit ist die Stetigkeit auf $\Omega \times \Omega$ gezeigt. Sei nun Ω^0 die offene Menge aller $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\Gamma)$ mit Umlaufszahl $n(\Gamma, z) = 0$ (offen nach Satz 9.1) Nach Voraussetzung enthält Ω^0 das Komplement von Ω (siehe **Definition von Nullhomolog**), also gilt: $\mathbb{C} = \Omega \cup \Omega^0$. Wir definieren eine weitere Funktion $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \zeta) dz \quad \text{für } \zeta \in \Omega$$

bzw.

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad \text{für } \zeta \in \Omega^0$$

Achtung! bisher haben wir noch nicht gezeigt, dass $\Omega \cap \Omega^0 = \emptyset$ (also disjunkt) sind. Wir müssen also noch beachten, dass für $\zeta \in \Omega \cap \Omega^0$ die beiden Integrale übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{\Gamma} g(z, \zeta) dz &\stackrel{\text{Def. v. } g}{=} \int_{\Gamma} \left(\frac{f(z)}{z - \zeta} - \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right) dz \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) n(\Gamma, \zeta) \\ &\stackrel{\zeta \in \Omega^0}{=} 0 \end{aligned}$$

(an dieser Stelle geht die Topologie der Null-homologen Kette Γ ein!) Als nächstes zeigen wir, dass h eine **beschränkte ganze** Funktion ist; gilt das nämlich, so ist h nach dem Satz von Liouville (Satz 5.4) konstant. Da Ω^0 nach Satz 9.1 die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\Gamma)$ enthält, folgt für $\zeta \in \Omega^0$ die Abschätzung

$$|h(\zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} l(\Gamma) \left\| \frac{f(z)}{z - \zeta} \right\|_{\Gamma},$$

wobei $l(\Gamma)$ die Summe der Bogenlängen der Wege γ_j in Γ (gezählt mit Vielfachheiten⁵) ist. Es gilt

$$|h(\zeta)| \xrightarrow{|\zeta| \rightarrow \infty} 0$$

($z \in \text{Tr}(\Gamma)$ „beschränkt“) Also ist $h \equiv 0$. Somit ergibt sich für $\zeta \in \Omega \setminus \text{Tr}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} 0 = h(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \zeta) dz \stackrel{\text{Def. v. } g}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \zeta} f(\zeta) \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{j=1}^J m_j \gamma_j \\ l(\Gamma) &= \sum_{j=1}^J |m_j| l(\gamma_j) \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) n(\Gamma, \zeta)$$

Dies ist die Behauptung 2. für $k = 0$; der allgemeine Fall $k \in \mathbb{N}_0$ folgt durch Differenzieren unterm Integral (wie im Beweis von Korollar 5.2). Es verbleibt zu zeigen, dass h eine beschränkte, auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion ist. Es ist klar, dass h holomorph in Ω^0 ist, dann verbleibt also der Nachweis für Ω . Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von g auf kompakten Teilmengen von $\Omega \times \Omega$ folgt die Stetigkeit von h . Für die Holomorphie in Ω betrachten wir zu beliebigem $\zeta_0 \in \Omega$ eine offene Kreisscheibe $C \subset \Omega$ um ζ_0 . Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset C$

$$\int_{\Delta} h(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \int_{\Gamma} g(z, \zeta) dz d\zeta,$$

und mit der gleichmäßigen Stetigkeit erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_{\Delta} g(z, \zeta) d\zeta dz.$$

Nun ist $\zeta \mapsto g(z, \zeta)$ für jedes feste z holomorph und also verschwindet das **innere Integral** nach dem Cauchy'schen Integralsatz 4.4 für Kreisscheiben. Also gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset C$:

$$\int_{\Delta} h(\zeta) d\zeta = 0$$

und mit dem Satz von Morera (Korollar 6.2) folgt die Holomorphie von h in zunächst D und schließlich in Ω bzw. sogar in ganz $\mathbb{C} = \Omega \cup \Omega^0$. Für die Beschränktheit betrachten wir ein ζ außerhalb einer großen Kreisscheibe, $|\zeta| \geq R$, dann gilt nach Satz 9.1 (wie oben):

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \cdot \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \zeta} \xrightarrow[\text{bzw. } R \rightarrow \infty]{|\zeta| \rightarrow \infty} 0$$

Ebenso ist

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \xrightarrow{|\zeta| \rightarrow \infty} 0$$

mit der trivialen Abschätzung.

Also ist h beschränkt außerhalb einer sehr großen Kreisscheibe. Mit der Holomorphie von h ist h somit beschränkt in ganz \mathbb{C} . \square

Bemerkung. Die Forderung nach einer nullhomologen Kette Γ in Ω ist in der Formulierung des globalen Cauchy'schen Integralsatzes 9.2 **unerlässlich**: Ist nämlich Γ nicht nullhomolog, so existiert ein $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $n(\Gamma, \omega) \neq 0$ und für die Funktion $f(z) = \frac{1}{z - \omega}$ ergibt sich

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \omega} = 2\pi i \cdot n(\Gamma, \omega) \neq 0$$

9. Der globale Satz von Cauchy

Genau dieser Sachverhalt ist von besonderem Interesse, wenn wir später meromorphe Funktionen integrieren...

Korollar 9.3. Seien Γ und Γ' homologe Ketten in einer offenen Menge Ω und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz. \quad (9.2)$$

Vorstellen kann man sich eine Umgebung Ω mit zwei sich schneidenden Wegen Γ und Γ' . Man kann sich also den einfacheren Weg aussuchen, über den man integrieren möchte...

Beweis. folgt sofort aus Satz 9.2 (2.), denn $\Gamma - \Gamma'$ ist nullhomolog. \square

Eine andere Konsequenz, die zeigt, wie man die Integration über eine geschlossene Kette oft durch eine andere angenehmere Kette ersetzen kann:

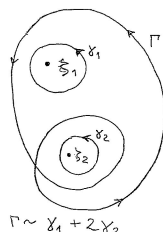


Abbildung 9.7.: Veranschaulichung zu Korollar 9.4

Korollar 9.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und die Kette Γ nullhomolog in Ω . Ferner seien $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \Omega$ paarweise verschieden und γ_j sei der positiv orientierte Rand einer abgeschlossenen Kreisscheibe D_j mit $\zeta_j \in D_j \subset \Omega$, so dass $D_k \cap D_j = \emptyset$ für $k \neq j$. Dann ist

$$\Gamma \sim \sum_{j=1}^m n(\Gamma, \zeta_j) \gamma_j \quad (\text{homolog}) \quad (9.3)$$

in $\Omega \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ und es gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m n(\Gamma, \zeta_j) \int_{\gamma_j} f(z) dz \quad (9.4)$$

für jede in $\Omega \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ holomorphe Funktion f .

Beweis. Sei $\Gamma' := \Gamma - \sum_{j=1}^m n(\Gamma, \zeta_j) \gamma_j$ und $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann gilt

$$n(\Gamma', \omega) = \underbrace{n(\Gamma, \omega)}_{=0} - \sum_{j=1}^m n(\Gamma, \zeta_j) \underbrace{n(\gamma_j, \omega)}_{=0} = 0,$$

denn ω liegt außerhalb jeder Kreislinie γ_j . Für $\omega = \zeta_k$ ist $n(\gamma_j, \zeta_k) = 1$ falls $j = k$ und $= 0$ sonst. Also folgt $n(\Gamma', \zeta_k) = 0$ und Γ' ist nullhomolog in $\Omega \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$. Die Behauptung folgt mit Korollar 9.3. \square

Bemerkung. Für viele Anwendungen genügt eine topologisch einfachere Version des Cauchy'schen Integralsatzes.

Beweis. Seien γ_0 und γ_1 geschlossene Kurven in einer offenen Menge Ω mit Parametrisierungen jeweils definiert über dem Einheitsintervall $[0, 1]$, also mit jeweils gemeinsamen Anfangs- und Endpunkten

$$\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$$

bzw.

$$\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$$

Dann heißen γ_0 und γ_1 **homotop** in Ω , wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ gibt (siehe Abb 9.8), so dass

1. $H(s, 0) = \gamma_0(s)$, $H(s, 1) = \gamma_1(s)$ für alle $s \in [0, 1]$
2. $H(0, t) = H(1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

wenn die Wege γ_0 und γ_1 also mittels H (genauer: durch die einparametrische Kurvenschar⁶ $s \mapsto \gamma_t(s) := H(s, t)$ mit t fest) stetig ineinander überführt werden können.

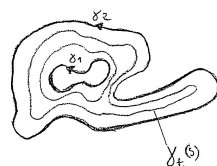


Abbildung 9.8.: Veranschaulichung der Homotopie

□

Homotopien beschreiben stetige Deformationen und spielen eine zentrale Rolle in der „algebraischen Topologie“ (vgl Ana IV).

Satz 9.5. Seien γ_0 und γ_1 geschlossene Wege in einer offenen Menge Ω . Sind γ_0 und γ_1 homotop in Ω , so sind sie auch homolog in Ω .

Bemerkung. Die Umkehrung dieses Satzes gilt **nicht**, wie das Bild 9.9 zeigt!

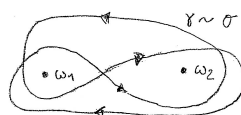


Abbildung 9.9.: Gegenbeispiel zur Umkehrung von Satz 9.5

⁶Die entstehenden Wege schmiegen sich so nahe, wie man nur will an die Wege γ_0 und γ_1

9. Der globale Satz von Cauchy

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{C}$ ist die Aussage trivial (denn die Bedingung $n(\gamma_0, \omega) = n(\gamma_1, \omega)$ für alle $\omega \notin \Omega$ ist leer). Sei also $\Omega \neq \mathbb{C}$ und $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ beliebig aber fest. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1] \times [0, 1]$ ist H gleichmäßig stetig und $H([0, 1] \times [0, 1])$ kompakt. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit⁷

$$|\omega - H(s, t)| > 2\varepsilon \quad \text{für alle } s, t \in [0, 1] \quad (9.5)$$

$$|H(s, t) - H(s', t')| < \varepsilon \quad \text{für } |s - s'| + |t - t'| \leq \frac{1}{m}. \quad (9.6)$$

Wir approximieren nun die Kurven $s \mapsto H\left(s, \frac{k}{m}\right)$ mit $0 \leq k \leq m$ durch Polygonzüge (siehe Abb. 9.10):



Abbildung 9.10.: Ein Stück vom Polygonzug über $H(s, k/4)$

$$P_k(s) = \underbrace{H\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{m}\right)}_{\cong I} (ms + 1 - j) + \overbrace{H\left(\frac{j-1}{m}, \frac{k}{m}\right)}^{\cong II} (j - ms)$$

für $j-1 \leq ms \leq j$ und $j = 1, 2, \dots, m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| P_k(s) - H\left(s, \frac{k}{m}\right) \right| &\leq \underbrace{\left| H\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{m}\right) - H\left(s, \frac{k}{m}\right) \right|}_{\leq \varepsilon \text{ nach (9.5).}} \cdot (ms + 1 - j) \\ &\quad + \underbrace{\left| H\left(\frac{j-1}{m}, \frac{k}{m}\right) - H\left(s, \frac{k}{m}\right) \right|}_{< \varepsilon} \cdot (j - ms) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt für $k = 0$ und $k = m$

$$\left| P_0(s) - \underbrace{\gamma_0(s)}_{=H(s,0)} \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| P_m(s) - \underbrace{\gamma_1(s)}_{=H(s,1)} \right| < \varepsilon \quad (9.7)$$

⁷wir betrachten hier also wieder zwei Wege γ_0 und γ_1 (die sich nicht schneiden) in der Umgebung Ω . γ_t ist ein Weg, der zwischen den beiden γ_i $i = 0, 1$ verläuft. $\gamma_t(s) = H(s, t)$ für feste t . Außerdem gibt es einen Punkt $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ außerhalb von Ω . ω hat den Abstand 2ε von $H([0, 1] \times [0, 1])$. Des weiteren betrachten wir einen weiteren Weg $\gamma_{t'}(s) = H(s, t')$.

Ferner ergibt sich für alle k und alle $s \in [0, 1]$ via 9.5

$$|\omega - P_k(s)| > \varepsilon \quad (9.8)$$

(denn: $|\omega - P_k(s)| \geq |\omega - H(s, k/m)| - |H(s, k/m) - P_k(s)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$) sowie noch für $k \neq 0$ via 9.6

$$|P_{k-1}(s) - P_k(s)| < \varepsilon. \quad (9.9)$$

Damit besteht also folgendes System von Ungleichungen (sukzessive durch Kombination von (9.7) bzw (9.9) mit (9.8)):

$$\begin{cases} |\gamma_0(s) - P_0(s)| < |\omega - P_0(s)| \\ |P_{k-1}(s) - P_k(s)| < |\omega - P_k(s)| \quad \text{für } 1 \leq k \leq m. \\ |\gamma_1(s) - P_m(s)| < |\omega - P_m(s)| \end{cases} \quad (9.10)$$

(vgl mit Satz 16.6 über den *Hund an der Leine*; Ana IV). Insbesondere gilt $\omega \notin \text{Bild } P_0$. Mit

$$\varphi(s) = \frac{\gamma_0(s) - \omega}{P_0(s) - \omega} \quad \text{für } s \in [0, 1]$$

folgt

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \omega} - \frac{P_0'(s)}{P_0(s) - \omega},$$

sowie

$$|1 - \varphi(s)| = \left| \frac{P_0(s) - \omega - \gamma_0(s) + \omega}{P_0(s) - \omega} \right| \stackrel{(9.10)}{<} 1$$

ist determiniert (also bestimmbar), da $\omega \notin \text{Bild } P_0$

Also ist $\varphi(s)$ stets enthalten in der offenen Kreisscheibe vom Radius 1 um den Mittelpunkt 1 und damit $0 \notin \text{Bild } \varphi$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} 0 = n(\varphi, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left\{ \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \omega} - \frac{P_0'(s)}{P_0(s) - \omega} \right\} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z - \omega} - \frac{1}{2\pi i} \int_{P_0} \frac{dz}{z - \omega} \\ &= n(\gamma_0, \omega) - n(P_0, \omega) \end{aligned}$$

Es ist also

$$n(\gamma_0, \omega) = n(P_0, \omega)$$

und sukzessive folgt aus (9.10) nun

$$n(\gamma_0, \omega) = n(P_k, \omega) = n(\gamma_1, \omega),$$

was zu zeigen war! □

9. Der globale Satz von Cauchy

Bemerkung. Der Beweis war unter Anderem deshalb so technisch, da Homotopie **nicht** als differenzierbar vorausgesetzt wird. Intuitiv ist die Aussage des Satzes selbstverständlich, allerdings mahnt bereits der **Jordan'sche Kurvensatz**⁸ zur Vorsicht

Definition. einfach zusammenhängend:

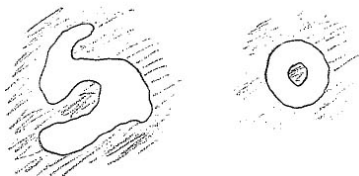


Abbildung 9.11.: Beispiel für ein einfach zusammenhängendes (links) und ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet (rechts)

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach Zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene Weg γ in Ω homotop zu einem Punkt⁹ ist, sich topologisch also auf einen Punkt **innerhalb** Ω zusammenziehen lässt. Zum Beispiel konvexe Mengen wie **offene Kreisscheiben**, nicht aber gelochte Kreisscheiben oder $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Vgl Abbildung 9.11).

Korollar 9.6. (Cauchy'scher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete)¹⁰:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. Dann ist jede geschlossene Kette Γ in Ω nullhomolog und für jede in Ω holomorphe Funktion f gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (9.11)$$

Beweis. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω ist **jeder** geschlossene Weg γ in Ω homotop zu einem Punkt, also ist nach Satz 9.5 jede geschlossene Kette Γ nullhomolog (denn die Umlaufzahl eines konstanten Weges ist Null); die Aussage folgt nun aus dem globalen Cauchy'schen Integralsatz 9.2. \square

Bemerkung. Korollar 9.6 ist tatsächlich schwächer als Satz 9.2 (Homologieversion), wie das in Abbildung 9.12 aufgeführte Beispiel eines nullhomologen Weges in dem **nicht** einfach zusammenhängendem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{\omega_1, \omega_2\}$ zeigt.

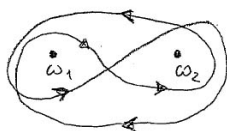


Abbildung 9.12.: homolog $\not\leftarrow$ homotop

⁸Jede geschlossene Jordankurve zerlegt die Ebene in ein Inneres und in ein unbeschränktes Äußeres.
Beweis in Ana IV

⁹=konstanter Weg

¹⁰der letzte in dieser VL

Trotzdem spielen einfach zusammenhängende Gebiete eine zentrale Rolle in der Funktionentheorie. Äquivalent sind.

Ω ist einfach zusammenhängend

\Leftrightarrow jeder geschlossene Weg/Kette in Ω nullhomolog (folgt aus Satz 9.5)

$\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega$ besitzt **keine beschränkte Zusammenhangskomponente** (siehe Übung/Tutorium)

$\Leftrightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend (hierzu kompaktifiziert man $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

\Leftrightarrow Mit jedem geschlossenen Weg γ in Ω ist auch das Innere von γ ganz in Ω enthalten (dies benutzt den Jordan'schen Kurvensatz)¹¹

\Leftrightarrow Jede in Ω holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion in Ω (analog zum Beweis von Satz 4.3; Übung).

Später kommen hierzu noch die Existenz eines holomorphen Logarithmus bzw Quadratwurzel für jede in Ω nicht verschwindende holomorphe Funktion f hinzu.

¹¹Anschaulich: Ω ist einfach zusammenhängend, wenn Ω „keine Löcher“ hat

10. Analytische Fortsetzung und komplexer Logarithmus

05.12.08

Die analytische Fortsetzung¹ zeigt eine zentrale Rolle in der Funktionentheorie. Manche Funktion gewinnt ihre Bedeutung erst in einem Teil der komplexen Ebene, wo sie anfangs noch gar nicht definiert war.

Beispielsweise gilt für die Riemann'sche Zeta-Funktion (vgl 6.3):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist die **alte** Definition, die neue ist:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

für $\operatorname{Re} s > 0$, was also eine analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ als meromorphe Funktion in die rechte Halbe-Ebene liefert (mit einfachem Pol in $s = 1$; die weiteren Nullstellen von $1 - 2^{1-s}$ sind **hebbare Singularitäten** [siehe hierzu auch die Übung 7]).

Neben dem nur eingeschränkt einsetzbaren Schwarz'schen Spiegelungs-Prinzip (Satz 7.3) ist die Fortsetzung längs **Kreisketten** von großer Bedeutung:

Definition. Kreisketten:

Eine endliche Folge $(K_0, \dots, K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Kreisscheiben in \mathbb{C} heißt **Kreiskette**, wenn die **Mittelpunkte** von K_{l-1} und K_l für $i = 1, \dots, n$ **im Durchschnitt** $K_{l-1} \cap K_l$ **enthalten** sind. Es gibt nun holomorphe Funktionen $f_l : K_l \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f_{l-1}(z) = f_l(z), \quad \forall z \in K_{l-1} \cap K_l.$$

für $l = 1, \dots, n$, so sagt man, f_n entstehe aus f_0 durch **analytische Fortsetzung** längs der Kreiskette (K_0, \dots, K_n) . In diesem Fall ist f_n nach dem Identitätssatz 7.1 eindeutig bestimmt, da sukzessive die Funktionen f_{l-1} um den Mittelpunkt von K_l nach Satz 6.1 in eine Potenzreihe entwickelt werden können, die dann also f_l darstellt.²

Nun ein nützliches Hilfsmittel für die Existenz der analytischen Fortsetzung längs Kreisketten:

¹bzw holomorphe und meromorphe Fortsetzung

²Eigentlich würde es ausreichen, wenn die Schnitte der Kreisscheiben nicht leer sind!

Satz 10.1. Sei (K_0, \dots, K_n) eine Kreiskette und f_0 holomorph auf K_0 . Besitzt die Ableitung f_0' eine analytische Fortsetzung längs (K_0, \dots, K_n) , so auch f_0 selbst.

Beweis. Seien $g_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktionen, die $f_0' =: g_0$ analytisch längs (K_0, \dots, K_n) fortsetzen. Wir machen die für $k = 0$ trivialerweise erfüllte Induktionsannahme, dass sich f_0 durch f_0, \dots, f_k längs (K_0, \dots, K_k) analytisch fortsetzen lässt. Dann gilt $f_i' \equiv g_i$ für $0 \leq i \leq k$ (nach dem Identitätssatz 7.1; siehe oben). Also ist f_k eine Stammfunktion von g_k . Nun wählen wir eine Stammfunktion G_{k+1} von g_{k+1} , was möglich ist, da g_{k+1} durch eine konvergente Potenzreihe gegeben ist. (Satz 6.1).

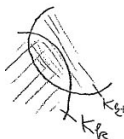


Abbildung 10.1.: Überlappende Kreise K_k und K_{k+1}

Dann gilt:

$$G'_{k+1} = f'_k(z) \quad \forall z \in K_k \cap K_{k+1}$$

(siehe Abb 10.1) und somit ist

$$G_{k+1}(z) = f_k(z) + c$$

mit einer Konstanten c (nach Korollar 3.4). Mit

$$f_{k+1}(z) := G_{k+1}(z) - c$$

für $z \in K_{k+1}$ ist f_0 nun fortsetzbar zu f_{k+1} auf K_{k+1} . Die Induktion ist beendet. \square

Wir geben mit dem **komplexen Logarithmus** ein wichtiges Beispiel:

Beispiel 10.1. Sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und K_0 eine ganz in Ω enthaltene, offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 = 1$. Sei $g_0 = \frac{1}{z}$ für $z \in K_0$ und $f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$ definiert als die Stammfunktion von g_0 mit $f_0(1) = 0$. Aus der reellen Analysis³ ist die Potenzreihenentwicklung

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \quad \text{für } |z-1| < 1$$

bekannt; tatsächlich ist dies die Potenzreihenentwicklung des reellen Logarithmus $\log z$ für $z \in (0, 2]$. Mit Satz 10.1 lässt sich f_0 längs jeder Kreiskette in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch fortsetzen. Jedoch gibt es keine in Ω holomorphe Fortsetzung f , sonst wäre dies eine Stammfunktion von $g_1(z) = \frac{1}{z}$ (siehe hierzu Korollar 3.3), im Widerspruch zu

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

Tatsächlich kann analytische Fortsetzung längs Kreisketten vom Verlauf der Kreisketten abhängen und somit auf eine „**mehrdeutige**“ **Fortsetzung** f führen! — so auch beim **komplexen Logarithmus!**

³genauer aus Ana III

10. Analytische Fortsetzung und komplexer Logarithmus

Definition. Zweige und Hauptzweig:

Die Exponentialfunktion $z = x + iy \mapsto \exp(z) = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$ bildet jeden 2π -breiten offenen Horizontstreifen

$$\{z = x + iy \mid \alpha - \pi < y < \alpha + \pi\}$$

bijektiv auf die geschlitzte Ebene $\{re^{i\varphi} \mid r > 0, \alpha - \pi < \varphi < \alpha + \pi\}$ ab, und die Abbildung

$$z = re^{i\varphi} \mapsto \log r + i\varphi = \log |z| + i \arg z$$

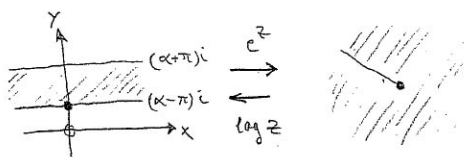


Abbildung 10.2.: Veranschaulichung der Mehrdeutigkeit der Exponentialfunktion

(diese Abbildung macht aus dem Horizontstreifen eine Gerade, die an einem Punkt z_0 beginnt und sich unendlich lang in eine Richtung verlängert, siehe Abb 10.2) definiert für diese r und φ die Umkehrung; diese ist holomorph, was aus der Holomorphie der Exponentialfunktion und nach dem Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion aus der reellen Analysis⁴ folgt, der sich sofort auf die komplexe Diffbarkeit auswirkt. Für jedes reelle α nennt man diese Umkehrfunktion einen **Zweig des komplexen Logarithmus** und für $\alpha = 0$ spricht man vom **Hauptzweig**; wir notieren jeden dieser Zweige mit $z \mapsto \log z$. Wegen $z = \exp(\log(z))$ folgt mit der Kettenregel $(\log z)' = \frac{1}{z}$ wie im Reellen. Im obigen Beispiel ist f_0 also der Hauptzweig des Logarithmus eingeschränkt auf K_0 und jede analytische Fortsetzung f_k längs einer Kreiskette führt auf einen geeigneten Zweig des Logarithmus. Führt zum Beispiel eine Kreiskette einmal im mathematisch positiven Sinne um den Nullpunkt herum, bis sie bei $K_n = K_0$ wieder ankommt, so ist aus dem Hauptzweig f_0 ein Nebenzweig $f_n = f_0 + 2\pi$ entstanden⁵ (siehe Abbildung 10.3).

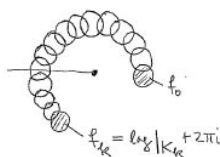


Abbildung 10.3.: Fortsetzung des Hauptzweiges $\alpha = 0$ über den Schlitz zum ersten Nebenzweig

Insbesondere ist auf Grund der Mehrdeutigkeit des Logarithmus Vorsicht bei der Funktionalgleichung geboten! Man verifiziert leicht:

$$\log z + \log \omega = \log(z\omega) \Leftrightarrow \arg z + \arg \omega \in (-\pi, \pi),$$

⁴aus Ana I

⁵Bereits J.BERNOULLI kannte 1702 die Gleichung $\log i = \frac{\pi i}{2}$ bzw. $i \log i = -\frac{\pi}{2}$; erst EULER stellte 1749 das **Permanenzprinzip** für den Logarithmus in Frage und schreibt, dass jede Zahl unendlich viele Logarithmen besitzt.

also insbesondere für alle $z, \omega \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \omega > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Letztlich entspricht die Mehrdeutigkeit des Logarithmus genau der $2\pi i$ -Periodizität seiner Umkehrfunktion.

$$\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung. Die Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus lässt sich am besten an der zugehörigen **Riemann'schen Fläche** visualisieren. Diese geometrische Objekte besteht aus abzählbar unendlich vielen Exemplaren der komplexen Ebene \mathbb{C}_m ($m \in \mathbb{Z}$), jeweils entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten und die beiden Schnitte mit jeweils einem Schnitt der Blätter \mathbb{C}_{m-1} bzw. \mathbb{C}_{m+} verklebt, so dass um den Nullpunkt herum die unendlich vielen Blätter \mathbb{C}_m wie eine flach gedrückte Wendeltreppe zusammenhängen (Siehe Abb. 10.4).

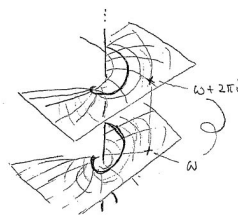


Abbildung 10.4.: Riemann'sche Fläche nach Prof. J. Steudinig

Dann kann man auf jedem Blatt einen der abzählbar unendlich vielen Zweige des Logarithmus

$$\log z = \log |z| + i(\arg(z + 2\pi m))$$

für $m = 0, \pm 1 + \pm 2, \dots$ und $\arg z \in (-\pi, \pi)$ definieren, so dass $\log z$ auf dem m -ten Blatt \mathbb{C}_m der Fläche durch den m -ten Zweig erklärt ist und an dem Schnittstellen ebenfalls eindeutig und holomorph über Fortsetzung entlang Kreisketten definiert ist. Damit ist nun mit dieser **Riemann'schen Fläche** ein Argumentbereich für den komplexen Logarithmus gefunden, auf dem $\log z$ **eindeutig** erklärt ist ohne der analytischen Fortsetzung Grenzen zu setzen.

08.12.08

Wir sammeln unsere Beobachtungen zum Logarithmus:

Satz 10.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:*

1. *Auf Ω existiert ein Zweig des Logarithmus,*
2. *$z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt eine Stammfunktion in Ω ;*
3. *Ω ist einfach zusammenhängend (also $n(\Gamma, 0) = 0$ für alle geschlossenen Ketten Γ in Ω).*

Beweis.

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$$

folgt sofort aus unseren Beobachtungen

□

10. Analytische Fortsetzung und komplexer Logarithmus

Interessant ist hier die Verbindung zwischen der Analysis (Existenz einer Stammfunktion) und der Topologie (einfacher Zusammenhang).

Als nächstes fragen wir nach der Existenz eines Logarithmus einer holomorphen Funktion:

Satz 10.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und **nullstellenfrei** in Ω . Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = \exp(g(z)) \quad \forall z \in \Omega. \quad (10.1)$$

Die Funktion g nennt man dann einen **holomorphen Logarithmus** von f (in Verallgemeinerung des Spezialfalls $f = \text{id}$).

Bemerkung. Die Forderung der **Nullstellenfreiheit** von f ist notwendig (klar).

Beweis. Wegen $f(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$ ist $\frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorph in Ω . Da Ω einfach zusammenhängend ist, besitzt $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion h (vgl. Kriterium in Kapitel 9), etwa erklärt durch das Kurvenintegral

$$h(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f'}{f}(\omega) d\omega$$

mit einem geeigneten Polygonzug (**VON WO?**) γ_z nach z in Ω (wie im Beweis von Satz 4.3). Wegen

$$(fe^{-h})' = e^{-h}(f' - fh') \equiv 0$$

da $h' = \frac{f'}{f}$ folgt:

$$f(z) = \exp(h(z) + c)$$

mit einer passenden Konstanten c . Damit ist

$$g(z) = h(z) + c$$

der gesuchte holomorphe Logarithmus von f . □

Bemerkung. Existiert auf $f(\Omega)$ ein Zweig des Logarithmus, so kann man einfach $g = \log \circ f$ setzen.

Definition. Der Quotient

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = (\log f(z))'.$$

heißt **logarithmische Ableitung** von f und spielt noch eine wichtige Rolle...

Bemerkung. Die Argumentfunktion, also der Imaginärteil des komplexen Logarithmus, erlaubt nun eine neue Interpretation der Umlaufszahl. Der Einfachheit halber untersuchen wir $n(\gamma, 0)$ für einen geschlossenen Integrationsweg

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Mit einer hinreichend feinen Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ gibt es Teilmengen $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$, die jeweils in einer offenen Kreisscheibe K_k verlaufen, in der ein Zweig des Logarithmus existiert.

$$f_k(z) = \log |z| + i\varphi_k(z),$$

so dass

$$\varphi : t \mapsto \varphi_k(\gamma(t))$$

(für $t \in [t_{k-1}, t_k]$) stetig auf $[0, 1]$ für $t \in [t_{k+1}, t_k]$ und jedem $t \in [0, 1]$ wird ein Argument von $\gamma(t)$ zugeordnet. Mit $z_k = \gamma(t_k)$ gilt dann

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-0} \stackrel{\text{nach Konstruktion}}{=} f_k \Big|_{z=z_{k-1}}^{z_k} = \underbrace{\log |z_k| + - \log |z_{k-1}|}_{\text{Teleskopsumme}} - i \underbrace{(\varphi_k(z_k) - \varphi_k(z_{k-1}))}_{= \alpha \text{ wie in Abb. 10.5}}$$

Hierin mißt der Imaginärteil die Änderung des Argumentes von $\gamma(t)$ für $t_{k-1} \leq t \leq t_k$. Bei Summation der Integrale über alle Teilwege γ_k heben sich die Realteile auf (wegen der Geschlossenheit unseres Weges $\gamma : \gamma(t_0) = z_0 = z_n = \gamma(t_n)$) und es verbleibt:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = i \left(\varphi_n(z_0) - \underbrace{\varphi_1(z_0)}_{=z_0} \right) = i \cdot (\varphi(1) - \varphi(0)).$$

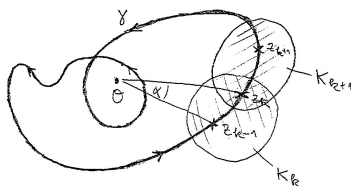


Abbildung 10.5.: Verbildlichung vom Öffnungswinkel α

also misst der Imaginärteil die **Gesamtänderung** des Argumentes φ längs des Weges γ und das Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ gibt in der Tat an, wie oft $\gamma(t)$ denn Nullpunkt umläuft (positiv oder negativ gezählt entsprechend der Orientierung).

Später werden wir verwandte Integrale mit der allgemeineren logarithmischen Ableitung $\frac{f'}{f}$ betrachten, um Nullstellen holomorpher Funktionen f zu zählen...

10. Analytische Fortsetzung und komplexer Logarithmus

Definition. Wie in der reellen Analysis definieren wir im Komplexen durch

$$a^b = \exp(b \log a) \quad \text{für } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

wobei $\log a$ irgendein Logarithmus von a einen Wert der **b -ten Potenz von a** . Man beachte, dass verschiedene Logarithmuswerte i.A. zu verschiedenen Werten von a^b führen. (obwohl die Abhängigkeit des Logarithmus in der Schreibweise a^b nicht zu sehen ist)! Je zwei Werte von a^b unterscheiden sich um einen Faktor $\exp(2\pi i k b)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, was bei irrationalen b auf abzählbar unendlich viele verschiedene Werte von a^b führt. Für $b \in \mathbb{Z}$ ist hingegen a^b eindeutig, nämlich die übliche Potenz von a .

Beispiel 10.2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nimmt $a^{\frac{1}{n}}$ genau die n Werte

$$\exp\left(\frac{1}{n} \log a\right) \exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right)$$

für $k = 1, 2, \dots, n$ an; diese sind genau die n -ten Wurzeln von a an.

Beispiel 10.3. $i^i = \exp(i \log i)$ unter anderem haben wir als einen Lösungsweig⁶ $= \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,207\dots \in \mathbb{R}$

Entsprechend ist die für $a \neq 0$ definierte Exponentialfunktion $z \mapsto a^z = \exp(z \log a)$ mehrdeutig, jedoch stets ganz (für positiv reelles a interessiert uns meist nur a^z mit dem Hauptzweig des Logarithmus). Die Diskussion der Potenzfunktion ist etwas schwieriger:

Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus erklärt ist, so heißt die Funktion

$$\Omega \ni z \mapsto z^b = (\exp(b \log z))$$

ein Zweig der **b -ten Potenz**. Jeder solche Zweig ist holomorph mit

$$(z^b)' = b z^{b-1},$$

wobei z^{b-1} mit dem selben Zweig des Logarithmus zu erklären ist wie z^b . Die Funktionalgleichung $(z \cdot \omega)^b = z^b \cdot \omega^b$ gilt nur dann, wenn für den zugehörigen Logarithmuszweig $\log(z \cdot \omega) = \log z + \log \omega$ gilt. Gibt es auf Ω überhaupt einen Zweig der b -ten Potenz, so existieren i.A. unendlich viele entsprechend den unendlich viele Zweige des Logarithmus, für ganze Exponenten b gibt es mit der uns vertrauten gewöhnlichen b -ten Potenz nur einen Zweig.

Satz 10.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus existiert. Ist f eine auf Ω stetige Funktion mit

$$(f(z))^n = z \quad \forall z \in \Omega, \quad (10.2)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, so stimmt f mit einem der Zweige $\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) \cdot \exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right)$ mit $k = 1, \dots, n$ von $z^{\frac{1}{n}}$ in Ω überein.

⁶Euler, 1746

Beweis. Sei \log ein Zweig des Logarithmus auf Ω und $\zeta = \exp\left(\frac{1}{n}2\pi\right)$. Mit $g(z) := \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)$ gilt:

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^n = \frac{z}{\exp\left(\frac{n}{n}\log z\right)} \equiv 1$$

für alle $z \in \Omega$, also ist $\frac{f(z)}{g(z)}$ für **jedes** $z \in \Omega$ eine n -te Einheitswurzel (vgl Kapitel 1), das heißt $\zeta_n^{k(z)}$ mit $k(z) \in \{1, 2, \dots, n\}$. Da f stetig ist, gilt selbiges für $z \mapsto \zeta_n^{k(z)}$. Da die n -ten Einheitswurzeln diskret sind und Ω zusammenhängend ist, muss $z \mapsto \zeta_n^{k(z)}$ konstant sein (Gebietstreue). Also:

$$f(z) = \zeta_n^k g(z).$$

für ein passendes k . □

12.12.08

Korollar 10.5. Sei Ω einfach zusammenhängend und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = (g(z))^n \tag{10.3}$$

für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

g heißt dann **holomorphe n -te Wurzel** von f in Ω .

Beweis. folgt aus Satz 10.3 mittels

$$f(z) = \exp(h(z)) = \left[\underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}h(z)\right)}_{=:g(z)} \right]^n$$

mit einem holomorphen Logarithmus $h(z)$ von $f(z)$ □

Bemerkung. Ist Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und lässt sich eine auf einer offenen Kreisscheibe $D \subset \Omega$ eine holomorphe Funktion f_0 längs **jeder** Kreiskette in Ω fortsetzen, dann ist f_0 die **Einschränkung** einer **eindeutigen** holomorphen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Dies ist eine Konsequenz aus dem sog. **Monodromiesatz**. Die Beweis-idee ist, dass benachbarte Kreisketten eine eindeutige analytische Fortsetzung haben, die schließlich ganz Ω ausschöpft und f definiert.

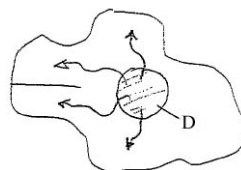


Abbildung 10.6.: Veranschaulichung der Einschränkung

10.1. Ergänzungen

Betrachten wir noch einmal unser „etwas zum Nachdenken“ (Kapitel 1 auf Seite 10)

Bemerkung. Was ist hier falsch?

$$e^{ix} = e^{2\pi i \cdot \frac{x}{2\pi}} \stackrel{(*)}{=} (e^{2\pi i})^{\frac{x}{2\pi}} \stackrel{?}{=} 1$$

Das mit dem (*) gekennzeichnete „=“ gilt **nicht allgemein**, da hier Umformungen vorgenommen werden, die **nicht mit dem komplexen Logarithmus vereinbar** sind! Damit ist diese wunderschöne Gleichungskette im allgemeinen **falsch!**

11. Laurent-Reihen

Bemerkung. Benannt sind diese Reihen nach dem Mathematiker PIERRE LAURENT, der von 1813 bis 1854 lebte.

Wir betrachten jetzt nicht mehr nur Abbildungen von einer Kreisscheibe mit einem Pol (Punkt) auf ganz \mathbb{C} , sondern wir erweitern Abbildungen von Kreisscheiben mit größeren Löchern.

Betrachten wir zur Veranschaulichung ein Beispiel:

Beispiel. Ist f meromorph mit einem Pol m -ter Ordnung in ζ , so gibt es eine holomorphe Funktion g in ζ mit

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \zeta)^m} \quad (g(\zeta) \neq 0, \infty)$$

und nach Satz 8.2 2. ist außerdem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \in \mathbb{C}.$$

Nach Satz 6.1 besitzt dieses g eine Potenzreihenentwicklung und damit gilt

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - \zeta)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - \zeta)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - \zeta)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \zeta)^k$$

Ein weiteres

Beispiel. Eine ähnliche, wenn auch unendliche Reihe erhält man bei der Entwicklung von $\exp \frac{1}{z}$:

$$\exp \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots$$

Dies sind erste Beispiele der sog. **Laurent-Entwicklung** und den **Laurent-Reihen**:

Definition. Ringgebiet:

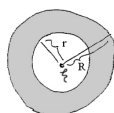


Abbildung 11.1.: Veranschaulichung des Ringgebietes

Im Folgenden sei $0 \leq r < R \leq \infty$ ($r = 0$ und $R = \infty$ sind zulässig!) Wir untersuchen holomorphe Funktionen auf dem Ringgebiet

$$A_r^R(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - \zeta| < R\}.$$

$A_r^R(\zeta)$ beschreibt ein **Ringgebiet** um ζ (siehe Abb11.1).

11. Laurent-Reihen

Satz 11.1. Laurent-Zerlegung:

Jede auf einem Ring-Gebiet $A_r^R(0)$ holomorphe Funktion f besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right), \quad (11.1)$$

wobei $g : D_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ und $h = D_{\frac{1}{r}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $h(0) = 0$ sind.

Beweis. Eindeutigkeit: Vorbemerkung: Zwei holomorphe Funktionen f_1, f_2 , definiert auf den Gebieten $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$, lassen sich zu einer auf $\Omega_1 \cup \Omega_2$ holomorphen Funktion f verschmelzen (siehe Abb 11.2)

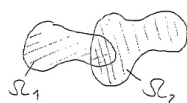


Abbildung 11.2.: Beweis zu Satz 11.1 (Bild der Mengen $\Omega_1 \cap \Omega_2$)

mit

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{auf } \Omega_1 \\ f_2(z) & \text{auf } \Omega_2 \end{cases}$$

falls $f_1(z) = f_2(z)$ auf $\Omega_1 \cap \Omega_2$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$). Da die Differenz zweier Laurent-Zerlegungen wieder eine Laurent-Zerlegung ist, reicht es aus, dem Fall $f(z) \equiv 0$ zu betrachten. Aus dieser Gleichung $g(z) + h(1/z) = 0$ folgt, dass man $g(z)$ und $-h(1/z)$ zu einer ganzen Funktion $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ verschmelzen kann, wobei gilt:

$$H(z) := \begin{cases} g(z) & \text{auf } D_R(0) \\ -h(1/z) & \text{auf } \mathbb{C} \setminus D_r(0) \end{cases}$$

(wie in Abb 11.3 dargestellt). Wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} -h(1/z) = h(0) = 0$ ist H beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Damit folgt:

$$H(z) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{C}$$

H ist also die Nullfunktion und damit gilt $g \equiv h \equiv 0$.



Abbildung 11.3.: Beweis zur **Eindeutigkeit** von Satz 11.1

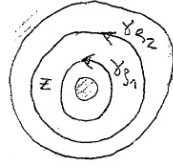


Abbildung 11.4.: Beweis zur **Existenz** von Satz 11.1

Existenz: Für festes $z \in A_r^R(0)$ definieren wir

$$G : A_r^R(0) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$G(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

Dann ist G stetig auf $A_r^R(0)$ und holomorph auf $A_r^R(0) \setminus \{0\}$. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz (Satz 8.1) ist dann G holomorph auf ganz $A_r^R(0)$. Für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ sei γ_{ϱ_j} die positiv orientierte Kreisslinie vom Radius ϱ_j . Dann ist $\Gamma := \gamma_{\varrho_1} - \gamma_{\varrho_2}$ nullhomolog in $A_r^R(0)$ und es gilt nach dem Cauchy'schen Integralsatz (Satz 9.2 bzw. 9.3)

$$\int_{\gamma_{\varrho_1}} G(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{\varrho_2}} G(\zeta) d\zeta$$

Sei nun z so gewählt, dass $\varrho_1 < |z| < \varrho_2$. Dann folgt

$$\int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Es gilt:

$$\int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

da z nicht in dem von γ_{ϱ_1} umschlossenen Gebiet liegt und

$$\int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

da z im Gebiet von γ_{ϱ_2} liegt. Damit ergibt die obige Gleichung:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= g(z) + h(1/z) \end{aligned}$$

Die gewünschte Zerlegung ist dann für $|z| < \varrho_2$

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

11. Laurent-Reihen

und für $|z| < \frac{1}{\varrho_1}$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{z \cdot f(\zeta)}{1 - \zeta \cdot z} d\zeta$$

Diese Funktionen sind holomorph mit $h(0) = 0$ und liefern die Laurent-Zerlegung für das Ring-Gebiet $A_r^R(0)$. Die Vereinigung aller solcher Ring-Gebiete mit $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ liefert die eindeutige Laurent-Zerlegung auf $A_r^R(0)$. □

Definition. Laurent-Reihe:

Entwickelt man die Funktionen g und h jeweils in Potenzreihen

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

und

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

und definiert man noch $a_{-k} = b_k$, so entsteht

$$f(z) = g(z) + h(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

Diese beidseitige unendliche Reihe nennt man **Laurent-Reihe** von f in $A_r^R(0)$. Natürlich kann man auch Ring-Gebiete mit vom Nullpunkt verschiedene Mittelpunkte betrachten – die Mathematik ändert sich dadurch nicht.

Korollar 11.2. Laurent-Entwicklung:

Die Funktion f sei in dem Ringgebiet $A_r^R(\omega)$ holomorph. Dann lässt sich f dort in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \omega)^n \tag{11.2}$$

welche in $A_r^R(\omega)$ normal konvergiert. Diese Laurententwicklung ist eindeutig bestimmt und es gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \omega| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \omega)^{n+1}} d\zeta \tag{11.3}$$

für $r < \varrho < R$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei die Integration über die positiv orientierte Kreisscheibe $|\zeta - \omega| = \varrho$ genommen wird. Es besteht die Abschätzung:

$$|a_n| = \frac{1}{\varrho^n} \cdot \max_{|\zeta - \omega| = \varrho} |f(\zeta)| \tag{11.4}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Satz 11.1. Die normale Konvergenz ergibt sich aus der Potenzreihendarstellung von g und h aus Satz 11.1. Die Abschätzungen beweist man analog zu Satz 6.1. \square

15.12.08

Beispiel 11.1. Für $0 < |z| < 1$ ist (mit Partialbruchzerlegung und geometrischer Reihe)

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Grenzwert der geom. Reihe}} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} \underbrace{-1 - z - z^2 - \dots}_{=\text{geometrische Reihe}};$$

hingegen gilt für $1 < |z|$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - 1 \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Mit Hilfe von Laurent-Reihen lässt sich recht einfach der Typ isolierter Singularitäten bestimmen (zum Beispiel der einfache Pol aus Beispiel 11.1):

Korollar 11.3. *Es sei f holomorph in der punktierten Umgebung $\dot{D}_R(\omega) = A_0^R(\omega)$ ($= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \omega| < R\}$) von ω mit Laurent-Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - \omega)^n. \quad (11.5)$$

Dann ist die Singularität in ω

- **hebbar**, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,
- ein **Pol** k -ter Ordnung ($k \in \mathbb{N}$), wenn $a_{-k} \neq 0$, $a_n = 0$ für alle $n < -k$ ist
- **wesentlich**, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$ ist.

Beweis. folgt sofort aus dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 8.1 und Satz 8.2. \square

Beispiel 11.2. ¹ Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z^2 - 1}\right)$$

- a) Von welchem Typ sind die Singularitäten in $z = \pm 1$?
- b) Es seien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z+1)^n$ Laurent-Entwicklungen von f . Zeigen sie $b_n = a_n(-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- c) Beweisen sie

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = 0.$$

Lösungsskizze:

¹Staatsexamen-Aufgabe Frühjahr 2008

11. Laurent-Reihen

- a) Die Singularitäten sind wesentlich, da sie nicht hebbar sind ($|f|$ ist **unbeschränkt** um $z = \pm 1$) und auch keine Pole (denn sie sind beschränkt auf $\mathbb{R}_{<-1}$ und $\mathbb{R}_{>1}$).²
- b) Mit der Koeffizientenformel (aus Korollar 11.2) gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=r} \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz \stackrel{z \mapsto -z}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|-z-1|=r} \frac{f(-z)}{(-z-1)^{n+1}} d(-z)$$

mit $f(z) = f(-z)$ (da f eine gerade Funktion ist), folgt:

$$= (-1)^n b_n.$$

- c) folgt ähnlich wie b) mit einem Symmetrie-Argument bzw mit dem Riemann'schen Residuenkalkül des kommenden Kapitels ganz einfach aus

$$a_{-1} + b_{-1} \stackrel{\text{b)}}{=} a_{-1}(1 + (-1)^1) = 0$$

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Anwendung auf periodische Funktionen: Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (wobei auch $a = -\infty$ und $b = +\infty$ zugelassen seien) und

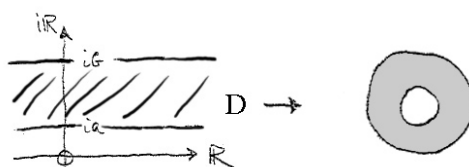


Abbildung 11.5.: Veranschaulichung der Menge D und die Abbildung auf den Kreisring

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \text{Im } z < b\} \quad \text{wie in Abb 11.5 links.}$$

Wir untersuchen holomorphe Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, die periodisch mit einer reellen Periode $\omega \neq 0$ sind, das heißt: $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in D$. Da die Funktion $g(z) = f(\omega z)$ dann periodisch mit Periode 1 ist, dürfen wir im Folgenden also $\omega = 1$ bzw. $f(z + 1) = f(z)$ annehmen. Die Abbildung $z \mapsto q := e^{2\pi iz}$ bildet den **Horizont-Streifen** D auf den Kreisring ab (wie in Abb 11.5 zu sehen)

$$A_r^R(0) = \{q \in \mathbb{C} \mid r < |q| < R\},$$

wobei $r = e^{2\pi b}$, $R = e^{-2\pi a}$ (bzw. $r = 0$ falls $b = \infty$ und $R = \infty$ für $a = -\infty$). Durch

$$q \mapsto g(q) = g(e^{2\pi iz}) := f(z)$$

wird nun eine Funktion $g : A_r^R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert; das ist tatsächlich definiert, denn mit der $2\pi i$ -Periodizität von \exp gilt

$$\begin{aligned} q &= e^{2\pi iz} = e^{2\pi iz'} = q' \\ \Leftrightarrow z - z' &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

²Im Staatsexamen selbst sollte die Antwort etwas ausführlicher sein!

Darüber hinaus ist g holomorph (als Verkettung holomorpher Funktionen) und also lässt sich g nach Korollar 11.2 in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$g(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varrho} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

wobei ($r < \varrho < R$). Mit $\varrho = e^{-2\pi y}$, $y \in (a, b)$ ergibt sich via $\zeta = \varrho e^{2\pi i x}$ ($d\zeta = \varrho \cdot 2\pi i e^{2\pi i x} dx = \zeta 2\pi i dx$)

$$a_n = \int_0^1 \frac{g(\varrho e^{2\pi i x})}{\varrho^n e^{2\pi i n x}} dx = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n(x+iy)} dx.$$

Bemerkung. Zusammenfassend haben wir bewiesen³:

Satz 11.4. *Fourier-Reihenentwicklung holomorpher Funktionen:*

Sei $f : D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid a < y < b\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit Periode 1, das heißt $f(z + 1) = f(z)$ für alle $z \in D$. Dann lässt sich f in eine in D normal konvergente **Fourier-Reihe** entwickeln

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \tag{11.6}$$

mit

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z} dx. \tag{11.7}$$

³vgl mit Sätzen aus Kapitel 10 der Ana IV

12. Residuensatz

Bemerkung. Nun verallgemeinern wir den Cauchy'schen Integralsatz von holomorphen Funktionen auf solche mit isolierten Singularitäten. Hierbei erweist sich die Laurent-Reihenentwicklung aus Kapitel 11 also äußerst hilfreich!

Definition. Residuum¹ und Hauptteil:

Es sei $f : A_0^R(\omega) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit Laurent-Reihenentwicklung (vgl Satz 11.1 bzw Korollar 11.2)

$$f(z) = \left\{ \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}}_{\text{unter Umständen Singular}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}}_{\text{holom. in } |z-\omega| < R} \right\} a_n(z - \omega)^n \quad (12.1)$$

für $0 < |z - \omega| < R$. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz 9.2 verschwindet das Integral über den holomorphen Anteil längs jeder nullhomologen Kette im Ringgebiet $A_0^R(\omega)$. Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - \omega)^n$ heißt der **Hauptteil** der Laurent-Entwicklung von f in ω ; der Koeffizient a_{-1} heißt das **Residuum** von f in ω , in Zeichen:

$$\text{Res}_\omega f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\omega|=\varrho} f(\zeta) d\zeta \quad (12.2)$$

für $\varrho \in (0, R)$. Die Integraldarstellung folgt aus der Koeffizientenformel aus Korollar 11.2 ($n = -1$) und ist nach Korollar 9.3 unabhängig von ϱ .

In hebbaren Singularitäten ist das Residuum Null (nach Korollar 11.3), allerdings kann es auch in nicht hebbaren Singularitäten verschwinden:

Beispiel 12.1. Für $f(z) = z^n$ ist $\text{Res}_0 f \begin{cases} 1, & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Beispiel 12.2. Besitzt f einen Pol k -ter Ordnung in ω , so gilt (siehe Übung)

$$\text{Res}_\omega f = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} (z - \omega)^k f(z). \quad (12.3)$$

Tatsächlich liefern die Residuen die wesentlichen Beiträge für die Integrale komplexer Funktionen:

¹lat. für „Rest“

Satz 12.1. Der **Residuensatz** von CAUCHY, entwickelt um 1826:

Es sei f eine bis auf isolierte Singularitäten in einem Gebiet Ω holomorphe Funktion. Dann gilt für jede nullhomologe geschlossene Kette Γ in Ω , auf deren Spur keine Singularität von f liegt,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\omega \in \Omega} n(\Gamma, \omega) \operatorname{Res}_{\omega} f. \quad (12.4)$$

Die Summe rechts enthält nur endlich viele von Null verschiedene Summanden, denn für die Umlaufzahl gilt $n(\Gamma, \omega) \neq 0$ nur auf einer kompakten Teilmenge von Ω , welche (weil sie dank HEINE-BOREL beschränkt und abgeschlossen ist) nur endlich viele Singularitäten von f enthält (da diese diskret liegen), während das Residuum in den regulären Punkten ω von f verschwindet (weshalb wir sogar über $\omega \in \Omega$ statt über $\omega \in \Omega \setminus \operatorname{Tr}(\Gamma)$ summieren).

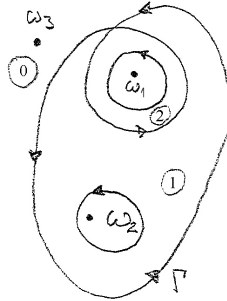


Abbildung 12.1.: Veranschaulichung der Umlaufzahl um Singularitäten

Beweis. Seien $\omega_1, \dots, \omega_m$ die Singularitäten von f mit $n(\Gamma, \omega_k) \neq 0$ und M die Menge der übrigen Singularitäten von f in Ω . Ferner sei $h_k(z)$ der Hauptteil der Laurent-Reihe von f um ω_k . Nun ist

$$h_k = \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - \omega_k} + \frac{a_{-2}^{(k)}}{(z - \omega_k)^2} + \dots$$

holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\omega_k\}$ (denn dies gilt zunächst lokal in einer punktierten Umgebung von ω_k , wegen der negativen Exponenten aber erst recht für z mit $|z - \omega_k| \rightarrow \infty$). Also ist $f(z) - \sum_{k=1}^m h_k(z)$ holomorph in $\Omega \setminus M$. Weil Γ in Ω und daher auch in $\Omega \setminus M$ nullhomolog ist, liefert der Cauchy'sche Integralsatz 9.2

$$\int_{\Gamma} \left(f(z) - \sum_{k=1}^m h_k(z) \right) dz = 0$$

mit der Linearität

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^m h_k(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma} h_k(z) dz \end{aligned}$$

12. Residuensatz

Mit der auf $\text{Tr}(\Gamma)$ gleichmäßig konvergenten Laurent-Reihe

$$h_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} (z - \omega)^n$$

folgt dann hierin

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} h_k(z) dz &\stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \underbrace{\int_{\Gamma} (z - \omega)^n dz}_{\neq 0 \text{ nur für } n=-1} \\ &= a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \, n(\Gamma, \omega_k) \end{aligned}$$

Summation über k liefert die Residuenformel des Satzes. □

19.12.08

Bemerkung. Ist Ω insbesondere einfach zusammenhängend, so ist jeder geschlossene Wege nullhomolog (nach Korollar 9.6) und ist ferner γ ohne „Überschneidungen“ (Jordankurve) so vereinfacht sich Satz 12.1 zu²

Korollar 12.2. Ist Ω einfach zusammenhängend und f in Ω mit Ausnahme isolierter Singularitäten $\omega_1, \dots, \omega_m$ holomorph, sowie γ ein geschlossener Weg in Ω mit $n(\gamma, \omega_k) = 1$ für $k = 1, \dots, m$, so gilt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Res}_{\omega_k} f.} \quad (12.5)$$

Zunächst einige reell-analytische Konsequenzen des Residuensatzes, nämlich die Berechnung uneigentlicher reeller Integrale³:

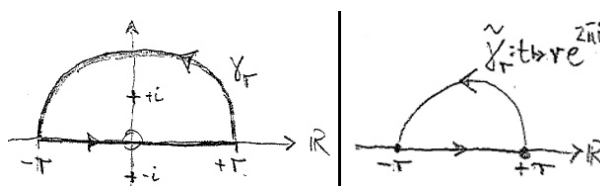


Abbildung 12.2.: Halbkreis mit Radius $r > 1$. Für die rechte Abbildung gilt: $\gamma_r = \tilde{\gamma}_r + [-r, +r]$ und $\tilde{\gamma}_r : t \mapsto re^{2\pi i t}$

Beispiel 12.3. Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi,$$

²dem meistens völlig ausreichendem Korollar

³Standardaufgabe in den Staatsexamensaufgaben

denn die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ besitzt einfache Polstellen in $z = \pm i$ und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Die Residuen in $z = \pm i$ berechnen wir über den Hauptteil von f in den Laurent-Entwicklungen von f um $z = \pm i$.

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res}_{\pm i} f}{z \mp i} + \text{„irgendwas holomorphes“}$$

denn $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ (Vgl mit Beispiel 12.2). Also gilt

$$\operatorname{Res}_{\pm i} f = \lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) f(z) = \lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) \frac{1}{(z-i) \cdot (z+i)}$$

einer der beiden Faktoren im Nenner kürzt sich heraus, allgemein ausgedrückt erhalten wir

$$= \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{z \pm i} = \pm \frac{1}{2i} = \operatorname{Res}_{\pm i} f$$

Sei γ_r der Rand eines Halbkreises vom Radius $r > 1$ um den Nullpunkt (siehe Abb 12.2 links). γ_r beschreibt also den Weg von $r \in \mathbb{R}$ nach $-r \in \mathbb{R}$ (mit Schnittpunkt $ir \in \mathbb{C}$) und wieder entlang der reellen Achse zurück zu $+r$. Es ist also:

$$\begin{aligned} \gamma_r : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, \\ t &\mapsto \begin{cases} re^{2\pi it} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ r(4t - 3) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist γ_r geschlossen und nullhomolog in \mathbb{C} ; außerdem liegt $+i$ im Inneren von γ_r und $-i$ im Äußeren von γ_r mit $n(\gamma, +i) = +1$ und $n(\gamma, -i) = 0$. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{+i} f \stackrel{\operatorname{Res}_i f = \frac{1}{2i}}{=} \pi.$$

Bezeichnet $\tilde{\gamma}_r$ den oberen Kreisbogen von γ_r , so gilt für das Integral über γ_r

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{dz}{z^2+1} + \underbrace{\int_{[-r, r]} \frac{dx}{x^2+1}}_{\text{ist reelles Integral!}}$$

Mit der trivialen Abschätzung gilt:

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \underbrace{l(\tilde{\gamma}_r)}_{\text{Bogenlänge}} \underbrace{\left\| \frac{1}{z^2+1} \right\|_{\tilde{\gamma}_r}}_{\text{Betragsmaximum des Integranden}}$$

und mit der Abschätzung $|z^2+1| \geq r^2-1$ folgt dann:

$$= \frac{\pi r}{r^2-1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

12. Residuensatz

Also folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\int_{\gamma_r}}_{=\pi} - \underbrace{\int_{\tilde{\gamma}_r}}_{\rightarrow 0} \right\} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi \end{aligned}$$

Aus der reellen Analysis (Ana I) ist uns bereits

$$\int_0^y \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan y$$

bekannt, was auf genau dieses Resultat führt.

Satz 12.3. Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf \mathbb{R} keine Pole⁴ hat und der Grad des Nennerpolynoms von R sei um mindestens zwei größer als der Grad des Zählers. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ im Lebesgueschen Sinne und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} \omega > 0} \operatorname{Res}_\omega R(z). \quad (12.6)$$

Hierbei läuft die Summation über alle (Pole) ω in der oberen Halbebene.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt:

$$|R(x)| \leq \frac{c}{x^2 + 1}$$

mit einer hinreichend großen Konstanten $c > 0$. Also existiert das uneigentliche Integral nach dem Satz von der Majorisierten Konvergenz (Ana III) mit der Majorante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi$$

aus Beispiel 12.3. Wir benutzen die Bezeichnung aus Beispiel 12.3. Für hinreichend großes r liegen alle Pole von $R(z)$ in der Kreisscheibe vom Radius r um den Nullpunkt (sicher möglich, da nur endlich viele Polstellen existieren). Also gilt mit dem Residuensatz (Korollar 12.2) wie im Beispiel 12.3:

$$\int_{-r}^{+r} R(x)dx + \int_{\tilde{\gamma}_r} R(x)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} \omega > 0} \operatorname{Res}_\omega R$$

Mit der trivialen Abschätzung ergibt sich wiederum

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_r} R(z)dz \right| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0;$$

damit folgt die Behauptung. □

⁴Pole sind die einzigen Singularitäten, die bei rationalen Funktionen auf Polynomen existieren können

Beispiel 12.4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Dies sollte man in der Vorbereitung der Klausur selbst nachrechnen (können)⁵.

Beispiel 12.5.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{n \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

für $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$

Ganz ähnlich zu Satz 12.3 gilt:

Satz 12.4. *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf \mathbb{R} keine Pole besitzt, und der Grad des Nennerpolynoms sei um mindestens zwei größer als der des Zählers. Dann existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix} dx := \lim_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \int_{-r_1}^{+r_2} R(x)e^{ix} dx, \quad (12.7)$$

und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } \omega > 0} \text{Res}_\omega(R(z)e^{iz}) \quad (12.8)$$

Beweis. ⁶

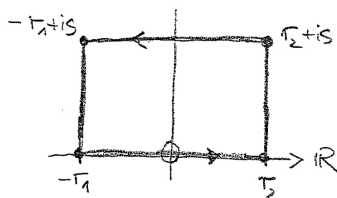


Abbildung 12.3.: Skizze zum Beweis von Satz 12.4

Wir wählen γ als den positiv orientierten Rand des Rechteckes mit den Ecken $r_2, r_2 + is, -r_1 + is, -r_1$ (siehe Bild 12.3), wobei r_1, r_2 und s so groß sind, dass **alle Pole** von $R(z)$ der **oberen Halbebene** im Inneren dieses Rechteckes liegen. Dann gilt mit dem Residuensatz:

$$\underbrace{\int_{-r_1}^{+r_2} R(x)e^{ix} dx}_{\text{Weg von } -r_1 \text{ bis } r_2 \text{ auf } \mathbb{R}\text{-Achse}} = 2\pi i \sum_{\text{Im } \omega > 0} \text{Res}_\omega(R(z)e^{iz}) + \underbrace{\int R(z)e^{iz} dz}_{\text{restlicher Weg von } \gamma}$$

wobei das rechts stehende Integral über die Liniensegmente $[-r_1, r_1 + is]$, $[-r_1 + is, r_2 + is]$ und $[r_2 + is, r_2]$ zu integrieren ist. Triviale Abschätzungen zeigen, dass es bei $r_1, r_2 \rightarrow \infty$ verschwindet, was die Existenz des reellen Integrals links und die Formel des Satzes beweist. \square

⁵will man möglichst schnell mit der Berechnung fertig werden, so könnte man auch nur Beispiel 12.5 zuerst rechnen und dann den Spezialfall Beispiel 12.4 ermitteln

⁶eher eine Beweisskizze

12. Residuensatz

Bemerkung. Analoge Formeln gelten auch für Integrale der Form $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{-ix} dx$ bzw. durch Kombination $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \frac{\sin}{\cos}(x) dx$.

Beispiel 12.6.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a} \quad \text{für } a > 0$$

09.01.2009

Nun zu einigen komplex-analytischen Konsequenzen des Residuensatzes:

Definition. Sei Ω ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph. Ist $\omega \in \Omega$ eine Pol- oder eine Nullstelle von f , so gilt nach Satz 8.2:

$$f(z) = (z - \omega)^\kappa g(z) \quad \text{für ein } \kappa \in \mathbb{Z}$$

mit einer in einer Umgebung U von ω holomorphen Funktion g mit $g(\omega) \neq 0$ (κ ist dabei **eindeutig bestimmt** – klar!) Wir berechnen das Residuum der logarithmischen Ableitung $\frac{f'}{f}$ von f in ω wie folgt: In U ist

$$f'(z) = \underbrace{\kappa(z - \omega)^{\kappa-1} g(z)}_{= \frac{\kappa}{z - \omega} \cdot f(z)} + \underbrace{(z - \omega)^\kappa g'(z)}_{= \frac{g'}{g}(z) \cdot f(z)}$$

bzw.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{\kappa}{z - \omega} + \frac{g'}{g}(z).$$

Da der Term $\frac{g'}{g}$ holomorph **in einer Umgebung von ω** ist (da ja $g(\omega) \neq 0$), folgt nun

$$\text{Res}_\omega \frac{f'}{f} = \kappa = \begin{cases} k, & \text{falls } \omega \text{ Nullstelle von } f \text{ der Ordnung } k, \\ -k, & \text{falls } \omega \text{ Polstelle von } f \text{ der Ordnung } k \end{cases}$$

Mit dem Residuensatz (etwa in der Form von Korollar 12.2) folgt sofort:

Satz 12.5. Argumentprinzip:

Es sei f meromorph in dem Gebiet Ω und Γ eine nullhomologe Kette in Ω , deren Träger weder eine Pol- noch eine Nullstelle von f enthält. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'}{f}(z) dz = \sum_{\omega \text{ Nullstelle von } f} n(\Gamma, \omega) \cdot \text{ord}_\omega f - \sum_{\omega \text{ Polstelle von } f} n(\Gamma, \omega) \cdot \text{ord}_\omega f. \quad (12.9)$$

wobei $\text{ord}_\omega f$ die **Ordnung der Null-bzw. Polstelle** ω von f bezeichnet.

Bemerkung. Mit dem Integral über die logarithmische Ableitung lassen sich also die Null- bzw. Polstellen zählen: Ist etwa f holomorph in der Kreisscheibe $\bar{D} \subset \Omega$, so gilt⁷:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f}(z) dz = \# \text{ der Nullstellen von } f \text{ in } D$$

(mit Vielfachheiten gezählt). Selbstverständlich spielen hier die Nullstellen **keine** besondere Rolle! Interessiert man sich allgemeiner für die **a -Stellen** von f , das heißt für die Lösungen z der Gleichung $f(z) = a$, so arbeitet man stattdessen mit der **logarithmischen Ableitung** $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ von $f(z) - a$.

Definition. Seinen Namen **Argumentprinzip** hat Satz 12.5 auf Grund der folgenden Interpretation:

Für einen geschlossenen Weg γ in Ω ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = n(f \circ \gamma, a),$$

die Umlaufszahl des Weges $t \mapsto f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$ um a , welches bis auf den Faktor 2π die **Gesamtänderung des Argumentes** von $f(\gamma(t)) - a$ beim Durchlauf von t durch das Definitionsintervall von γ angibt. (vgl. Kapitel 10 und Bild von $\Delta \arg = 2\pi \cdot n(f \circ \gamma, a)$).

Als nächste Anwendung zeigen wir, dass eine „kleine Störung“ die Nullstellenanzahl einer holomorphen Funktion **invariant** lässt:

Satz 12.6. Satz von Rouché^{8,9}:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei γ ein geschlossener nullhomologer Weg in Ω und es gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \forall z \in \text{Bild}(\gamma) \quad (12.10)$$

Dann besitzen f und g dieselbe Anzahl von Nullstellen im Inneren von γ (mit Vielfachheiten gezählt).

Beweis. Für $0 \leq \lambda \leq 1$ betrachten wir die holomorphen Funktionen $h_\lambda := f + \lambda(g - f)$ auf Ω . Wegen

$$|\lambda(g - f)| \leq |g - f|$$

und nach Voraussetzung

$$< |f|$$

auf $\text{Bild}(\gamma)$, besitzt h_λ **keine Nullstellen** auf $\text{Bild}(\gamma)$. Also ist die Anzahl der Nullstellen von h_λ nach Satz 12.5 gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'_\lambda}{h_\lambda}(z) dz =: N_\lambda$$

⁷vgl. alte Übungsaufgabe zu Polynomen – Satz von Gauß-Lucas

⁸Hierzu gibt es sehr viele beliebte Aufgaben im Staatsexamen

⁹EUGÈNE ROUCHÉ lebte von 1832 bis 1910, gefunden hat er diesen Satz 1862

12. Residuensatz

Der Integrand

$$\frac{h'_\lambda}{h_\lambda}(z) = \frac{f'(z) + \lambda(g'(z) - f'(z))}{f(z) + \lambda(g(z) - f(z))}$$

und damit auch N_λ hängt stetig von λ ab; wegen $N_\lambda \in \mathbb{Z}$ ist also N_λ **unabhängig** von λ (d.h. **konstant**). Damit ist aber $N_1 = N_0$. \square

Beispiel 12.7. ¹⁰(Staatsexamen 2008)

Betrachten Sie das Polynom

$$P(z) = z^4 + 6z + 3 \in \mathbb{C}[z].$$

Zeigen Sie:

1. Alle Nullstellen von $p(z)$ liegen in $B_2(2)$, wobei $B_r := \{z \mid |z| < r\}$ die offene Kugel um den Nullpunkt vom Radius $r > 0$ bezeichnet.
2. Genau eine Nullstelle liegt in $B_1(0)$.
3. Folgern Sie, dass $p(z)$ mindestens zwei reelle Nullstellen besitzt. Wie viele Nullstellen von $p(z)$ sind reell, wie viele liegen in der oberen und wie viele in der unteren Halbebene? Hat $p(z)$ doppelte Nullstellen?

Bemerkung. „Wann immer sie so eine Aufgabe sehen, denken Sie an ROUCHÉ!“ (Prof. J. Steuding)

Lösung. 1. Sei $q(z) = z^4$, so ist

$$|p(z) - q(z)| = |6z + 3| \leq 15 < 16 = |q(z)|,$$

für $|z| = 2$, dem Rand von $B_2(0)$. und also haben p und q nach dem Satz 12.6 von ROUCHÉ in $B_2(0)$ **gleich viele** Nullstellen, also genau vier.

2. Analog zeigt man mit $q(z) = 6z$ etwa, dass p in $B_1(0)$ genau eine Nullstelle besitzt, was 2. beantwortet.
3. Hierfür bemerken wir, dass wegen der **reellen** Koeffizienten von p die Nullstellen in komplex-konjugierten Paaren auftreten: Ist

$$0 = p(\omega) = \sum a_j \omega^j, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

so gilt ebenso

$$p(\bar{\omega}) = \sum a_j \bar{\omega}^j$$

da $a_j \in \mathbb{R}$

$$= \overline{\sum a_j \omega^j} = \overline{p(\omega)} = \bar{0} = 0$$

nach 2. hat p also mindestens 2 reelle Nullstellen (siehe Abbildung 12.4) und mit einer reellen Kurvendiskussion zeigt sich, dass p tatsächlich genau zwei reelle Nullstellen besitzt.

¹⁰„Dies ist eine Dankbare Aufgabe für Klausuren **jeder Art**“ Prof. J. Steuding

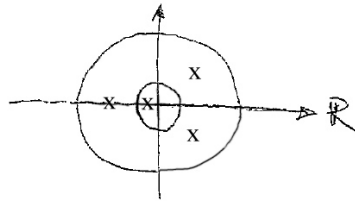


Abbildung 12.4.: Veranschaulichung der Lösungen

Beispiel 12.8. Der Satz von Rouché impliziert auch den Fundamentalsatz der Algebra! – Wie hat man hier vorzugehen? (Siehe Übungsaufgabe!)

Als vorerst letzte Anwendung des Residuenkalküls:

Satz 12.7. Satz von Hurwitz¹¹:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher, nullstellenfreier Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen die (holomorphe¹²) Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt entweder $f \equiv 0$ oder f besitzt ebenfalls keine Nullstellen in Ω .



Abbildung 12.5.: Beweis zu Satz 12.7

Beweis. Angenommen, f ist nicht identisch Null, besäße aber eine Nullstelle $\omega \in \Omega$. Sei dann $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$f(z) \neq 0 \quad \forall_{z \in \Omega} 0 < |z - \omega| < 2\varepsilon$$

gelte. Die Folge der logarithmischen Ableitungen $\frac{f'_n}{f_n}$ konvergiert in der punktierten Umgebung $\dot{D}_{2\varepsilon}(\omega)$ von ω ebenfalls lokal gleichmäßig, und zwar mit dem Grenzwert $\frac{f'}{f}$ (klar). Insbesondere gilt dann nach dem Argumentprinzip (Satz 12.5)

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\omega|=\varepsilon} \frac{f'_n}{f_n}(z) dz}_{\text{nach Vorr. =0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\omega|=\varepsilon} \frac{f'}{f}(z) dz}_{\neq 0},$$

im Widerspruch zur Annahme $f(\omega) = 0$. □

¹¹ADOLF HURWITZ, 1859 geboren, gestorben 1919

¹²Die Holomorphie der Grenzfunktion f ergibt sich mit Satz 6.3 von Weierstraß aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

13. Partialbruchzerlegungen

*Beweis.*¹

Die Funktion $z \mapsto \cot \pi z$ ist meromorph auf \mathbb{C} mit einfachen Polstellen in $z \in \mathbb{Z}$. Für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ betrachten wir

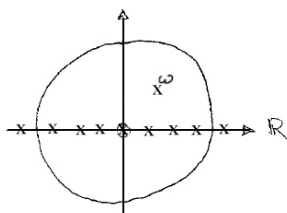


Abbildung 13.1.: Polstellen des Beweises 13.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} dz,$$

wobei \mathcal{C} die positiv orientierte Kreislinie sei, gegeben durch $|z| = r_n := n + \frac{1}{2} > |\omega|$ mit hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. In dem von \mathcal{C} berandeten Gebiet besitzt der Integrand Pole an den Stellen $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ (siehe Abb 13.1), sowie im Punkt $z = \omega$, falls $\omega \neq m + \frac{1}{2}$ für $m \in \mathbb{Z}$. In $z = \omega$ ist das Residuum (nach der Formel (12.3) aus Beispiel 12.2)

$$\lim_{z \rightarrow \omega} (z - \omega) \frac{\cot \pi z}{z - \omega} = \cot \pi \omega.$$

In der Umgebung eines Punktes $z = m \in \mathbb{Z}$ gilt (vgl. Beispiel 8.2)

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi(z - m)} + \text{Potenzreihe in } (z - m)$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} &= \frac{1}{\pi(z - m)} \cdot \frac{1}{(z - \omega)} + \text{Potenzreihe in } (z - m) \\ &= \frac{1}{\pi(m - \omega)} \cdot \frac{1}{(z - m)} + \text{Potenzreihe in } (z - m), \end{aligned}$$

denn $\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{m - \omega} = \frac{m - \omega - z + \omega}{(z - \omega) \cdot (m - \omega)}$. Also ist das Residuum in $z = m$ gleich $\frac{1}{\pi(m - \omega)}$. Mit dem Residuensatz (in der Form von Korollar 12.2) folgt daher

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} dz = \cot \pi \omega - \frac{1}{\pi} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{1}{\omega - m};$$

¹Wir nehmen an dieser Stelle den Beweis von Satz 13.1 bereits vorweg

diese Formel besteht auch für $\omega = m + \frac{1}{2}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$, da dann $\cot \pi\omega = 0$ und somit die Singularität hebbar ist.

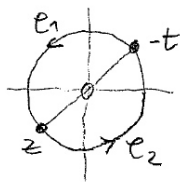


Abbildung 13.2.: Darstellung der oberen (\mathcal{C}_1) und unteren (\mathcal{C}_2) Halbebene

Bezeichnet \mathcal{C}_1 den zur oberen und \mathcal{C}_2 den zur unteren Halbebene gehörenden Halbkreis von \mathcal{C} (wie in Abb 13.2, so gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} dz = \left\{ \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} \right\} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} dz.$$

Substituieren wir im letzten Integral $z = -t$ und durchläuft z den Bogen \mathcal{C}_2 , so durchläuft t den Bogen \mathcal{C}_1 in **umgekehrter** Orientierung. Also

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} dz = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\cot \pi z}{z - \omega} dz - \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\cot \pi t}{z + \omega} \stackrel{(*)}{=} 2\omega \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\cot \pi z}{z^2 - \omega^2} dz.$$

(mit $(*)$ als $\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z+\omega} = \frac{2\omega}{z^2-\omega^2}$) Mit $n \rightarrow \infty$ strebt der Radius r_n von \mathcal{C} gegen unendlich. Wir zeigen nun, dass das Integral dann gegen Null konvergiert: Wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \cot \pi(x + iy) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} i \cdot \frac{e^{\pi(-y+ix)} + e^{\pi(y-ix)}}{e^{\pi(-y+ix)} - e^{\pi(y-ix)}} = \mp i,$$

ist $|\cot \pi z| \leq M$ mit einer positiven Konstanten M für alle z mit einem Abstand $\geq \frac{1}{4}$ von der Polstellen in $z = m \in \mathbb{Z}$. Damit folgt nun (mit der trivialen Abschätzung)

$$\left| \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\cot \pi z}{z^2 - \omega^2} dz \right| \leq \frac{\pi r_n M}{r_n^2 - |\omega|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Wir haben also bereits folgenden Satz bewiesen:

Satz 13.1.

$$\pi \cdot \cot \pi\omega = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{1}{\omega - m}}_{\text{Residuensumme}} = \frac{1}{\omega} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega^2 - z^2}. \quad (13.1)$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge, die keine der Polstellen $z = m \in \mathbb{Z}$ enthält (dh. **kompakt konvergent** auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ [wie in Kapitel 8])

13. Partialbruchzerlegungen

Geht das auch allgemeiner? Lässt sich etwa auch $\frac{1}{\sin \pi z}$ als unendliche Reihe über seine Polstellen ausdrücken?

Zunächst untersuchen wir die Fragestellung, ob der **Hauptteil** einer meromorphen Funktion f im Punkt $z = \omega$, die dort einen Pol der Ordnung $k \geq 1$ hat, eine rationale Funktion der Gestalt

$$h(z) = \frac{a_{-k}}{(z - \omega)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - \omega)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \omega} \quad \text{mit } a_m \in \mathbb{C}, a_{-k} \neq 0 \quad (13.2)$$

(also ein Polynom in $(z - \omega)^{-1}$ vom Grad k) ist. Dies ist gewissermaßen der **meromorphe Anteil der Laurent-Reihe** von f in ω .

Gibt es eine meromorphe Funktion f , die in abzählbar vielen Punkten $\omega_1, \omega_2, \dots$ ohne Häufungspunkt jeweils einen vorgeschriebenen Hauptteil besitzt? Sind endlich viele ω_m gegeben, so genügt es einfach die Hauptteile aufzusummieren:

$$f(z) = \sum_{m=1}^M h_m(z)$$

(denn für $k \neq m$ ist der Hauptteil $h_k(z)$ holomorph in $z = \omega_m$).

Definition. Methode der konvergenzerzeugenden Summanden:

Für unendlich viele Polstellen ω_m bzw. Hauptteile konvergiert die entsprechende Reihe im Allgemeinen nicht. Man rettet sich hier mit der so genannten **Methode der konvergenzerzeugenden Summanden**:

Addition holomorpher Terme verändert nicht die vorgeschriebenen Hauptteile, führt aber unter Umständen zu Konvergenz!

Satz 13.2. Satz von Mittag Leffler² (1877):

Sei $(\omega_m)_m$ eine Folge komplexer Zahlen, die sich in \mathbb{C} nirgends häuft. Für jeden Punkt ω_m sei ein Hauptteil $h_m(z)$ der Form (13.2) vorgeschrieben. Dann existiert eine meromorphe Funktion f , die genau in den Punkten ω_m Pole besitzt und dort jeweils den Hauptteil h_m aufweist.

Sind f_1 und f_2 beides Funktionen mit dieser Eigenschaft, so ist deren Differenz $f_1 - f_2$ eine ganze Funktion.

Beweis. ³ OBdA gelte $0 < |\omega_1| \leq |\omega_2| \leq \dots$. Ferner seien Zahlen $\varepsilon_m > 0$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \infty$ gewählt, dann eine Folge von Zahlen $r_m > 0$ mit $0 < r_1 < r_2 < \dots$ und $r_m < |\omega_m|$, sowie $r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$.

Für $|z| < |\omega_m|$ ist der **Hauptteil** $h_m(z)$ holomorph und besitzt nach Satz 6.1 eine auf einer ganzen Kreisscheibe konvergente Potenzreihenentwicklung:

$$h_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} z^n;$$

²MAGNUS GÖSTA MITTAG-LEFFLER lebte von 1846-1927, wegen Ihm gibt es, so die Gerüchte, keinen Nobelpreis (welche allerdings nicht stimmen)

³nach Weierstraß

auf der Kreisscheibe $\overline{D_{r_m}(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r_m\}$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Sei nun $n_m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\left| h_m(z) - \sum_{n=0}^{n_m} b_{mn} z^n \right| = \left| \sum_{n=n_m+1}^{\infty} g_{mn} z^n \right| < \varepsilon_m$$

für alle $z \in \overline{D_{r_m}(0)}$. Mit $g_m(z) := \sum_{n=0}^{n_m} b_{mn} z^n$ setzen wir

$$f(z) := \sum_{m=1}^{\infty} (h_m(z) - g_m(z))$$

(Die $g_m(z)$ sind die konvergenzerzeugenden Summanden)

Wir weisen nun für ein beliebiges $R > 0$ die gewünschten Eigenschaften für f in der Kreisscheibe $|z| < R$ nach; mit der Beliebigkeit von R folgt die **erste Aussage des Satzes**. Sei $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass $r_M > R$ gilt. Nach Wahl der ε_m (als eine Folge, deren Summe Konvergent ist) konvergiert die Reihe

$$\tilde{f}(z) := \sum_{m=M}^{\infty} (h_m(z) - g_m(z))$$

auf $|z| < R$ gleichmäßig und ist also nach Satz 6.3 von Weierstraß dort holomorph. Die Restsumme ($\hat{=}$ Differenz zu f)

$$\tilde{\tilde{f}}(z) := \sum_{m=1}^{M-1} (h_m(z) - g_m(z))$$

ist sowieso holomorph mit Ausnahme der $z = \omega_1, \dots, \omega_{M-1} \in D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Insbesondere ist $\tilde{\tilde{f}} - h_k$ für $k = 1, \dots, M-1$ holomorph nach $z = \omega_k$ fortsetzbar und also genügt

$$f(z) = \tilde{f}(z) + \tilde{\tilde{f}}(z)$$

für $|z| < R$ den geforderten Eigenschaften.

Zur zweiten Aussage des Satzes: Sind f_1 und f_2 beides meromorphe Funktionen mit jeweils identischen Hauptteilen, so ist deren Differenz holomorph in jeder Umgebung der ω_k , also holomorph in ganz \mathbb{C} . \square

Bemerkung. Zu jeder Vorgabe von Hauptteilen existiert eine entsprechende meromorphe Funktion (sogar unendlich viele solcher durch Addition ganzer Funktionen)!

Wir können diese also stets lösbare Interpolationsaufgabe auch zur **Auffindung von**

13. Partialbruchzerlegungen

Reihenentwicklung bekannter Funktionen nutzen: Für $m \in \mathbb{Z}$ schreiben wir den Hauptteil $h_m(z) = \frac{(-1)^m}{z-m}$ vor. Mit der Potenzreihenentwicklung (gemäß obigen Beweis)

$$\begin{aligned} h_m(z) &= \frac{(-1)^m}{z-m} = \frac{(-1)^{m+1}}{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{m}} \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left(1 + \frac{z}{m} + \frac{z^2}{m^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

ergibt sich für $|z| \leq r$ bei beliebigen $r > 0$

$$\begin{aligned} \left| h_m(z) - \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right| &\leq \frac{1}{|m|} \max_{|z|=r} \underbrace{\left| \frac{z}{m} + \frac{z^2}{m^2} + \dots \right|}_{= \frac{z}{m-z}} \\ &\leq \frac{1}{|m|} \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{\frac{z}{m}}{1 - \frac{z}{m}} \right| \leq \frac{1}{m^2} \cdot \max_{\underbrace{\leq \frac{1}{2}}_{|z| \leq r}} \left| \frac{z}{1 - z/m} \right| \\ &\leq \frac{2r}{\underbrace{m^2}_{\hat{=} \varepsilon_m}} \end{aligned}$$

für $|m| \geq 2r$. Für $\sum \varepsilon_m \ll \sum_1^\infty \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ergibt sich die kompakte Konvergenz der Reihe

16.01.09

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^m}{z-m} + \frac{(-1)^m}{m} \right)$$

(wobei der letzte Summand die Konvergenz erzeugt) für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Fassen wir die Terme zu $\pm m$ zusammen, so ergibt sich

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{z+m} \right)$$

als Lösung der Integrationsaufgabe, eine meromorphe Funktion zu diesen gegebenen Hauptteilen zu finden. Tatsächlich lässt sich diese Funktion f noch genauer identifizieren:

Korollar 13.3. ⁴ Es gelten:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{z+m} \right) = z \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{z^2 - m^2}, \quad (13.3)$$

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-m)^2}. \quad (13.4)$$

⁴Analogon für den cos als Übungsaufgabe

Beweis. Die meromorphe Funktion $f(z)$ besitzt dieselben Hauptteile wie $\frac{\pi}{\sin \pi z}$; sie unterscheiden sich also nur um eine ganze Funktion. Diese Differenz ist identisch Null, wie man leicht aus dem Additionstheorem

$$\frac{1}{\sin \zeta} = \cot \frac{\zeta}{2} - \cot \zeta \stackrel{\text{Satz 13.2}}{\stackrel{\pi \cot \pi z}{\equiv}} \frac{1}{z} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2}.$$

und der Partialbruchzerlegung des \cot aus Satz 13.1 entnimmt. Dies beweist die Formel (13.3); (13.4) folgt aus gliedweise Differentiation der kompakt konvergenten Reihe (13.3). \square

Bemerkung. Alternativ hätten wir auch die Partialbruchentwicklung des \cot aus Satz 13.1 über die Vorgabe der Hauptteile

$$h_m(z) = \frac{1}{z - m}$$

für $m \in \mathbb{Z}$ herleiten können. Der Beweis des Mittag-Leffler'schen Satzes 13.2 führt dann auf die kompakt konvergenten Reihe

$$(\pi \cot \pi z) \stackrel{+}{=} \frac{1}{z} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - m} + \frac{1}{m} \right),$$

was nach zusammenfassen der Terme zu $\pm m$ genau zu der Darstellung aus Satz 13.1 führt (die konvergenzerzeugenden Summanden $\frac{1}{m}$ addieren sich dabei zu Null auf – was aber die Konvergenz nicht beeinträchtigt!).

Ein weiteres Beispiel:

Beispiel 13.1. Für $z = -n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir nun die Hauptteile

$$h_n = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z + n}$$

vor. Die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z + n}$$

konvergiert für $z \neq -n$, $n \in \mathbb{N}_0$ (wegen des Faktors $n!$ im Nenner) lokal gleichmäßig, definiert also eine meromorphe Funktion in \mathbb{C} . Diese hat etwas mit der Gamma-Funktion zu tun! Für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt bekanntlich (vgl. Beispiel 6.5)

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma(z) - \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt;$$

(das Integral rechts existiert für alle $z \in \mathbb{C}$), definiert also eine ganze Funktion. Mit Hilfe der Exponentialreihe gilt (dank glm. Konvergenz):

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} dt$$

13. Partialbruchzerlegungen

vertauscht man nun „ Σ “ und „ f “, so erhält man

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{t^{z+n}}{z+n} \Big|_{t=0}^1 = f(z).$$

Auf diese Art und Weise haben wir folgenden Satz gewonnen:

Satz 13.4. *Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ besitzt eine analytische Fortsetzung als eine in \mathbb{C} meromorphe Funktion mit der Partialbruchzerlegung*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt; \quad (13.5)$$

sie besitzt Polstellen genau in den Punkten $z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$ (welche allesamt einfach sind), mit Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (13.6)$$

Bemerkung. Die meromorphe Fortsetzbarkeit war bereits Gauß bekannt⁵; die Partialbruchzerlegung wurde zuerst vom Würzburger Mathematiker PRYM⁶ 1876 bewiesen.

In einem späteren Kapitel werden wir uns mit dem verwandten Problem der Konstruktion holomorpher Funktionen zu vorgegebene Nullstellen widmen.

⁵vgl. Ana III, Korollar zu Satz 6.4

⁶PRYM, FRIEDRICH, 1841-1915

14. Ganze Funktionen endlicher Ordnung

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Korollar 5.5) besitzen nicht konstante Polynome in \mathbb{C} genau so viele Nullstellen wie ihr Grad angibt, Holomorphe bzw. meromorphe Funktionen können hingegen unendlich viele Nullstellen haben (z.B.: $\sin z$ bzw. $\cot z$), aber auch keine ($\exp z$). Tatsächlich „kann“ eine Funktion umso mehr Nullstellen besitzen, je schneller sie gegen unendlich wächst!

Eine quantitative Version dieses Prinzips liefert der folgende:

Satz 14.1. Jensen'sche Formel¹ 1898:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und enthalte den Abschluss der Kreisscheibe $D_R(0) = \{z \mid |z| < R\}$. Ferner sei f holomorph in Ω , $f(0) \neq 0$, und f verschwinde nicht auf dem Kreisrand $C_R = \partial D_R(0)$. Bezeichne ζ_1, \dots, ζ_N die Nullstellen von f in $D_R(0)$ (mit Vielfachheiten), so gilt

$$\underbrace{\log |f(0)| - \overbrace{\sum_{n=1}^N \log \frac{|\zeta_n|}{R}}^{\text{Länge ist Anz. d. Nst.}}}_{=\log\left(|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{R}{|\zeta_n|}\right)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\log |f(Re^{i\varphi})|}_{=\in\mathbb{R}} d\varphi. \quad (14.1)$$

Beweis. Zunächst stellt man fest:

1. Erfüllen f_1 und f_2 die Voraussetzungen von Satz 14.1, so erfüllt $f_1 f_2$ die Voraussetzungen von Satz 14.1
2. Erfüllen f_1 und f_2 jeweils die Gleichung (14.1), so erfüllt $f_1 f_2$ die Gleichung (14.1) wegen

$$\log |f_1(0)f_2(0)| = \log |f_1(0)| + \log |f_2(0)|$$

Es gilt:

$$f(z) = \frac{f(z)}{\underbrace{(z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n)}_{=:g(z)}} \cdot (z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n)$$

wobei $g(z)$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen ist, da ζ_j für $j = 1, \dots, n$ die Nullstelle der Funktion $f(z)$ beschreibt. **Idee:** Zeige, dass für g und für $z \mapsto z - \zeta_j$ die Gleichung (14.1) gilt. Wegen 1. und 2. gilt (14.1) dann auch für f .

¹JENSEN, JOHAN L.W.V. 1859-1935

14. Ganze Funktionen endlicher Ordnung

(i) g (ohne Nullstellen in $\overline{D_R(0)}$) erfüllt (14.1)

Nach Satz 10.3 gibt es eine holomorphe Funktion h , so dass $g(z) = \exp(h(z))$, also $|g(0)| = |\exp(h(z))| = \exp|\operatorname{Re} h(z)|$. Zu zeigen ist:

$$\operatorname{Re}(h(z)) = \log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \log |g(Re^{i\varrho})| d\varrho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(Re^{i\varrho}) d\varrho \quad (14.2)$$

was der Cauchy'schen Integralformel in Kapitel 5 entspricht. Es gilt sogar

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(Re^{i\varrho}) d\varrho \quad (14.3)$$

Damit folgt, dass g (ohne Nullstellen) der Gleichung (14.1) genügt.

(ii) Betrachte nun $z \mapsto z - \zeta$. Zu zeigen ist

$$\log |\zeta| = \underbrace{\log \frac{|\zeta|}{R}}_{=\log|\zeta| - \log R} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\log |Re^{i\varphi} - \zeta|}_{\substack{=\log R |e^{i\varphi} - \frac{\zeta}{R}| \\ =\log R + \log |e^{i\varphi} - \omega| \\ \text{mit } \omega = \frac{\zeta}{R}}} d\varphi \quad (14.4)$$

Es ist also nur zu zeigen,

$$0 = \int_0^{2\pi} \log |e^{i\varphi} - \omega| d\varphi = \int_0^{2\pi} \log |1 - \omega e^{-i\varphi}| d\varphi \quad (14.5)$$

für $\omega = \frac{\zeta}{R}$ mit $|\omega| < 1$. Betrachte

$$F(z) = 1 - \omega z,$$

$F(z) \neq 0$ in $\overline{D_1(0)}$. Nach Satz 10.3 ist

$$F(z) = \exp(G(z))$$

mit einer holomorphen Funktion G . Damit erhalten wir

$$\log |F(z)| = \operatorname{Re} G(z).$$

Wegen $F(0) = 1$, also $\log |F(0)| = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = \log |F(0)| &\stackrel{(14.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(e^{i\varrho})| d\varrho \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - \omega e^{-i\varrho}| d\varrho \end{aligned}$$

und damit folgt die Formel (14.5). □

Bemerkung. Aus der Jensen'schen Formel gewinnt man Informationen über die Nullstellenanzahl in Abhängigkeit von der Größe der zu Grunde liegenden holomorphen Funktion.

Korollar 14.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 14.1 bezeichne $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen von f (mit Vielfachheiten gezählt) in der Kreisscheibe $D_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, wobei $0 < r < R$ ist. Dann gilt*

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \log |f(0)| \quad (14.6)$$

Beweis. Bezeichne ζ_1, \dots, ζ_N wie gehabt die Nullstellen von f in $D_R(0)$, so genügt es wegen der Jensen'schen Formel (14.1) zu zeigen, dass

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \sum_{n=1}^N \log \left| \frac{R}{\zeta_n} \right| \quad (14.7)$$

gilt.

Es gilt

$$\sum_{n=1}^N \log \left| \frac{R}{\zeta_n} \right| = \sum_{n=1}^N \int_{|\zeta_n|}^R \frac{dr}{r}.$$

Wir definieren uns

$$\eta_n(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r > |\zeta_n|, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann gilt

$$\sum_{n=1}^N \eta_n(r) = n(r).$$

Nun folgt (14.7) sofort aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_{|\zeta_n|}^R \frac{dr}{r} &= \sum_{n=1}^N \int_0^R \eta_n(r) \frac{dr}{r} = \int_0^R \underbrace{\sum_{n=1}^N \eta_n(r)}_{=n(r)} \frac{dr}{r} \\ &= \int_0^R n(r) \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

□

Definition. endliche Ordnung und Ordnung von f

Eine ganze Funktion f ist von **endlicher Ordnung** $\leq \varrho$, wobei ϱ eine positive reelle Zahl sei, wenn es Konstanten $A, B > 0$ gibt mit

$$|f(z)| \leq A \cdot \exp(B \cdot |z|^\varrho) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

gilt Die **Ordnung von f** ist das Infimum $\varrho_f := \inf \varrho$ aller $\varrho > 0$, so dass f von einer Ordnung $\leq \varrho$ ist.

Beispiel 14.1. $z \rightarrow \exp(z^2)$ hat die Ordnung 2.

14. Ganze Funktionen endlicher Ordnung

Satz 14.3. *Ist f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung $\leq \varrho$, so gelten*

1. *Die Anzahl der Nullstellen von f in $|z| \leq r$ genügt der Ungleichung².*

$$n(r) \leq c \cdot r^\varrho \quad (14.8)$$

für eine Konstante $c > 0$ und alle hinreichend großen r

2. *Bezeichne $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ die Nullstellen von f , so gilt für alle $r > \varrho$ die Ungleichung*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \zeta_n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|} r < \infty \quad (14.9)$$

Beweis. OBdA sei $f(0) \neq 0$ (ansonsten betrachte $z \mapsto \frac{f(z)}{z^h}$, wobei h die Ordnung der Nullstelle in $z = 0$ sei). Nach Korollar 14.2 gilt

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varrho})| d\varrho - \log |f(0)|$$

bzw. für $R = 2r$

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varrho})| - \log |f(0)|$$

Die Funktion $x \mapsto n(x)$ ist **monoton wachsend**, also ist

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{2\pi} n(r) \int_r^{2r} \frac{dx}{x} = n(r) \log \frac{2r}{r}$$

Andererseits liefert die Wachstumsbedingung für f , dass

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varrho})| d\varrho &\leq \int_0^{2\pi} \log |A \cdot \exp(B \cdot R^\varrho)| d\varrho \\ &\leq R^\varrho \tilde{c} \end{aligned}$$

mit einer absoluten Konstanten \tilde{c} für hinreichend große R , insgesamt liefert das 1. Darüber hinaus impliziert 1. Behauptung 2.:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ \zeta_n \neq 0 \\ |\zeta_n| \geq 1}} |\zeta_n|^{-r} &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{\substack{2^j \leq |\zeta_n| < 2^{j+1} \\ |\zeta_n|^{-r} \leq 2^{-jr}}} |\zeta_n|^{-r}}_{|\zeta_n|^{-r} \leq 2^{-jr}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jr} \underbrace{n(2^{j+1})}_{(**)} \\ &\stackrel{1.}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jr} \cdot 2^{(j+1)\varrho} \cdot \text{const} = \text{const}' \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\varrho-r)} < \infty \end{aligned}$$

genau für $r > \varrho$. In (*) wird ein Trick angewandt, bei dem Nullstellen vom Betrag < 1 verschenkt werden. Außerdem ist (**):

$$\sum_{2^j \leq |\zeta_n| < 2^{j+1}} 1 \leq n(2^{j+1})$$

□

²Das Wachstum gibt an, wie viele Nullstellen es gibt

Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Bedingung $r > \varrho$ in Behauptung 2. nicht verbessert werden kann:

Beispiel 14.2.

$$f(z) = \sin \pi z = \frac{1}{2\pi} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}).$$

Es gilt $|f(z)| \leq e^{\pi|z|}$ und speziell für $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass f von Ordnung $\varrho = 1$ ist. Demgegenüber verschwindet $f(z)$ genau für $z = n \in \mathbb{Z}$ und es gilt $\sum_{n \neq 0} |n|^{-r} < \infty \Leftrightarrow r > 1$ (dies ist alt, man löst dies etwa mit dem Riemann-Integral-Vergleichs-Kriterium).

Beispiel 14.3.

$$f(z) := \cos(z^{\frac{1}{2}}) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

Hier ist f von der Ordnung $\frac{1}{2}$ und besitzt Nullstellen in $z_n = ((n + \frac{1}{2})\pi)^2$; ferner gilt $\sum |z_n|^{-r} < \infty \Leftrightarrow r > \frac{1}{2}$ (siehe Tutorium).

Wir setzen nun unsere Untersuchungen zur Gamma-Funktion fort:

Satz 14.4. Euler'scher Ergänzungssatz:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (14.10)$$

Beweis. Nach Satz 13.4 (Pryms Partialbruchzerlegung von Γ) sind sowohl $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ als auch $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ meromorphe Funktionen mit einfachen Polstellen in \mathbb{Z} . Mit dem Identitätssatz 7.1 genügt es daher die Identität für $z \in (0,1)$ zu zeigen. Wir benutzen die Integraldarstellung mit $u = vt$ ($t > 0$).

$$\underbrace{\Gamma(1-z)}_{\in(0,1)} = \int_0^\infty e^{-u} u^{-z} du = t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-z} dv.$$

Damit folgt

$$\Gamma(1-z) \cdot \underbrace{\Gamma(z)}_{\in(0,1)} = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-z} dv dt,$$

mit FUBINI folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-z} dt dv \\ &= \int_0^\infty \frac{v^{-z}}{1+v} dv \end{aligned}$$

der folgende Teil ist nicht im Handgeschriebenen Skript zu finden

(denn

$$\int_0^\infty e^{-t(1+v)} dt = -\frac{e^{-t(1+v)}}{1+v} \Big|_{t=\infty}^0 = -\frac{1}{1+v}.$$

14. Ganze Funktionen endlicher Ordnung

???? Ist nicht eigentlich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-t(1+v)}}{1+v} \right) = e^{-t(1+v)} \cdot \frac{-(1+v)}{1+v} = -e^{-t(1+v)}$$

?????

Mittels $v = e^{-x}$ ergibt sich das letzte Integral als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x(1-z)}}{1+e^x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{zx}}{1+e^x} dx$$

???? Angenommen $v(x) = e^x$. Ist nicht eigentlich dann

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{v^{-z}}{1+v} dv &= \int_{v^{-1}(0)}^{v^{-1}(\infty)} \frac{v(x)^{-z}}{1+v(x)} \cdot v'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xz}}{1+e^x} \cdot e^x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x(1-z)}}{1+e^x} dx, \end{aligned}$$

oder ???

Integrieren wir die Funktion $f(\omega) = \frac{e^{z\omega}}{1+e^\omega}$ über das Rechteck γ_R mit den Ecken $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$, so liefert der Residuensatz (Korollar 12.2 und siehe auch Abb. 14.1)

$$\int_{\gamma_R} f(\omega) d\omega = 2\pi \operatorname{Res}_{+\pi i} f$$

wobei sich das einzige Residuum wie folgt berechnet:

$$\operatorname{Res}_{\pi i} f = \underbrace{\lim_{\omega \rightarrow \pi i} (\omega - \pi i) \cdot \frac{1}{1+e^\omega}}_{=-1} \cdot e^{z\omega} \stackrel{(**)}{=} -e^{z\pi i}$$

da $\frac{e^\omega + 1}{\omega - \pi i} = \frac{e^\omega - e^{\pi i}}{\omega - \pi i}$ und mit L'HOSPITAL $\lim_{\omega \rightarrow \pi i} \frac{e^\omega}{1} = -1$ ist (in (**)) eingesetzt). Nun gilt

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\pm R + iu) du \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{z(\pm R + iu)}}{1 + e^{\pm R + iu}} \right| du,$$

welches beschränkt ist gegen $\exp(z-1)R$ bzw. $\exp(-zR)$ je nachdem, ob wir über die rechte bzw. die linke vertikale Seite von γ_R integrieren. Ferner ist

$$\int_{-R}^{+R} f(x + 2\pi i) dx = e^{2\pi iz} \cdot \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

mit der Funktionalgleichung und der $2\pi i$ -Periodizität von \exp . Außerdem gilt für

$$f(x + 2\pi i) = \frac{e^{z(x+2\pi i)}}{1 + e^{x+2\pi i}} = e^{2\pi iz} \cdot f(x)$$

Insgesamt folgt damit nach dem Grenzübergang $R \rightarrow \infty$

$$(1 - e^{2\pi iz}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi i e^{2\pi iz}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{zx}}{1+e^x} dx &= \frac{2\pi i e^{\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

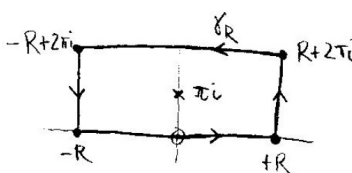


Abbildung 14.1.: Skizze zu Beweis von Satz 14.4

□

23.01.09

Korollar 14.5. 1.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \quad \Gamma(z) \cdot \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z}$$

3. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in $z = 0, -1, -2, \dots$ und keinen weiteren Nullstellen.

4. Es gilt

$$\frac{1}{|\Gamma(z)|} \leq c_1 \exp(c_2 |z| \log |z|) \quad \forall z \neq 0$$

mit positiven absoluten Konstanten c_1 und c_2 .

5. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist von der Ordnung $\rho_\Gamma = 1$.

Beweis. 1. und 2. folgen sofort aus Satz 14.4,

3. ergibt sich aus Satz 13.4 (oder alternativ aus Satz 14.4).

4.: Zu $x > 0$ sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x \leq n < x + 1$. Dann

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-tx} dt &\leq \int_1^\infty e^{-tn} dt = \Gamma(n+1) = n! && \leq n^n \\ &= e^{n - \log n} < e^{(x+1) \log(x+1)}. && (*) \end{aligned}$$

14. Ganze Funktionen endlicher Ordnung

Mit der Partialbruchzerlegung aus Satz 13.4 in Kombination mit Eulers Ergänzungssatz 14.4 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &\stackrel{\text{Satz 14.4}}{=} \underbrace{\Gamma(1-z)}_{\text{Satz 13.4}} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-z} dt \right)}_{\text{Satz 13.4}} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi} \end{aligned}$$

Mit $|\sin \pi z| \leq e^{\pi|z|}$ und (*) entsprechend

$$\left| \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-z} dt \right| \leq \int_1^{\infty} e^{-1} t^{|x|} dt \stackrel{(*)}{\leq} e^{(|x|+1) \cdot \log(|x|+1)}$$

für $z = x + iy$. Außerdem erklärt sich die erste Abschätzung der obigen Zeile mit

$$\left| t^{-x-iy} \right| = \left| e^{(-x-iy) \log t} \right| = e^{-x \log t}$$

Diese Abschätzung beachtend ergibt sich also eine Abschätzung der **angestrebten Form** für den zweiten Term. Für den ersten Term unterscheiden wir zwei Fälle; $|y| > 1$ und $|y| \leq 1$ (wobei nach wie vor $z = x + iy$). Im ersten Fall erhalten wir:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi} \right| \leq e^{\pi|z|} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

wobei $|n+1-(x-iy)| \geq |iy| \geq 1$ ist. Im zweiten Fall wählen wir $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $k - \frac{1}{2} \leq x < k + \frac{1}{2}$. Wenn $k \geq 1$, dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi} = \underbrace{(-1)^{k-1}}_{n+1=k} \frac{\sin \pi z}{\pi(k-1)!(k-z)} + \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n \sin \pi z}{n!(n+1-z)\pi}.$$

Rechts sind beide Terme beschränkt; der erste, da $\sin \pi k = 0$, der zweite lässt sich wiederum gegen $\sum \frac{1}{n!}$ abschätzen. Für $k \leq 0$ ist $x < \frac{1}{2}$ und die Reihe wird analog wieder durch $\sum \frac{1}{n!}$ majorisiert.

5.: Nach 4. ist $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ganz von einer Ordnung ≤ 1 . Mit der **Stirling'schen Formel** (Buß- und Bet-Tag-Vorlesung Ana III)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{14.11}$$

für $\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$ (hierbei ist $f(n) \sim g(n) :\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$) folgt, dass die Ordnung = 1 ist. \square

Bemerkung. Alternativ genügt für 5. auch die „schwache Stirling'sche Formel“

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) = n! &= \prod_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\log k) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \log k\right) \\ &= \exp\left(\int_1^n \log x dx + \mathcal{O}(n)\right) = \exp\left(x \log \frac{x}{e} \Big|_{x=1}^n + \mathcal{O}(n)\right) \\ &= \mathcal{O}(\exp(n \log n)). \end{aligned}$$

Genauer als 4. bzw Formel (14.11) ist die **Stirling'schen Formel**

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)} \quad \text{mit } |\mu(z)| \leq \frac{1}{12|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; es gibt auch Reihenentwicklungen für den **Fehlerterm** $\mu(z)$ (etwa von GUDERMANN), die noch präziser Asymptotik erlauben.

15. Unendliche Produkte

Definition. Konvergenz des unendlichen Produktes:

Gegeben sei eine Folge komplexer Zahlen a_n . Das **unendliche Produkt** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent**, falls

- entweder alle $a_n \neq 0$ sind, der Grenzwert

$$A := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

existiert und $A \neq 0$,

- oder es ein M gibt, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq M$ und

$$A^* := \prod_{n=M}^{\infty} a_n$$

im obigen Sinne existiert; in diesem Fall setzen wir

$$A := A^* \prod_{n < M} a_n.$$

In beiden Fällen setzen wir

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := A;$$

andernfalls heißt das unendliche Produkt **nicht existent**.

Bemerkung. Ein unendliches Produkt verschwindet also genau dann, wenn mindestens ein Faktor $a_k = 0$ ist. Die Folge der Faktoren eines konvergenten unendlichen Produktes konvergiert notwendig gegen Eins.

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ existiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Insofern schreiben wir unendliche Produkte auch gerne in der Form $\prod(1 + \alpha_n)$ mit einer Nullfolge komplexer Zahlen $\alpha_n \in \mathbb{C}$

Unsere erste nicht triviale Beobachtung vergleicht unendliche Produkte und Reihen:

Satz 15.1. *Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ konvergiert genau dann, wenn es ein M gibt, so dass*

1. $\alpha_n \notin (-\infty, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ für alle $n \geq M$,
2. $\sum_{n=M}^{\infty} \log(1 + \alpha_n)$ konvergiert, wobei der Logarithmus der Hauptzweig des komplexen Logarithmus sei.

Beweis. Falls 1. und 2. gültig sind, so folgt, dass

$$\prod_{n=M}^N (1 + \alpha_n) = \prod \exp(\log(1 + \alpha_n)) = \exp\left(\sum_{n=M}^N \log(1 + \alpha_n)\right),$$

und mit der Existenz der Reihe bei $N \rightarrow \infty$ (und der Stetigkeit von \exp) folgt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) = \prod \exp(\log(1 + \alpha_n)) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \alpha_n)\right).$$

Existiert Umgekehrt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n),$$

so gibt es ein M mit $1 + \alpha_n \neq 0$ für $n \geq M$. Dann existiert der Grenzwert P der Produkte

$$P_N := \prod_{n=M}^N (1 + \alpha_n) \quad \text{und} \quad P = 0.$$

Insbesondere existiert ein $\tilde{M} \geq M$, so dass für alle $m, n \geq \tilde{M}$

- $|P_m - P_n| < \frac{1}{4}|P|$, da $(P_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.
- $\frac{1}{2}|P| < |P_n|$, weil $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq 0$ ist.

Also ist $|P_m - P_n| < \frac{1}{2}|P_n|$ bzw. $\left|\frac{P_m}{P_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$ und somit ist

$$\underbrace{\prod_{k=n+1}^m (1 + \alpha_k)}_{\doteq \frac{P_m}{P_n}} \in \underbrace{D_{\frac{1}{2}}(1)}_{|z-1| < \frac{1}{2}} = \left\{z \mid |z-1| < \frac{1}{2}\right\}$$

für $m > n \geq \tilde{M}$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ liegt der Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=\tilde{M}+1}^N (1 + \alpha_k)$$

in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_{\frac{1}{2}}(1)}$. Mit der Anwendbarkeit des Logarithmus auf **jeden** Faktor (und dessen Stetigkeit) folgt

$$\log \prod_{k=\tilde{M}+1}^{\infty} (1 + \alpha_k) = \sum_{k=\tilde{M}+1}^{\infty} \log(1 + \alpha_k),$$

was den Beweis der Umkehrung abschließt. □

Bemerkung. Jetzt werden wir uns von dem Logarithmus lösen: Konvergiert die Reihe $\sum \log(1 + \alpha_n)$ in Satz 15.1 2. **absolut**, so heißt auch das zugehörige Produkt $\prod(1 + \alpha_n)$ **absolut konvergent**.

15. Unendliche Produkte

Wir notieren:

Korollar 15.2. *Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ absolut konvergiert.*

Beweis. Mittels

$$\log(1 + \alpha) = \int_{[1, 1+\alpha]} \frac{dz}{z}$$

(hier ist $[1, \alpha]$ das gerade Liniensegment in der rechten Halbebene) ergibt sich für $|\alpha| \leq \frac{1}{4}$ gültige Ungleichung

$$\frac{2}{3} |\alpha| \leq |\log(1 + \alpha)| \leq \frac{4}{3} |\alpha|$$

woraus die Behauptung nach Satz 15.1 folgt. \square

Bemerkung. Die wesentliche Idee ist die Taylorentwicklung des Logarithmus mit

$$\log(1 + \alpha) = \alpha + \text{höhere Terme (nach Taylor)}$$

Definition. unendliche Produkte von Funktionen:

Jetzt gehen wir zu Produkten von **Funktionen** über: Gegeben ist eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, definiert auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$, so heißt das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n)$ (**punktweise**) **konvergiert** gegen die Grenzfunktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, wenn für **jedes** $z \in \Omega$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) = f(z)$$

falls $\sum f_n$ absolut (lokal) gleichmäßig auf Ω konvergiert, so heißt $\prod(1 + f_n)$ **absolut (lokal) gleichmäßig konvergent**.

26.01.09

Mit dieser Begriffsbildung ergibt sich aus unseren bisherigen Untersuchungen nun

Satz 15.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n)$ absolut lokal gleichmäßig auf Ω , wenn und **nur wenn** es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ ein N gibt, so dass*

$$\sum_{n \geq N} \log(1 + f_n) \tag{15.1}$$

auf K absolut gleichmäßig konvergiert. Sind in diesem Fall alle Funktionen f_n holomorph, so ist auch die Grenzfunktion

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) \tag{15.2}$$

holomorph.

Beweis. folgt sofort aus Satz 15.1 bzw. Korollar 15.2 sowie den Definitionen; man beachte dabei die **gleichmäßige Stetigkeit der Exponentialfunktion** für die glm. Konvergenz. Die Holomorphie der Grenzfunktion ergibt sich mit Satz 6.3 von Weierstraß. \square

In Analogie zur Fragestellung aus Kapitel 13, ob es zu jeder Vorgabe von Hauptteilen eine meromorphe Funktion gibt¹, stellen wir das folgende Interpolationsproblem:

¹welche eine interessante Fragestellung auch für eine Klausuraufgabe ist

Gegeben sei eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_n$ ohne Häufungspunkt in \mathbb{C} sowie eine Folge natürlicher Zahlen $(k_n)_n$. Gibt es eine ganze Funktion f , die genau in den Punkten a_n Nullstellen der Ordnung k_n besitzt?

Bemerkung. Sind nur **endlich viele** a_n gegeben, so kann f **als Polynom gewählt** werden. Sind f und g ganze Funktionen mit identischer Nullstellenverteilung (mit Vielfachheiten gezählt), so ist f/g eine ganze Funktion ohne Nullstellen² und – wegen des einfachen Zusammenhanges von \mathbb{C} – nach Satz 10.3 von der Form

$$\frac{f}{g} = \exp(h) \quad \text{bzw.} \quad f = g \cdot \exp(h)$$

mit einer in ganz \mathbb{C} holomorphen Funktion h ($\hat{=}$ holomorpher Logarithmus). Darüber hinaus ist **obiges Interpolationsproblem nicht eindeutig lösbar** (da mit g auch $f = g \cdot \exp(h)$ für jede ganze Funktion h eine Lösung ist). Das Problem mit den vorgeschriebenen Nullstellen ist eng mit dem Problem der vorgegebenen Hauptteilen verbunden

Satz 15.4. *Ist f eine ganze Funktion, die genau in den Punkten a_n (ohne Häufungspunkte in \mathbb{C}) Nullstellen der Ordnung k_n besitzt, so ist $\frac{f'(z)}{f(z)}$ eine meromorphe Funktion mit den Hauptteilen*

$$\frac{k_n}{z - a_n} \quad \text{in den einfachen Polstellen } z = a_n \text{ von } \frac{f'}{f} \quad (15.3)$$

Beweis. Lokal gilt

$$f(z) = (z - a_n)^{k_n} g_n(z)$$

mit einer ganzen Funktion $g_n(z)$, wobei $g_n(a_n) \neq 0$ gelten muss. Logarithmisches Differenzieren führt auf

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{k_n}{z - a_n} + \frac{g'_n}{g_n}(z),$$

wobei $\frac{g'_n}{g_n}$ in einer Umgebung von $z = a_n$ holomorph ist. □

Beweis. Diese unscheinbare Beobachtung liefert bereits einen Lösungsansatz für unser Interpolationsproblem (und einen Beweis für Satz 15.5): Wir ordnen oBdA die Nullstellen a_n von f an gemäß:

$$0 = |a_0| < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots,$$

wobei stets der Punkt $a_0 = 0$ mit aufgenommen sei, wobei allerdings auch $k_0 = 0$ zugelassen ist (falls $f(0) \neq 0$). Nach dem Satz von Mittag Leffler (Satz 13.2) gibt es zu den Hauptteilen

$$h_n(z) = \frac{k_n}{z - a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

²alle Nullstellen von g sind hebbare Singularitäten von f/g

15. Unendliche Produkte

eine in \mathbb{C} meromorphe Funktion $H(z)$ mit genau diesen Hauptteilen; der Beweis dieses Satzes liefert zu dem die in \mathbb{C} lokal gleichmäßig konvergente Reihe

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \underbrace{\left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \right)}_{h_n(z)} =: \sum_{n=1}^{\infty} H_n(z).$$

konvergenzerzeugender
Summand

Hierbei sind die m_n so zu bestimmen, dass die Partialsummen $\frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m$ zu

$$\frac{-1}{z - a_n} = \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{a_n}} \right) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m$$

Konvergenz erzeugen! Setzen wir

$$g_n(z) = \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\sum_{m=0}^{m_n} \frac{1}{m+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m+1} \right) \right)^{k_n},$$

so folgt

$$\frac{g'_n(z)}{g_n(z)} = k_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \right) = H_n(z).$$

Falls also das Produkt

$$f(z) := z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$$

kompakt (lokal glm) konvergiert, so ist f nach Satz 15.3 ganz und verschwindet nach Konstruktion genau in den Punkten a_n von der Ordnung k_n ($n \in \mathbb{N}_0$).

Für den Nachweis der Konvergenz sei $R > 0$ beliebig und N so groß, dass für $n \geq N$ stets $|a_n| > R$ gelte. Dann ist $g_n(z)$ auf

$$D_R(0) = \{z \mid |z| < R\}$$

ohne Nullstellen und

$$G_n(z) := \int_0^z \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta = \int_0^z H_n(\zeta) d\zeta$$

existiert für $z \in D_R(0)$ (mit Integration 0 nach z in Inneren von $D_R(0)$ entlang eines beliebigen Weges in $D_R(0)$). Wegen

$$\exp(G_n(z)) = g_n(z)$$

und der Konvergenz der Reihe $\sum H_n(z)$ konvergiert ebenso

$$\sum_{n \geq N} G_n(z) = \sum_{n \geq N} \log g_n(z);$$

diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf $D_R(0)$ (dank der geometrischen Reihe, siehe oben). Damit konvergiert auch $\prod_{n \geq N} g_n(z)$ dort gleichmäßig \square

Satz 15.5. Weierstraß'scher Produktsatz (1876):

Es sei $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots$ eine Folge ohne Häufungspunkte in \mathbb{C} mit $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$, sowie $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und k_1, k_2, \dots eine Folge natürlicher Zahlen. Dann existiert eine ganze Funktion $f(z)$, die genau in den Punkten $z = a_n$ von der Ordnung k_n verschwindet. Wählt man $m_n \in \mathbb{N}$ so, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \right) \quad (15.4)$$

lokal gleichmäßig konvergiert, so kann man f wie folgt wählen:

$$f(z) = z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\sum_{m=1}^{m_n+1} \frac{1}{m} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \right) \right)^{k_n} \quad (15.5)$$

(wobei der Term im Exponenten die Konvergenz erzeugt).

Bemerkung. Der Weierstraß'sche Produktsatz (Satz 15.5) löst unser Interpolationsproblem, kann darüber hinaus auch Produktentwicklung für bekannte Funktionen liefern:

Satz 15.6. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)}_{\substack{= \left(1 - \frac{z}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{z}{n} \right) \\ \Leftrightarrow z = \pm n \\ \sin \pi z = 0 \\ \Leftrightarrow z = m \in \mathbb{Z}}} \quad (15.6)$$

Beweis. Die Reihe³

$$\frac{1}{z} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^m}{z - m} + \frac{(-1)^m}{m} \right)$$

konvergiert kompakt (und stellt nach Korollar 13.3 die Funktion $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ dar). Nach dem Weierstraß'schen Produktsatz 15.5 gilt also

$$\sin \pi z = \exp(h(z)) \pi z \underbrace{\prod_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m} \right) \exp \left(\frac{z}{m} \right)}_{\text{existent}},$$

wobei h eine ganze Funktion ist. Um zu zeigen, dass die Formel des Satzes besteht, muss also $h(z) \equiv 0$, denn zusammenfassen der Faktoren zu $\pm m$ im unendlichen Produkt liefert

$$\begin{aligned} &= \pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m} \right) \cdot \left(1 - \frac{z}{-m} \right) \exp \left(\frac{z}{m} + \frac{z}{-m} \right) \\ &= \pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2} \right). \end{aligned}$$

³Die Produktreihendarstellung von $\cot \pi z$, $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ und der Gamma-Funktion sind wichtig für den Zettel in der Klausur!

15. Unendliche Produkte

Hierzu bilden wir die logarithmische Ableitung

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right)$$

bzw.

$$\pi \cot \pi z = h'(z) + \underbrace{\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2}}_{\text{nach Satz 13.1}}$$

Nach Satz 13.1 folgt hieraus $h'(z) = 0$. Damit ist $h(z)$ konstant. Da $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität besitzt mit

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1$$

folgt

$$h(z) \equiv h(0) = 0,$$

□

30.01.09⁴

Korollar 15.7. ⁵ EULER 1737:
Für die ζ -Funktion gilt⁶:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2\pi i)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \tag{15.7}$$

Was dann insbesondere auf

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \\ \zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{265} \end{aligned}$$

führt.

⁴Vertretung JENS JORDAN

⁵gefällt Steuding besonders gut, da es mit der ζ -Funktion zu tun hat

⁶Zur Erinnerung: Die Bernulli-Zahlen sind wie folgt definiert:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} B_j$$

was zu

$$B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Beweis. Wir zeigen:

$$B_{2k} \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2k} = -2 \cdot \zeta(2k) \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k}$$

Koeffizientenvergleich liefert dann:

$$\zeta(2k) = \frac{B_{2k}(2\pi i)^{2k}}{-2(2k)!}$$

was auf

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} \log \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z} \right) &\stackrel{\text{Satz 15.6}}{=} z \frac{d}{dz} \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \\ &= z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2) \frac{\frac{z^2}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k} \end{aligned}$$

wobei für (*) gilt:

$$(*) = \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} z^{2k} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} z^{2k} - \frac{1}{n^{2k+2}} z^{2k+2}}_{\text{Teleskopsumme}} = \frac{z^2}{n^2}$$

Kommen wir wieder zurück zu

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} \log \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z} \right) &= z \left(\cot \pi z - \frac{1}{z} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}(e^{i\pi z} + e^{-i\pi z})}{\frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})} - \frac{1}{z} \right) = \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} + \frac{2\pi iz}{2}. \end{aligned}$$

es führt auch weiter:

$$\frac{\omega}{e^{\omega} - 1} + \frac{\omega}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{\omega^j}{j!} + \frac{\omega}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!}$$

□

Korollar 15.8. WALLIS um 1656:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots} \quad (15.8)$$

$$= \frac{(2m)^2}{(2n-2) \cdot (2n+1)} \quad (15.9)$$

15. Unendliche Produkte

Beweis. Mit Satz 15.6 gilt:

$$1 = \sin\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

□

Bemerkung. Polynome besitzen nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Korollar 5.5) eine Produktdarstellung über ihre Nullstellen. Inwieweit lässt sich dies auf ganze Funktionen verallgemeinern? Für den sin haben wir den Produktsatz 15.6. Betrachten wir ganze Funktionen im Allgemeinen:

Seien a_1, \dots, a_N vorgegebene Nullstellen dann gilt

1. Es gibt eine ganze Funktion f welche genau die Nullstellen a_n hat, zum Beispiel

$$f(z) = (z - a_1) \cdot (z - a_2) \cdot \dots \cdot (z - a_N)$$

2. Alle ganzen Funktionen welche genau die Nullstellen a_n haben, sind von der Form

$$f(z) = \prod_{j=1}^N (z - a_j) \exp(g(z))$$

wobei $g(z)$ eine ganze Funktion ist.

Nun seien a_1, a_2, \dots eine Folge von Nullstellen **ohne Häufungspunkt**

1. Es gibt eine ganze Funktion mit genau diesen Nullstellen (Satz 15.5)
2. es gilt der **Hadamard'sche Produktsatz** (Satz 15.9)

Eine allgemeine positive Antwort liefert der gleich folgende **Hadamard'sche Produktsatz**, den wir nun herleiten wollen.

Satz 15.9. Hadamard'scher Produktsatz⁷:

Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung⁸ ϱ und k die Ordnung der Nullstellen von f in \mathcal{O} (bzw. $k = 0$, falls $f(0) \neq 0$).

Ferner seien a_1, \dots die Nullstellen von $f(z)$ in $z \neq 0$ (Entsprechend ihrer Vielfachheiten aufgelistet). Dann gilt:

$$f(z) = z^k \exp(P(z)) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right), \quad (15.10)$$

wobei

$$Q(\omega) := \sum_{m=1}^{[\varrho]} \frac{\omega^m}{m} \quad (15.11)$$

mit $r := [\varrho] = \max\{N \in \mathbb{Z} \mid N \leq \varrho\}$ und $P(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq [\varrho]$ (wobei „ $[\]$ “den Gaußklammern entspricht) bezeichne.

⁷HADAMARD hat diesen Satz gefunden, als er Untersuchungen zur Riemann'schen Zetafunktion anstellte
⁸ $\exists_{A,B} |f(z)| \leq A \cdot \exp(B|z|^\varrho)$

Beweis. Betrachte

$$E(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)$$

Wir zeigen:

1. $E(z)$ ist eine ganze Funktion
2. $f(z) = \exp(P(z)) \cdot E(z)$ mit $P(z)$ als Polynom vom Grad $\leq \varrho$.

zu 1.: Für $|\omega| \leq \frac{1}{2}$ gilt mit $1 - \omega = \exp(\log(1 - \omega))$ und $r = [\varrho]$

$$\begin{aligned} (1 - \omega) \exp(Q(\omega)) &= \exp\left(\log(1 - \omega) + \omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} + \dots + \frac{\omega^r}{r}\right) \\ &= \exp\left(\underbrace{-\sum_{m>r} \frac{\omega^m}{m}}_{=:W}\right) = e^{-W} \end{aligned}$$

(vgl. Kapitel 13). Wegen $|W| \leq 2|\omega|^{r+1} \leq 1$ gilt:

$$|1 - (1 - \omega) \exp(Q(\omega))| = |1 - e^{-W}| \leq \text{const}_1 |W| \leq \text{const}_2 |\omega|^{r+1}$$

mit den absoluten Konstanten $\text{const}_1, \text{const}_2 \in \mathbb{R}^+$. Insbesondere gilt

$$\left|1 - \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)\right| \leq \text{const}_2 \left|\frac{z}{a_n}\right|^{r+1}$$

für $|a_n|$ groß genug. Nach Satz 14.3 2. gilt

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{r+1}} < \infty,$$

und ist damit konvergent. Nach Satz 15.3 ist E auf jedem Kompaktum $K_R = \overline{D_R(0)}$ gleichmäßig. Damit folgt, dass E lokal gleichmäßig konvergiert.

Zu 2.: Klar ist, dass $\frac{f(z)}{E(z)}$ ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen (folgt aus Satz 15.5). Mit Satz 10.3 erhalten wir:

$$\frac{f(z)}{E(z)} = \exp(P(z)) \tag{15.12}$$

mit $P(z)$ ganz und

$$E(z) := z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \tag{15.13}$$

02.02.09

15. Unendliche Produkte

mit einem in ganz \mathbb{C} holomorphen Logarithmus P nach Satz 10.3. Es verbleibt zu zeigen, dass P ein Polynom vom Grad $\leq r$ ist. Zunächst

$$|1 - \omega| \exp(Q(\omega)) \geq \begin{cases} \exp(-\text{const}_3 |\omega|^{r+1}), & \text{für } |\omega| \leq \frac{1}{2}, \\ |1 - \omega| \exp(-\text{const}_4 |\omega|^r), & \text{für } |\omega| \geq 12. \end{cases} \quad (15.14)$$

Denn: wie oben benutzen wir die Taylor-Entwicklung des Logarithmus und finden. Außerdem sind die $\text{const}_1, \text{const}_2, \dots$ (jetzt und im folgenden) absolut und positive Konstanten!

$$(1 - \omega) \exp(Q(\omega)) = \exp\left(-\sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{\omega^m}{m}\right) =: e^{-W}.$$

Wegen $|e^W| \geq e^{-|W|}$ und $|W| \leq 2|\omega|^{r+1}$ für $|\omega| \leq \frac{1}{2}$. Dies liefert die erste Ungleichung in Formel (15.14); für die zweite Ungleichung beobachten wir für $|\omega| \geq \frac{1}{2}$, dass

$$\begin{aligned} |(1 - \omega) \exp(Q(\omega))| &\geq |1 - \omega| \exp(-|Q(\omega)|). \\ |e^W| &\geq e^{-|W|} \end{aligned}$$

dies liefert die zweite Ungleichung von (15.15). Die nächste Abschätzung zeigt, dass das Produkt E abseits der Nullstellen a_n von f nicht zu klein werden kann. Für alle $s \in (\varrho, r + 1)$ gilt:

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \right| \geq \exp(-\text{const}_5 |z|^s) \quad (15.15)$$

Für alle z außerhalb $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid |z - a_n| \leq |a_n|^{-r-1}\}$. Ist $z = a_n$, dann ist $E(a_n) = 0$, das heißt, die a_n liegen diskret⁹.

Denn: Für alle Nullstellen a_n mit $|a_n| > 2|z|$ liefert (15.14)

$$\begin{aligned} \left| \prod_{|a_n| > 2|z|} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \right| &\stackrel{(15.14)}{\geq} \prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{1}{2}} \exp\left(-\text{const}_3 \left|\frac{z}{a_n}\right|^{r+1}\right) \\ &\geq \exp\left(-\text{const}_3 |z|^{r+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} |a_n|^{-r-1}\right). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$|a_n|^{-r-1} = |a_n|^{-s} |a_n|^{s-r-1} \leq \text{const}_6 |a_n|^{-s} |z|^{s-r-1}$$

und da $\sum |a_n|^{-s}$ nach Satz 14.3 2. konvergiert, folgt die gewünschte Abschätzung (15.15) für das **Teilprodukt**.

⁹haben also jeweils disjunkte Umgebungen

Für das andere Teilprodukt bemühen wir wiederum (15.14)

$$\begin{aligned} \left| \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \right| &\stackrel{(15.14)}{\geq} \prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| \geq \frac{1}{2}} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \cdot \underbrace{\prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| \geq \frac{1}{2}} \exp\left(-\text{const}_4 \left|\frac{z}{a_n}\right|^r\right)} \\ &= \prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| \geq \frac{1}{2}} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \cdot \exp\left(-\text{const}_4 |z|^r \sum_{|a_n| \leq 2|z|} |a_n|^{-r}\right). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\exp\left(-\text{const}_4 |z|^r \sum |a_n|^{-r}\right) \geq \exp(-\text{const}_7 |z|^s)$$

(wie oben). Es verbleibt $\prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ abzuschätzen: Nach Voraussetzung dürfen wir $|a_n - z| \geq |a_n|^{-r-1}$ annehmen, so dass also

$$\prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| \geq \frac{1}{2}} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| = \prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| \geq \frac{1}{2}} \left|\frac{a_n - z}{a_n}\right| \geq \prod_{\left|\frac{z}{a_n}\right| \geq \frac{1}{2}} |a_n|^{-r-2}.$$

Nun gilt für den Logarithmus der rechten Seite mit Satz 14.3 1.

$$\begin{aligned} (r+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log |a_n| &\leq (r+2) \underbrace{n(2|z|)}_{=\text{Anzahl der } a_n \text{ mit } |a_n| \leq 2|z|} \log(2|z|) \\ &\stackrel{14.3}{\leq} \text{const}_8 |z|^s \log |z| \leq \text{const}_9 |z|^{s'} \end{aligned}$$

für jedes $s' > s$. Da $s > \varrho$ beliebig war, folgt (15.15). Die Abschätzung (15.15) gilt sogar auf ganzen Kreislinien:

Es gibt eine Folge von Radien R_1, R_2, \dots mit $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \infty$, so dass

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(Q\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \right| \geq \exp(-\text{const}_5 |z|^s) \quad (15.16)$$

für alle z mit $|z| = R_m$, wobei $s > \varrho$ beliebig aber fest. Wegen $\sum |a_n|^{-r-1} < \infty$ nach Satz 14.3 2. gibt es ein N , so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^{-r-1} \leq \frac{1}{10}.$$

Also gibt es zwischen M und $M+1$ für hinreichend großes $M \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $R \in [M, M+1]$, so dass die **Kreislinien vom Radius R** um den Ursprung die Kreisscheiben $\{z \mid |z - a_n| \leq |a_n|^{-r-1}\}$ **nicht schneiden**. Ansonsten würde die Vereinigung der Intervalle

$$I_n := \left[|a_n| - \frac{1}{|a_n|^{r+1}}, |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{r+1}} \right]$$

15. Unendliche Produkte

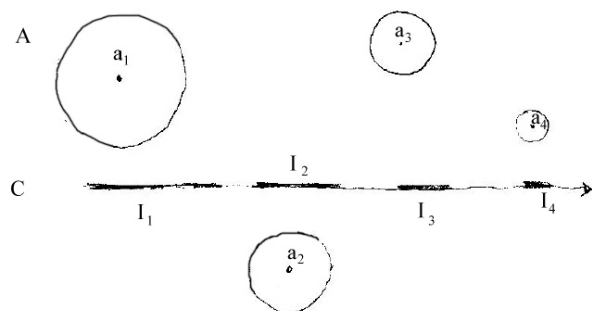


Abbildung 15.1.: Skizze zu Beweis von Satz 15.9, Kreisscheiben um a_i

der Länge $2|a_n|^{-r-1}$ das ganze Intervall $[M, M+1]$ überdecken und damit

$$2 \cdot \sum |a_n|^{-r-1} \geq 1$$

sein, was im Widerspruch zu

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^{-r-1} \leq \frac{1}{10}$$

steht. Also ist (15.16) bewiesen.

Kommen wir nun zum Ende des Beweises: Mit Formel (15.12) und (15.16) gilt für $|z| = R_m$

$$\exp(\operatorname{Re} P(z)) = \left| \frac{f(z)}{E(z)} \right| \leq \operatorname{const}_{10} \exp(\operatorname{const}_5 |z|^s)$$

bzw.

$$\operatorname{Re} P(z) \leq c_{11} |z|^s \tag{15.17}$$

Entwickeln wir die ganze Funktion $P(z)$ in eine in ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

so folgt etwa über die Cauchy'schen Integralformeln (und Satz 6.1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi = \begin{cases} b_n R^n, & \text{für } n \geq 0, \\ 0, & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

und zusammen mit dem komplex Konjugierten folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$b_n R^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi (P + \bar{P})(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi$$

sowie

$$\operatorname{Re} b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{(P + \bar{P})(Re^{i\varphi})}_{=(P+\bar{P})(x)} d\varphi.$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation ($\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} d\varphi = 0$ für $n \in \mathbb{N}$) ist damit

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\{ \underbrace{\operatorname{Re} P(Re^{i\varphi})}_{=\frac{1}{2}(P+\bar{P})} - \underbrace{\operatorname{const}_{11} R^s}_{=f(*)d\varphi} \right\}}_{\leq \text{nach (15.17)}} e^{in\varphi} d\varphi$$

für $n \in \mathbb{N}$. Hier ist nach (15.17)

$$\{\operatorname{Re} P(Re^{i\varphi}) - \operatorname{const}_{11} R^s\} \leq 0.$$

Multiplikation mit -1 liefert

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \frac{1}{\pi R^s} \int_0^{2\pi} \underbrace{\{\operatorname{const}_{11} R^s - \operatorname{Re} P(Re^{i\varphi})\}}_{\geq 0 \text{ nach Formel (15.17)}} d\varphi \\ &\leq \underbrace{2 \operatorname{const}_{11} R^{s-n}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{falls} \\ s-n < 0}} - \underbrace{2R^{-n} \operatorname{Re} b_0}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Mit $R \rightarrow \infty$ folgt $b_n = 0$ für alle $n > s > r = [\varrho]$. Also ist $P(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq r = [\varrho]$. \square

Als Anwendung des Hadamard'schen Produktsatzes notieren wir:

Korollar 15.10.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right), \quad (15.18)$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right) = 0,577\dots \\ \sum_{n=1}^N &\sim \int_1^N \frac{dn}{n} = \log N \end{aligned}$$

die **Euler-Mascheroni-Konstante**¹⁰ ist.

06.02.09

¹⁰wobei nicht sicher ist, ob γ rational oder irrational ist

15. Unendliche Produkte

Beweis. Nach dem Hadamard'schen Produktsatz 15.9 gilt (mit Blick auf Korollar 14.5)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \exp(P(z))z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right),$$

wobei $P(z)$ ein Polynom von einem Grad ≤ 1 ist. Sei also $P(z) = Az + B$, so folgt aus

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \Gamma(z) = 1$$

(nach Satz 13.4), dass $B = 0$ ist (da es keinen konstanten Term gibt). Mittels $\Gamma(1) = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{-A} &= \exp(-P(z)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right) \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{n=1}^N \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N - \log\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

wobei für $\log N$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \log \prod_{n=1}^N \frac{n+1}{n} \\ &= \log \underbrace{\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{N+1}{N}\right)}_{\text{Teleskop-Produkt}} = \log\left(\frac{N+1}{N}\right) + \log N \end{aligned}$$

machen wir weiter vor unserer kleinen Nebenrechnung

$$e^{-A} = \dots = e^{-\gamma}$$

das heißt, $A = -\gamma$. □

Definition. Gauß'sches Produkt:

Damit gewinnt man auch das sog. **Gauß'sche Produkt**¹¹.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \quad (15.19)$$

für $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

Zum Schluss nun noch ein erstaunlicher Satz:

¹¹vgl. Ana III, Korollar zu Satz 6.4

Korollar 15.11. Eine ganze Funktion f von **endlicher Ordnung**¹², die zwei verschiedene komplexe Werte a, b nicht als Wert annimmt, ist konstant.

Beweis. OBdA seien $a = 1, b = 0$ (ansonsten betrachte man die Funktion $\frac{f(z)-a}{b-a}$; diese ist $= 1$, genau dann, wenn $f(z) = b$ und $= 0$, genau dann, wenn $f(z) = a$ ist). Da stets $f(z) \neq 0$ gilt, ist:

$$f(z) = \exp(P(z)),$$

wobei der holomorphe Logarithmus $P(z)$ nach Satz 10.3 existiert und nach dem Hadamard'schen Produktsatz 15.9 ein Polynom ist. Wegen $f(z) \neq 1$ darf P nicht verschwinden, was nach dem Fundamentalsatz der Algebra nur für

$$P(z) = \text{const}$$

möglich ist. □

¹²tatsächlich gilt die Aussage des Korollars auch **ohne** die Annahme, dass f von endlicher Ordnung sein muss. Dies ist der **kleine Satz von Picard** der in der Funktionentheorie 2 bewiesen wird.

Teil II.

Funktionentheorie II
Sommersemester 2009

Die Funktionentheorie II spezialisiert sich auf Themen, die an die analytische Zahlentheorie anknüpfen. Gewisse arithmetische Problemstellungen wirkten als „Katalysator“ für die Entwicklung der Funktionentheorie im 19. und 20. Jahrhundert:

- **Thetafunktion** zum Beispiel JACOBI (1829)

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} q^{m^2} \right)^8 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(16 \sum_{d|n} (-1)^{n-d} d^3 \right)}_{\text{Anzahl der Darstellungen von } n \in \mathbb{N}_0 \text{ als summe von „8“ quadraten}} q^n$$

bzw. Modulformen bzw. -formen (seit EISENSTEIN 1847), sowie elliptische Funktionen und Kurven (seit POINCARÈ 1901)

- Die **Zeta-Funktion** (seit RIEMANN 1859)

$$\begin{aligned} \zeta &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} && (\operatorname{Re} s > 1) \\ &= \frac{(2\pi)^s}{2 \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)} \zeta(1-s) \end{aligned}$$

(Funktionalgleichung mit Beweis in der Vorlesung) und ihre Bedeutung für die **Primzahlverteilung** (Stichwort **Riemann'sche Vermutung**)

16. Biholomorphe Abbildungen

Im Hinblick auf meromorphe Funktionen ist es sinnvoll, der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} einen unendlich fernen Punkt „ ∞ “ hinzuzufügen:

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und folgende Rechenregeln zu vereinbaren:

$$\begin{aligned} \infty \cdot \infty &:= \infty \\ a + \infty &:= \infty \\ a \cdot \infty &:= \infty \end{aligned} \quad \text{für } a \in \mathbb{C}; a \neq 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{1}{0} &:= \infty, \\ \frac{1}{\infty} &:= 0; \end{aligned}$$

nicht Definiert bleiben weiterhin: „ $\infty \pm \infty$ “, „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

Definition. Riemann'sche Zahlensphäre:

Die Menge $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt **Riemann'sche Zahlensphäre**, da sie mit einer geeigneten Projektion homöomorph zu einer zweidimensionalen **Einheitssphäre** (Kugeloberfläche) ist:

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Wir definieren hierzu

$$\mathbb{C} \cong \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

und die **stereographische Projektion:**

$$\begin{aligned} \Phi : S^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}, \end{aligned}$$

wobei $N := (0, 0, 1)$ der **Nordpol** und jedem Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ wird der Schnittpunkt $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ der Verbindungsgeraden von N durch (x_1, x_2, x_3) mit der horizontalen Ebene \mathbb{C} zugeordnet: **hier fehlt das Bild zur Veranschaulichung**. Klar, denn aus $N, x, \Phi(x)$ auf einer Geraden ist äquivalent zu

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \frac{x_1}{1-x_3} \\ 0 & x_2 & \frac{x_2}{1-x_3} \\ 1 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Φ ist eine Bijektion (anschaulich klar), denn für

$$z = \Phi(x_1, x_2, x_3)$$

gilt:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\bar{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} \\ &= \frac{1 + x_3}{1 - x_3} \end{aligned}$$

da $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$ und als Umkehrabbildung ergibt sich

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \\ x_2 &= \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \\ x_1 &= \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

Bemerkung. Die stereographische Projektion:

- bildet jeden Kreis auf der Kugel, der den Nordpol N **nicht trifft**, auf einen Kreis in der Ebene ab,
- bildet jeden Kreis auf der Kugel, der den Nordpol N **trifft**, auf eine Gerade ab

Beweis in den Tutorien...

Dabei setzen wir Φ kanonisch fort mittels

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} : S^2 &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ x &\mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } x = N \\ \Phi(x) & \text{falls } x \neq N \end{cases} \end{aligned}$$

Damit lässt sich auf $\hat{\mathbb{C}}$ eine Topologie erklären:

Für $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ ist die **sphärische Distanz**

$$d(z_1, z_2) := \left| \hat{\Phi}^{-1}(z_1) - \hat{\Phi}^{-1}(z_2) \right|.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2 + 1) \cdot (|z_2|^2 + 1)}} && \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ d(z_1, \infty) &= \frac{2}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}} && \text{für } z_1 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Damit erweist sich d als **Metrik** auf $\hat{\mathbb{C}}$; durch den Nachweis der HEINE-BORELL'sche Überdeckungseigenschaft (siehe Ana II) folgt

16. Biholomorphe Abbildungen

Satz 16.1. $\hat{\mathbb{C}}$ ist ein kompakter metrischer Raum.

Beweis. als Übungsaufgabe. □

Diese **Einpunktkompaktifizierung** der komplexen Ebene erlaubt eine neue Sichtweise auf Altbekanntes:

Satz. Satz von Liouville (vgl. Satz 5.4):

Jede holomorphe Funktion $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

Bemerkung. Hierbei heißt f **holomorph (meromorph)** in ∞ , wenn $z \mapsto f(1/z)$ holomorph (meromorph) in $z = 0$ ist. Damit beweist sich obiger Satz wie folgt:

Beweis. Jede stetige Funktion f mit Werten in \mathbb{C} nimmt auf der nach Satz 16.1 kompakten Menge $\hat{\mathbb{C}}$ ihr Betragsmaximum an; ist f zudem holomorph, so folgt die Konstantheit mit dem Maximumsprinzip. □

Gegeben sind nicht-leere Mengen $U, V \subset \hat{\mathbb{C}}$, gibt es eine holomorphe Bijektion $f : U \rightarrow V$? Betrachten wir die **Einheitskreisscheibe** $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, die auf die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Diese Abbildung wird beschrieben durch $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$. Eine Abbildung auf ein nicht zusammenhängendes Gebiet ist nicht möglich (Satz von der Gebietstreue, Satz 7.5).

Beispiel 16.1. Hier fehlen noch die entsprechenden Skizzen

Definition. biholomorph:

Sind U und V offene Mengen, so heißt die Abbildung $f : U \rightarrow V$ **biholomorph**, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ holomorph sind; in diesem Fall heißen U und V **biholomorph äquivalent**.

wichtige Fragen sind:

- Welches sind die (bi-) holomorphen Automorphismen von \mathbb{C} bzw. $\hat{\mathbb{C}}$?
- Biholomorphe Äquivalenz definiert eine Äquivalenzrelation (klar); welches sind die zugehörigen Äquivalenzklassen? **Wie sieht die Äquivalenzklasse mit der Einheitskreisscheibe aus?**¹

Satz 16.2. $f : U \rightarrow V$ ist genau dann **biholomorph**, wenn f holomorph und bijektiv ist und

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U \tag{16.1}$$

gilt; in diesem Fall ist

$$(f^{-1})' \cdot (f(z)) = \frac{1}{f'(z)}. \tag{16.2}$$

Die Umkehrabbildung einer bijektiven holomorphen Funktion ist also stets holomorph.

¹Dies entspricht dem Riemann'schen Abbildungssatz, Beweis folgt in Kapitel 18 oder 19

Beweis. Angenommen, $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$. Dann ist

$$f(z) - f(z_0) = c \cdot (z - z_0)^k + \mathcal{O}(|z - z_0|^{k+1}),$$

mit einer Konstanten $c \neq 0$, sowie $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Für hinreichend kleines ω sei $F(z) := c \cdot (z - z_0)^k - \omega$, sodass für alle z mit $|z - z_0| = \varepsilon$

$$\left| \underbrace{f(z) - f(z_0) - c \cdot (z - z_0)^k}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})} \right| < \underbrace{|F(z)|}_{|c|\varepsilon^k - |\omega|}$$

bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$. Nach Satz 12.6 (Satz von Rouché) besitzt $f(z) - f(z_0) - \omega$ mindestens zwei Nullstellen in der Kreisscheibe

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (k \geq 2).$$

Da $f'(z) \neq 0$ für alle $z \neq z_0$ hinreichend nahe an z_0 gilt (f ist nicht konstant), sind die Nullstellen von $f(z) - f(z_0) - \omega$ verschieden und also ist f **injektiv** (denn $f(z_1) - \cancel{f(z_0) - \omega} = 0 = f(z_2) - \cancel{f(z_0) - \omega}$), ein Widerspruch. Die Holomorphie von f^{-1} ergibt sich (wie in der reellen Analysis) mit dem Differentialquotienten; ebenso folgt die Formel für (f^{-1}) □

23.04.09

Eine geometrische Charakterisierung biholomorpher Abbildungen:

Definition. orientierter Winkel:

Zu $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachten wir glatte, von z_0 ausgehende Wege $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_j(0) = z_0$ und $\gamma_j'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Der orientierte Winkel $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ zwischen zwei solcher Wege γ_1, γ_2 ist definiert als Winkel zwischen den jeweiligen Halbtangenten

$$z \mapsto z_0 + \gamma_j'(0)z : \\ \angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}.$$

Ist Ω ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig diffbar, so heißt f in $z_0 \in \Omega$ **Winkeltreu** und **orientierungstreu**, wenn es eine Umgebung U von z_0 in Ω gibt, sodass $f|_U$ ein **Diffeomorphismus** auf eine Umgebung V von $f(z_0)$ ist und für je zwei von z_0 ausgehenden glatten Wegen γ_1, γ_2

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2) \tag{16.3}$$

gilt. f heißt **konform**, wenn f in jedem Punkt von Ω winkel- und orientierungstreu ist, sowie Ω bijektiv auf $f(\Omega)$ abbildet.

Ist γ ein glatter von z_0 ausgehender Weg, so ist auch der **Bildweg** $f \circ \gamma$ glatt (klar) und

$$(f \circ \gamma)'(0) = f_z(z_0)\gamma'(0) + f_{\bar{z}}(z_0)\overline{\gamma'(0)}$$

16. Biholomorphe Abbildungen

mit f_z als die partielle Ableitung von f nach z , und $f_{\bar{z}}$ die partielle Ableitung nach dem komplex Konjugierten von z . $\gamma'(0)$ folgt aus dem **Wirthinger-Kalkül**. Ist f holomorph in z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$, so folgt (siehe Kapitel 1) $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ und $f_z(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ sowie

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Im Falle zweier solcher Wege ergibt sich

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \frac{\cancel{f'(z_0)}\gamma_2'(0)}{\cancel{f'(z_0)}\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$$

Wegen $f'(z_0) \neq 0$ ist f lokal umkehrbar (klar) und f also in z_0 winkel- und orientierungstreu. Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 16.3. *Sei Ω ein Gebiet, so ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann konform, wenn $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ **biholomorph** ist.*

Beweis. Ist f in $z_0 \in \Omega$ winkel- und orientierungstreu, so gilt für die Wege $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \ t \mapsto z_0 + e^{is}t$ mit $0 \leq s < 2\pi$ jeweils:

$$\angle(f \circ \gamma_s, f \circ \gamma_0) = \angle(\gamma_s, \gamma_0) = s$$

bzw.

$$\arg \frac{f_z(z_0)e^{is} + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-is}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)} = \arg e^{is} \quad \Big| \cdot e^{-is},$$

sodass also $\arg(f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2is})$ **unabhängig von s** , was $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ bzw. die komplexe Diffbarkeit von f in z_0 nach sich zieht (siehe Kapitel 1).

Ferner gilt $f'(z_0) \neq 0$, sonst wäre f kein lokaler Diffeomorphismus. Mit Satz 16.2 folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Konforme Abbildungen sind relevant in der Elektrotechnik, der Strömungsmechanik, der Kartographie (MERCATOR),...

17. Möbiustransformationen

Definition. Möbiustransformation:

Die speziellen rationalen Funktionen der Gestalt

$$f(z) = \frac{ax + b}{cz + d} \quad (17.1)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $\boxed{ad - bc \neq 0}$ heißen **Möbiustransformationen** (bzw. **gebrochen lineare Transformationen**).

Bemerkung. Die Bedingung $\boxed{ad - bc \neq 0}$ verhindert das **identische Verschwinden** des Nenners bzw. das der Zähler ein konstantes Vielfaches des Nenners ist. ($ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

- 1. Fall:** Ist $c = 0$, so ist f holomorph und bildet \mathbb{C} konform auf sich selbst ab (Automorphismus von \mathbb{C}).
- 2. Fall:** Ist $c \neq 0$, so hat f einen Pol in $-\frac{d}{c}$, ist also meromorph, aber noch konform auf $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Zu einer Möbiustransformation f (wie oben) lässt sich auf den Holomorphiebereich leicht die Umkehrfunktion angeben. Wegen $\boxed{ad - bc \neq 0}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

wobei GL_n die Menge aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen (hier mit komplexen Einträgen) ist und die Gruppeneigenschaft der $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ überträgt sich mittels der Abbildung:

$$\Phi : \text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

auf die Gruppe \mathcal{M} aller Möbiustransformationen.

Die Möbiustransformationen in $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ induziert in natürlicher Weise die Hintereinanderausführung von Möbiustransformationen. Gegeben:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \in \mathcal{M},$$

17. Möbiustransformationen

so ist auch

$$(f \circ g)(z) = \frac{(a\alpha + b\beta)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} \in \mathcal{M},$$

denn:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Insbesondere ergibt sich die **Umkehrung einer Möbiustransformation** f (wie oben) als

$$\omega \mapsto f^{-1}(\omega) = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a},$$

denn:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

kürzt sich bei f^{-1}

Wir setzen Möbiustransformationen

$$z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

in natürlicher Weise nach $\hat{\mathbb{C}}$ fort:

$$f(-d/c) := \infty, \quad f(\infty) := \frac{a}{c}$$

falls hier $c = 0$ ist, so folgt $f(\infty) = \infty$ mit den Rechenregeln in $\hat{\mathbb{C}}$. Damit haben wir die Ausnahme von $-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}, \infty$ topologisch beseitigt. Darüberhinaus ist f auch in ∞ holomorph, denn für $c \neq 0$ ist die Funktion

$$\omega \mapsto \begin{cases} f(1/\omega) = \frac{a+b\omega}{c+d\omega} & \text{für } \omega \neq 0, \\ \frac{a}{c} & \text{für } \omega = 0, \end{cases}$$

holomorph in $\omega = 0$ (was $z = \frac{1}{\omega} = \infty$ entspricht).

Jetzt beantworten wir die Frage nach dem (bi-) holomorphen Automorphismen von \mathbb{C} bzw. $\hat{\mathbb{C}}$ (aus Kapitel 16). Wir bezeichnen mit $\text{Aut } \mathbb{C}$ bzw. $\text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$ die Menge aller Automorphismen von \mathbb{C} bzw. $\hat{\mathbb{C}}$; diese sind jeweils bzgl. der Hinereinanderschaltung Gruppen.

Satz 17.1. 1. $\text{Aut } \mathbb{C}$ ist die **Gruppe aller linearen Transformationen** $z \mapsto az + b$ mit $a \neq 0$.

2. $\text{Aut } \hat{\mathbb{C}} = \mathcal{M}$ ist die **Gruppe aller Möbiustransformationen** (gebrochen lineare Transformationen).

Beweis. 1. Ganze lineare Transformationen $z \mapsto az + b$ mit $a \neq 0$ sind Automorphismen von \mathbb{C} (klar). Angenommen $f \in \text{Aut } \mathbb{C}$, so ist f eine ganze Funktion. Wäre f kein Polynom, so hätte f in ∞ eine wesentliche Singularität (bzw. $z \mapsto (1/z)$ eine solche im Nullpunkt auf Grund der Laurentreihenentwicklung, siehe Kapitel 11), insbesondere läge $f(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$ dicht in \mathbb{C} (nach Casorati-Weierstraß), wobei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Wegen der Gebietstreue ist $f(\mathbb{D})$ ein Gebiet und mit der Bijektivität von f folgte:

$$\underbrace{f(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})}_{\text{dicht in } \mathbb{C}} \cap \underbrace{f(\mathbb{D})}_{\text{Gebiet}} = \emptyset,$$

ein Widerspruch, also ist f ein Polynom. Hätte es einen Grad > 1 , so besäße f' nach dem Fundamentalsatz der Algebra Nullstellen in \mathbb{C} , was Satz 16.2 widerspräche. Also $f(z) = az + b$ für ein $a \neq 0$.

2. Sei $f \in \text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$. Falls $f(\infty) = \infty$, so ist $f|_{\mathbb{C}} \in \text{Aut } \mathbb{C}$ und also nach **1.** eine ganze lineare Transformation ($c = 0$). Gilt $f(\infty) = c \neq \infty$, so setzen $g(z) = \frac{1}{z-c}$ und $f := g \circ f \in \text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$ und es folgt $h(\infty) = g(c) = \infty$. Also $h|_{\mathbb{C}} \in \text{Aut } \mathbb{C}$. Dies liefert $f = g^{-1} \circ h \in \mathcal{M}$, wobei h linear ist. □

27.04.09

Beispiel 17.1. Die **Cayley Abbildung** $z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathcal{M}$ ist eine Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$, der \mathbb{R} auf die Einheitskreislinie und die obere Halbebene auf die offene Einheitskreisscheibe abbildet.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & +i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$h(z) = i \frac{z+1}{-z+1}$$

(denn: durch Nachrechnen erhält man $\text{Im } h(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ für $z \neq 1$)

Beispiel 17.2. Die **Inversion** am Einheitskreis $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist ein Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$, z wird auf das Reziproke gestaucht oder gestreckt und an der reellen Achse gespiegelt. ($0 \leftrightarrow \infty$).

Bemerkung. Möbiustransformationen haben interessante geometrische Eigenschaften:

Es sei

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \neq \text{id}$$

mit $ad - bc \neq 0$. Dann besitzt f **genau einen oder zwei Fixpunkte**. (d.h. Punkte $\omega \in \hat{\mathbb{C}}$ mit $f(\omega) = \omega$). Für $c = 0$ sind dies $\omega = \infty$ und $\omega = \frac{b}{d-a}$ falls $a \neq d$. Für $c \neq 0$ sind die Fixpunkte Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

$$\Leftrightarrow c\omega^2(d-a)\omega - b = 0$$

17. Möbiustransformationen

nach dem Fundamentalsatz der Algebra lösbar und hat zwei Lösungen. Insbesondere ist $f \in \mathcal{M}$ durch Angabe der Bilder von drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ eindeutig festgelegt: Gilt $f_1(z_j) = f_2(z_j)$ für $j = 1, 2, 3$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$, so hat $f_2^{-1} \circ f_1 \in \mathcal{M}$ die Fixpunkte z_1, z_2, z_3 (denn $f_2^{-1}(f_1(z_j)) = f_2^{-1}(f_2(z_j)) = z_j$). Also $f_2^{-1} \circ f_1 = \text{id}$ bzw. $f_2 = f_1$.

Zeige nun, dass die Vorgabe der Bilder dreier Punkte eine Möbiustransformation determiniert:

Satz 17.2. *Sind z_1, z_2, z_3 und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ zwei Tripel verschiedener Punkte von $\hat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbiustransformation f mit*

$$f(z_j) = \omega_j \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (17.2)$$

Beweis. Wegen $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ definieren wir

$$f_1(z) = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_3}}{\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}}.$$

Dann gilt $f_1(z_1) = 0$, $f_1(z_2) = 1$, $f_1(z_3) = \infty$. Analog:

$$f_2(z) = \frac{\frac{z-\omega_1}{z-\omega_3}}{\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2-\omega_3}},$$

so dass $f_2(\omega_1) = 0$, $f_2(\omega_2) = 1$, $f_2(\omega_3) = \infty$. Die Abbildungen $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ bilden die Tripel z_1, z_2, z_3 bzw. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ also jeweils auf $0, 1, \infty$ ab. \square

Die Möbiustransformationen f_1, f_2 aus dem Beweis bekommen einen Namen:

Definition. Doppelverhältnis:

Gilt $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$, so definiert der Quotient

$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3) := \frac{\frac{z-z_1}{z-z_3}}{\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}} \quad (17.3)$$

das **Doppelverhältnis** der vier Punkte z, z_1, z_2, z_3 .

Mit den Rechenregeln aus $\hat{\mathbb{C}}$ gilt unter anderem

$$\begin{aligned} \text{DV}(z, \infty, z_2, z_3) &= \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \\ \text{DV}(z, z_1, \infty, z_3) &= \frac{z - z_1}{z - z_3}, \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Doppelverhältnis definiert (wegen $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$) eine Möbiustransformation.

$$z \mapsto \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{M},$$

die z_1, z_2, z_3 auf $0, 1, \infty$ abbildet (klar siehe Skizze projektive Geometrie). Darüber hinaus ist sie aber auch eine Invariante unter Möbiustransformation:

Satz 17.3. Sind $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, so gilt:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) \quad (17.4)$$

für jedes $z \in \hat{\mathbb{C}}$ und jedes $n \in \mathcal{M} \stackrel{17.1}{=} \text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Die Abbildung $g : z \mapsto DV(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3))$ ist als Komposition von $z \mapsto f(z)$ und $\omega \mapsto DV(\omega, f(z_1), f(z_2), f(z_3))$ ein Möbiustransformation mit

$$\begin{aligned} g(z_1) &= DV(f(z_1), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = 0 \\ g(z_2) &= DV(f(z_2), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) \\ &= \frac{\frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_2)-f(z_3)}}{\frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_2)-f(z_3)}} = 1 \end{aligned}$$

Da nach Satz 17.2 g damit eindeutig festgelegt ist, gilt

$$g(z) = DV(z_1, z_1, z_2, z_3).$$

□

Beispiel 17.3. Gesucht ist $f \in \mathcal{M}$ mit $f(\pm 1) = -\mp 1$, $f(i) = i$.

$$\begin{array}{ccccc} +1 & \rightarrow & 0 & \leftarrow & -1 \\ i & \rightarrow & 1 & \leftarrow & i \\ -1 & \rightarrow & \infty & \leftarrow & +1 \end{array}$$

$$f = f_2^{-1} \circ f_1$$

$$f_2(z) = DV(z, -1, i, +1)$$

setzt man dies in (17.3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} &= \frac{z+1}{\frac{z-1}{\frac{i+1}{i-1}}} \\ &= i \frac{z+1}{z-1} \end{aligned}$$

für f_1 erhalten wir analog

$$f_1(z) = DV(z, +1, i, -1) = -i \frac{z-1}{z+1}$$

die zugehörige $GL_2(\mathbb{C})$ Matrix ist:

$$\begin{aligned} F_2 &= \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ F_1 &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

17. Möbiustransformationen

Also

$$F = F_2^{-1} \cdot F_1 = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow f(z) = \frac{-1}{z}$$

Satz 17.4. Möbiustransformationen bilden Geraden und Kreislinien auf Geraden oder Kreislinien ab. Dabei enthält jede Gerade stets den Punkt ∞ (in $\hat{\mathbb{C}}$); Geraden und Kreislinien sind hierbei die Bilder der auf der Sphäre $S^2 \in \mathbb{R}^3$ gelegenen Kreislinie unter der stereotypischen Projektion $\hat{\Phi} : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Beweis. ¹ Die Gruppe \mathcal{M} der Möbiustransformationen wird von der Translation $z \mapsto z + b$, Drehstreckung $z \mapsto s \cdot z$ (mit $a \neq 0$) und der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ erzeugt², also genügt es, die Bilder von Kreisen und Geraden unter diesen speziellen Transformationen zu betrachten. Nur der Fall der Inversion ist nicht trivial. Geraden und Kreise werden durch Gleichungen der folgenden Form beschrieben:

$$\alpha z \bar{z} \gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + \delta = 0$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ und $\gamma \bar{\gamma} > \alpha \delta$ (Nachrechnen!). Mittels $z \mapsto \frac{1}{z} = \omega$ entsteht

$$0 = \omega \bar{\omega} \left(\alpha \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\bar{\omega}} + \gamma \frac{1}{\omega} + \bar{\gamma} \frac{1}{\bar{\omega}} + \delta \right)$$

$$= \alpha + \gamma \bar{\omega} + \bar{\gamma} \omega + \delta \omega \bar{\omega},$$

also eine Gleichung desselben Typs. (vgl. Beispiel 17.3). □

Jetzt wollen wir die Automorphismen der Einheitskreisscheibe bestimmen.

Satz 17.5. Schwarz'sche Lemma³ Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^4$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D} \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1; \quad (17.5)$$

Gibt es $0 \neq \omega \in \mathbb{D}$ mit

$$|f(\omega)| = |\omega| \quad (17.6)$$

oder gilt

$$|f'(0)| = 1, \quad (17.7)$$

so ist $f(z) = e^{i\lambda} z$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Drehung).

¹Einen Teil wieder als Übungsaufgabe

²Dieser Teil entspricht Übungsaufgabe 2.2. und ist hier als Ergänzung des Kapitels (Kapitel Ergänzung 17) zu finden.

³HERMAN AMANDUS SCHWARZ entwickelte diese „Lemma“ 1869

⁴mit der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Beweis. Sei

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

so ist g holomorph (klar). Für $|z| \leq r < 1$ gilt nach dem Maximumsprinzip (Satz 7.6)

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}$$

(folgt aus $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$) und über $r \rightarrow 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$ bzw. $|f(z)| \leq |z|$ in \mathbb{D} .

$$|f(z)| \leq |z|,$$

da $|g(z)| \leq 1$. insbesondere ist

$$|g(0)| = |f'(0)| \leq 1.$$

Besteht ferner eine der Gleichungen $|f'(0)| = 1$ oder $|f(\omega)| = |\omega| \neq 0$, so ergibt sich $|g(0)| = 1$ oder $|g(\omega)| = 1$, womit g nach dem Maximumsprinzip eine Konstante vom Betrag eins ist. \square

30.04.09

Bemerkung. Um die Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe zu bestimmen, betrachten wir:

$$\mathcal{M} \ni f_\omega : \mapsto \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z}$$

für $\omega \in \mathbb{D}$ (insbesondere $f_0 = \text{id}$). Diese ist ein Automorphismus von \mathbb{D} , denn für $z\bar{z} = 1$ ist:

$$\begin{aligned} f_\omega(z)\overline{f_\omega(z)} &= \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{\omega}}{1 - \omega\bar{z}} \\ &= \frac{z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \omega\bar{\omega}}{1 - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \omega\bar{\omega}z\bar{z}} = 1, \end{aligned}$$

also ist $f_\omega(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Ferner sei $f_\omega(\omega) = 0$, so dass also nach dem Satz 7.5 von der Gebietstreue $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ (und nicht $= \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$). Also ist $f_\omega \in \text{Aut } \mathbb{D}$. Bis auf Drehung ist tatsächlich jeder \mathbb{D} -Automorphismus von dieser Form:

Satz 17.6. Die Automorphismengruppe $\text{Aut } \mathbb{D}$ der Einheitskreisscheibe besteht genau aus den Möbiustransformationen der Form

$$f(z) = e^{i\lambda} \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z} \tag{17.8}$$

mit $\lambda \in [0, 2\pi)$, $\omega \in \mathbb{D}$.

17. Möbiustransformationen

Beweis. Die Automorphismen von \mathbb{D} , die den Nullpunkt als Fixpunkt besitzen, bilden eine Untergruppe Γ_0 von $\text{Aut } \mathbb{D}$. Jede Drehung

$$\Gamma_\lambda : z \mapsto e^{i\lambda}z$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gehört zu Γ_0 . Ist $f \in \Gamma_0$, so ist auch sein Inverses $f^{-1} \in \Gamma_0$ und nach dem Schwarz'schen Lemma (Satz 17.5) gelten

$$|f(z)| \leq |z|,$$

sowie

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$$

für $z \in \mathbb{D}$. Also stets $|f(z)| = |z|$ und somit $f = \Gamma_\lambda$ für ein $\lambda \in [0, 2\pi)$, bzw. $\Gamma_0 = \{\Gamma_\lambda \mid \lambda \in [0, 2\pi)\}$. Sei nun $f \in \text{Aut } \mathbb{D}$. Mit $\omega := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ gilt

$$f \circ f_\omega^{-1} = f(\omega) = 0$$

(mit f_ω wie oben), das heißt $f \circ f_\omega^{-1} \in \Gamma_0$ und somit folgt nach dem Gezeigten:

$$f \circ f_\omega^{-1} = \Gamma_\lambda$$

für ein $\lambda \in [0, 2\pi)$ bzw.

$$f(z) = \Gamma_\lambda \circ f_\omega(z) = e^{i\lambda} \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z}.$$

□

Ergänzung

Die folgenden Abbildungen $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir als elementargeometrische Abbildungen:

- Translation $z \mapsto a + z$ mit $a \in \mathbb{C}$
- Rotation $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$

(a) Zeigen Sie, dass sich jede Möbiustransformation als geeignete Hintereinanderausführung elementargeometrischer Abbildungen schreiben lässt.

(b) Wieviele elementargeometrische Abbildungen braucht man mindestens um eine beliebige Möbiustransformation zu generieren?

Bemerkung. Einen aus a, b, c, d kann ich normieren:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

(a)

1. Fall: O.B.d.A. sei $c = 1$:

$$z \mapsto z + d \mapsto \frac{1}{z + d} \mapsto (b - ad) \cdot \frac{1}{z + d} \mapsto (b - ad) \cdot \frac{1}{z + d} + a = \frac{az + b}{z + d}$$

2. Fall: $c = 0$

$$z \mapsto \frac{a}{d}z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{az + b}{d}$$

(b) Für den Fall $c \neq 0$ braucht man 4 Transformationen, denn

1. Es muss eine Inversion vorkommen, sonst ist

$$f(z) \in \text{Aff} := \{az + b \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$$

2. Für die 3 Parameter a, b, d braucht man je eine Translation oder Rotation.

18. Normale Familien

Bemerkung. Es ist ein unglaublich starkes Gebiet, allerdings muss man es schon mögen.

Definition. Familie Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann heißt eine unendliche Menge \mathcal{F} von $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine in Ω **gleichmäßig beschränkte Familie**, wenn ein M existiert, sodass

$$|f(z)| \leq M$$

für alle $z \in \Omega$ und alle $f \in \mathcal{F}$.

Satz 18.1. Satz von Montell, 1907

*Es sei \mathcal{F} eine gleichmäßig beschränkte Familie holomorpher Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann besitzt jede Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{F}$ eine in U **kompakt konvergente**¹ Teilfolge.*

Bemerkung. Der Satz erinnert ein wenig an den Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (Analysis I):

Beweis. (vgl. Satz von ARZELA ASCOLI in der Funktionalanalysis):

Sei $(f_n)_n$ eine Folge in \mathcal{F} . Wir zeigen zuerst:

Behauptung 1: Für jede kompakte Menge $K \subset U$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_n(z) - f_n(\omega)| < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ $z, \omega \in K$ mit $|z - \omega| < \delta$.

Bemerkung. Die f_n sind also **gleichgradig** stetig auf jedem Kompaktum, insbesondere ist jedes f_n glm. stetig

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sowie $z_n, \omega_n \in K$ mit

$$|f_n(z_n) - f_n(\omega_n)| \geq \varepsilon$$

und $|z_n - \omega_n| < \delta$. Verkleinern von δ liefert Folgen von Punkten $z_{n_k}, \omega_{n_k} \in K$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{n_k} - \omega_{n_k}| = 0$$

und

$$|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(\omega_{n_k})| \geq \varepsilon.$$

¹lokal gleichmäßig konvergent auf jedem Kompaktum

Wegen der Kompaktheit von K existiert nach dem **Satz von BOLZANO WEIERSTRASS** eine Teilfolge $(z_{n_{k_m}})$ und $(\omega_{n_{k_m}})$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_{n_{k_m}} = z_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{n_{k_m}}.$$

Ist $\varrho > 0$ so, dass U die Kreisscheibe $D_{3\varrho}(z_0)$ enthält, sowie $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_{n_{k_m}} - z_0| < \varrho$$

und

$$|\omega_{n_{k_m}} - z_0| \geq \varrho$$

für alle $m \geq m_0$. Ferner gelte (nach Annahme über \mathcal{F})

$$|f(z)| \leq M$$

für alle $z \in U, f \in \mathcal{F}$. Dann folgt mit der Cauchy'schen Integralformel (5.2) von Satz 5.2

$$\begin{aligned} |f_{n_{k_m}}(z_{n_{k_m}}) - f_{n_{k_m}}(\omega_{n_{k_m}})| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int f_{n_{k_m}}(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z_{n_{k_m}}} - \frac{1}{\zeta - \omega_{n_{k_m}}} \right) d\zeta \right| \\ |\zeta - z_0| &= 2\varrho \end{aligned}$$

Wir schätzen trivial ab und erhalten

$$\leq \frac{4\pi\varrho}{2\pi} M \cdot \frac{|z_{n_{k_m}} - \omega_{n_{k_m}}|}{\min |\zeta - z_{n_{k_m}}| \cdot |\zeta - \omega_{n_{k_m}}|}$$

nach Konstruktion erhalten wir

$$\frac{2M}{\varrho} |z_{n_{k_m}} - \omega_{n_{k_m}}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Im Widerspruch zu

$$|f_{n_{k_m}}(z_{n_{k_m}}) - f_{n_{k_m}}(\omega_{n_{k_m}})| \geq \varepsilon.$$

Dies beweist Behauptung 1!

Behauptung 2: Es existiert eine Teilfolge von $(f_n)_n$, die auf einer abzählbaren und dichten Teilmenge V und U konvergiert.

Zum Nachweis setzen wir

$$V := \{z \in U \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q}\} (= U \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})).$$

Damit ist v abzählbar und dicht in U (klar) und wir dürfen also schreiben $V = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt nach Voraussetzung:

18. Normale Familien

Die Zahlenfolge $(f_n(z_1))_n$ ist beschränkt. Sei $(f_{1n}(z_1))_{1n}$ eine konvergente Teilfolge (existiert Dank Bolzano-Weierstraß).

Die Zahlenfolge $(f_{1n}(z_2))_{1n}$ ist beschränkt. Sei $(f_{2n}(z_2))_{2n}$ eine konvergente Teilfolge, (existiert nach Bolzano-Weierstraß)²

Sukzessive ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_{kn})_{kn}$ von $(f_n)_n$, so dass die Zahlenfolge $(f_{kn}(z_j))_{n \in \mathbb{N}}$ für $j = 1, \dots, k$ konvergiert. Sei nun $g_n := f_m$, so ist für $n \geq m$ nun $(g_n)_n$ eine Teilfolge von $(f_{mn})_{mn}$ und folglich ist $(g_n(z_j))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent für $j = 1, \dots, m$. Betrachten wir das ganze im Diagonalverfahren:

$$\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots \\ f_{31} & f_{23} & f_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Da hier $m \in \mathbb{N}$ beliebig, ergibt sich die Konvergenz von $(g_n(z_j))$ für alle $j \in \mathbb{N}$ bzw. $z_j \in V$. Das liefert Behauptung 2!

04.05.09

Behauptung 3: Die Funktionenfolge (g_n) konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset U^3$. **Denn:** Da die g_n eine Teilfolge von (f_n) bilden, gilt nach Behauptung 1:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|g_n(z) - g_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}, z, \omega \in K \text{ mit } |z - \omega| < \delta \quad (18.1)$$

Auf Grund der Kompaktheit von K gibt es endlich viele Punkte $z_1, z_2, \dots, z_N \in V \cap K$, so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N D_j(z_j), \quad D_j(z_j) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| < \delta\}.$$

Nach Behauptung 2 existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $m, n \geq n_0$ gilt:

$$|g_n(z_j) - g_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall j=1, \dots, N \quad (18.2)$$

Sei nun $z \in K$ beliebig, so existiert ein z_j ($1 \leq j \leq N$) mit $|z - z_j| < \delta$. Dann folgt für $m, n \geq n_0$ nach (18.1) und (18.2)

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq \underbrace{|g_n(z) - g_n(z_j)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ (18.1)}} + \underbrace{|g_n(z_j) - g_m(z_j)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ (18.2)}} + \underbrace{|g_m(z_j) - g_m(z)|}_{\frac{\varepsilon}{3} \text{ (18.1)}} < \varepsilon;$$

dabei hängt n_0 nicht von z sondern nur von K ab. Mit dem Cauchy-Kriterium für Funktionenfolgen ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz von $(g_n)_n$ auf K (Behauptung 3).

²nebenbei ist $(f_{2n}(z_1))$ konvergent

³Aus Behauptung 1 wissen wir bereits: g_n ($:= f_{nn}$) konvergiert punktweise auf einer abzählbaren dichten Teilmenge

Da K eine beliebige kompakte Teilmenge von U war, ergibt sich die Aussage. \square

Bemerkung. Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt eine unendliche Teilmenge \mathcal{F} von Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **normale Familie**, wenn jede Folge (f_n) in \mathcal{F} eine in U kompakte Teilfolge besitzt.

Damit formuliert sich der Satz 18.1 von Montel wie folgt:

Satz. *Jede gleichmäßig beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist normal.*

Der nächste Satz zeigt, dass im Falle gleichmäßiger Beschränktheit bereits die Konvergenz auf einer „kleinen Menge“ die kompakte Konvergenz nach sich zieht.

Satz 18.2. Satz von Vitali:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine in Ω gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Gibt es eine Folge paarweise verschiedener Punkte $z_j \in \Omega$ mit Häufungspunkten in Ω , so dass $(f_n(z_j))_n$ für alle $z_j \in \mathbb{N}$ konvergiert, dann konvergiert die Folge der $f_n(z)$ bereits kompakt.

Beweis. Sei $z_0 \in \Omega$ fest gewählt und die Folge $(f_n(z_0))_n$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(f_n(z_0))_n$ einen Häufungspunkt, tatsächlich zeigen wir zuerst, dass für je zwei solche Häufungspunkte ω_1, ω_2 Gleichheit besteht (also $f_n(z_0)$ sogar konvergent ist):

Seien (f_{1n}) und (f_{2n}) Teilfolgen von (f_n) mit (Achtung: nicht alle j sind hier die gleichen! Sieh handgeschriebenes Skript)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{jn}(z_0) = \omega_j, \quad j = 1, 2.$$

Nach Satz 18.1 von Montel existieren Teilfolgen (g_{jn}) von (f_{jn}) , wobei $j = 1, 2$, welche in Ω kompakt konvergieren. Mit $g_j := \lim_{n \rightarrow \infty} g_{jn}$ ergibt sich nach Voraussetzung

$$g_1(z_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(z_j) = g_2(z_j) \quad j \in \mathbb{N}.$$

Da die Punkte z_j sich in Ω häufen, folgt mit dem Identitätssatz 7.1 bereits $g_1 = g_2$ und insbesondere

$$\omega_1 = g_1(z_0) = g_2(z_0) = \omega_2.$$

Also konvergiert $(f_n)_n$ auf Ω punktweise; die kompakte Konvergenz der f_n folgt wie in Beweis des Satzes 18.1⁴. \square

Die Voraussetzungen der Sätze von Montel und Vitali über die gleichmäßige Beschränktheit sollen nun etwas abgeschwächt werden. Hierzu ein technischer Satz:

Satz 18.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so existiert eine Folge von Gebieten Ω_n mit den Eigenschaften:*

1. $\bar{\Omega}_n$ ist kompakt.
2. $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$,

⁴also über die gleichmäßige Beschränktheit

18. Normale Familien

$$3. \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega^5$$

eine solche Gebietsfolge $(\Omega_n)_n$ nennt man eine **Ausschöpfung** von Ω .

Beweis. Wir definieren für $z \in \Omega$

$$\varepsilon(z) := \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \right\}$$

(wobei $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ das Infimum aller Abstände von z zum Rand von Ω ist), dann gilt $D_{2\varepsilon(z)}(z) \subset \Omega$ stets. Die Folge der Ω_n ergibt sich induktiv wie folgt:

Sei $z_1 \in \Omega$ und $\Omega_1 := D_{2\varepsilon(z_1)}(z_1)$ ($\subset \Omega$ klar); sind $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ definiert, so sei

$$\Omega_{n+1} := \bigcup_{z \in \Omega_n} D_{\varepsilon(z)}(z)$$

Dann gelten sicherlich 1. und 2..

Der Nachweis von 3. folgt mit Hilfe eines Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z \in \Omega$ beliebig, Ist $z \notin \Omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so betrachte man eine Folge von Punkten

$$\omega_n \in \operatorname{Tr}(\gamma) \cap \partial\Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(existent?), welche nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge besitzt und zeige $\omega_m \in \Omega_m$ für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ (dieser Beweisschritt als Übungsaufgabe). Dieser Widerspruch liefert die Behauptung \square

Damit gelingt uns nun

Satz 18.4. Satz von Vitali – allg. Version:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine in Ω **lokal gleichmäßig beschränkte Folge** holomorpher Funktionen, das heißt zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ gibt es ein M mit $|f_n(z)| \leq M$ für alle $z \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Gibt es paarweise verschiedene Punkte $z_j \in \Omega$ mit Häufungspunkt in Ω , sodass $(f_n(z_j))_n$ für alle $j \in \mathbb{N}$ konvergiert, dann konvergiert die $f_n(z)$ bereits kompakt in Ω .

Beweis. Sei $(\Omega_m)_m$ eine nach Satz 18.3 existente Ausschöpfung von Ω . Zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt es ein m_0 mit $K \subset \Omega_m$ für alle $m \geq m_0$. Mit diesem speziellen Satz 18.2 von Vitali ergibt sich die kompakte Konvergenz der f_n in jedem solchen Ω_m bzw. gleichmäßige Konvergenz auf K . \square

Satz 18.5. Satz von Montel – allg. Version:

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_n$ eine in Ω **lokal gleichmäßig beschränkte Folge** holomorpher Funktionen. Dann existiert eine in U **kompakt konvergente Teilfolge** von $(f_n)_n$.

⁵ein Beispiel: $\mathbb{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n(\zeta)$ für jedes $\zeta \in \mathbb{C}$

Korollar 18.6. *Jede auf einer offenen Menge lokal gleichmäßig beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist **normal**.*

Beweis. (zu Satz 18.5 und Korollar 18.6⁶)

Ist U ein Gebiet, so sei U_1 offen und mit $\bar{U}_1 \subset U$ gewählt, sowie eine nach dem speziellen Satz 18.1 von Montel existente, auf U_1 kompakt konvergente Teilfolge (f_{1n}) von (f_n) . Dann folgt mit dem allgemeinen Satz 18.4 von VITALI die kompakte Konvergenz der f_{1n} auf U . Ist U nicht zusammenhängend, so ergibt besitzt U abzählbar viele Zusammenhangskomponenten V_j . Analog zum Beweis von Satz 18.1 konstruiert man eine Teilfolge $(f_{kn})_{kn}$ die auf $V_1 \cup \dots \cup V_k$ kompakt konvergiert. Die Diagonalfolge $(f_{mn})_{mn}$ liefert dann die gewünschte kompakte Konvergenz auf

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j.$$

□

⁶Korollar 18.6 ist eine Umformulierung von Satz 18.5

19. Der Riemann'sche Abbildungssatz

Nun sollen einfach zusammenhängende Gebiete in $\hat{\mathbb{C}}$ unter biholomorpher (**konformer**) Äquivalenz klassifiziert werden.

Definition. Dabei heißt ein Gebiet $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ **einfach Zusammenhängend**, wenn entweder $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ ist, oder ein $f \in \text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$ ($= \mathcal{M}$ mit Satz 17.1) mit $\infty \notin f(\Omega)$ gilt (was gleichbedeutend mit dem einfachen Zusammenhang von $f(\Omega)$ ist).

Beispiel 19.1. $\hat{\mathbb{C}}$ ist zu keinem echten Teilgebiet biholomorph äquivalent, **denn:** für eine biholomorphe Abbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega$ muss die offene Menge $\Omega = f(\hat{\mathbb{C}})$ kompakt sein, was nur für $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ erfüllt ist. $\hat{\mathbb{C}}$ ist kompakt nach Satz 16.1.

Beispiel 19.2. Eine „**punktierte Sphäre**“ $\Omega = \hat{\Omega} \setminus \{p\}$ ist biholomorph äquivalent zu \mathbb{C} , **denn:** jede Möbiustransformation f mit $f(p) = \infty$ bildet Ω biholomorph auf \mathbb{C} ab.

Beispiel 19.3. \mathbb{C} ist zu keinem beschränkten Gebiet Ω biholomorph äquivalent (insbesondere nicht zur Einheitskreisscheibe \mathbb{D}), **denn:** jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \Omega$ ist nach dem Satz 5.4 von LIOUVILLE konstant.

Es gilt der erstaunliche und tiefe Satz:

Satz 19.1. Riemann'sche Abbildungssatz (1851):

Sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Komplement mindestens zwei Punkte enthält oder $f \in \text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \notin f(\Omega)$ existiert und einfach zusammenhängend ist. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Hierbei kann man für einen Punkt $z_0 \in \Omega$, $z_0 \neq \infty$ noch $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$ (positiv reell!!) fordern, wodurch f eindeutig bestimmt ist.

07.05.09

Bemerkung. Damit existieren also insgesamt (nur) genau drei Klassen biholomorph äquivalenter einfach zusammenhängender Gebiete in $\hat{\mathbb{C}}$, nämlich:

1. die Sphäre $\hat{\mathbb{C}}$
2. die Ebene \mathbb{C} (\leftarrow Bsp 19.1 bis 19.3)
3. und die Einheitskreisscheibe \mathbb{D}

Beispiel 19.4. Skizzen von $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, wobei $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ (siehe Bsp 16.1) und $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^-$, $z \mapsto \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

Satz 19.1 findet man in Riemanns Dissertation von 1851; den ersten stichhaltigen Beweis gaben FEJÉR und RIESZ 1922; jetzt eine Variante nach CARATHEODORY um 1928.

Beweis. Eindeutigkeit: Sind f und g zwei solche Abbildungen, so ist $h = f \circ g^{-1}$ ein Automorphismus von \mathbb{D} mit

$$h(0) = f(g^{-1}(0)) = f(z_0) = 0$$

und

$$h'(0) = \underbrace{(g^{-1})'(0)}_{>0} \underbrace{f'(g^{-1}(0))}_{>0} > 0,$$

also ist $h = \text{id}$ bzw. $f = g$ Fußnote¹.

Existenzbeweis: wir konstruieren

1. eine biholomorphe Abbildung $f_1 : \Omega \rightarrow \Omega^*$, wobei $\Omega^* \subset \mathbb{D}$ ein Gebiet ist, sodass $f_1(z_0) = 0$, $f_1'(z_0) > 0$ gilt:

Sei also $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend, $a, b \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ und $\infty \neq z_0 \in \Omega$. Wir wählen einen Automorphismus² $h_1 \in \underbrace{\text{Aut } \hat{\mathbb{C}}}_{=\mathcal{M}}$ mit $h_1(a) = 0$ und

$h_1(b) = \infty$. Dann ist nach dem Satz von der Gebietstreue $\Omega_1 := h_1(\Omega)$ ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, insbesondere existiert auf Ω_1 nach Korollar 10.5 ein holomorpher Zweig g der Quadratwurzel. Ω_1 wird durch g also biholomorph auf ein Gebiet $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^*$ abgebildet.

(Hier fehlt ein Bild von der Abbildung von Ω nach Ω_1 und weiter nach Ω_2 .)

Dabei liegt Ω_2 im Äußeren einer passenden Kreisscheibe um den Nullpunkt: Mit $\omega \in \Omega_2$ kann nicht auch $-\omega \in \Omega_2$ gelten, sonst wäre g nicht bijektiv³. Also impliziert $\overline{D_\varepsilon(+\omega_0)} \subset \Omega_2$ mit geeigneten $\omega_0 \in \Omega_2$ und $\varepsilon > 0$, dass $\overline{D_\varepsilon(-\omega_0)} \cap \Omega_2 = \emptyset$. Jetzt wählen wir ein $h_2 \in \text{Aut } \hat{\mathbb{C}} (= \mathcal{M})$, welches $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_\varepsilon(-\omega_0)}$ auf \mathbb{D} abbildet. Eine solche Möbiustransformationsabbildung h_2 existiert nach Satz 17.4⁴. Insbesondere folgt

$$\Omega_3 := h_2(\Omega_2) \subset \mathbb{D}.$$

Mit einem Automorphismus $k \in \text{Aut } \mathbb{D}$ können wir nach Satz 17.6 dabei erzielen, das für

$$f_1 := k \circ h_2 \circ g \circ h_1 : \Omega \rightarrow \Omega^* = k(\Omega_3) \subset \mathbb{D}$$

sowohl $f_1(z_0) = 0$ und $f_1'(z_0) > 0$ gelten (dank der zwei Freiheitsgrade in der Möbiustransformation $\in \text{Aut } \mathbb{D}$, Satz 17.6). Der Konstruktionsschritt 1. ist abgeschlossen, insbesondere ist $0 \in \Omega^*$.

2. Im jetzigen Schritt suchen wir unter **allen** injektiven Abbildungen $f : \Omega^* \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$ einen Kandidaten für eine Abbildung auf \mathbb{D} . Hierbei wählen wir $f'(0)$ (als „Vergrößerungsfaktor“ von f um den Nullpunkt) maximal:

Die Menge von Funktionen

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega^* \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ ist holomorph und injektiv mit } f(0) = 0 \text{ und } f'(0) > 0\}$$

¹Man erinnere sich hierfür an $\Gamma_0 < \text{Aut } \mathbb{D}$ im Beweis von Satz 17.6.

²eine Möbiustransformation

³Für die Umkehrung wäre sonst $g^{-1}(\omega) = \omega^2 = g^{-1}(-\omega)$.

⁴denn Kreise werden auf Kreise abgebildet

19. Der Riemann'sche Abbildungssatz

ist durch 1 (wegen der Einheitskreisscheibe) beschränkt, (das heißt $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \Omega^*$, $f \in \mathcal{F}$) und also eine normale Familie; dabei ist \mathcal{F} nicht leer (denn etwa $f = \text{id} \in \mathcal{F}$). Sei

$$\alpha := \sup\{f'(0) \mid f \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

so gilt: $\alpha \geq 1$ (mit der Ableitung von $\text{id} \in \mathcal{F}$). Nach Konstruktion existiert eine Folge $(f_n)_n$ in \mathcal{F} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \alpha$. Nach dem Satz von MONTELL (Satz 18.5) enthält $(f_n)_n$ eine **lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge**, welche wir wieder mit $(f_n)_n$ bezeichnen und die den Grenzwert f_0 besitzt. Nach dem Satz 6.3 von WEIERSTRASS gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = f'_0(0) = \alpha$$

und insbesondere $\alpha < \infty$ (wegen Konvergenz). Wegen $\alpha \neq 0$ ist f_0 nicht konstant und wegen

$$|f_n(z)| < 1$$

folgt

$$|f_0(z)| \leq 1, \quad z \in \Omega^*;$$

mit dem Satz 7.5 von der Gebietstreue ist $f_0(\Omega^*) \subset \mathbb{D}$ ein Gebiet, also sogar $|f_0(z)| < 1$. Ferner ist f_0 sogar injektiv, was sich leicht aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der f_n gegen f_0 ergibt (ähnlich dem Satz 12.7 von HURWITZ. → Übungsaufgabe 3.1). Also gilt $f_0 \in \mathcal{F}$. ($f_0(0) = 0$ gilt trivialerweise). Um nun $f_0(\Omega^*) = \mathbb{D}$ zu zeigen, bedienen wir uns folgender Umkehrung des Schwarz'schen Lemmas 17.5, dem Satz 19.2 auf Seite 159. Damit beenden wir den Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes wie folgt: Ist $f_0(\Omega^*) = \mathbb{D}$ für die in Schritt 2. gefundenen Funktion f_0 , so folgt mit der in Schritt 1. konstruierten Funktion $f_1 : \Omega \rightarrow \Omega^*$ durch Komposition

$$f := f_0 \circ f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{D};$$

biholomorph mit

$$f(z_0) = f_0(f_1(z_0)) = f_0(0) = 0$$

wird

$$f'(z_0) = f'_0(f_1(z_0)) \cdot f'_1(z_0) > 0$$

(faktorweise). Ist hingegen $f_0(\Omega^*) \neq \mathbb{D}$, sowie $f = g \circ f_0$ mit g aus Satz 19.2 (siehe Seite 159) eine Funktion aus \mathcal{F} mit

$$f(0) = g(\underbrace{f_0(0)}_{=0}) = g(0) = 0$$

und

$$f'(0) = g'(\underbrace{f_0(0)}_{=0}) \underbrace{f_0'(0)}_{=\alpha} = g'(0)\alpha > \alpha$$

Im Widerspruch zur Definition von α .

□

Satz 19.2. Sei Ω^* ein einfach zusammenhängendes echtes Teilgebiet von \mathbb{D} mit $0 \in \Omega^*$. Dann existiert eine injektive holomorphe Funktion $g : \Omega^* \rightarrow \mathbb{D}$ mit $g(0) = 0$ und $g'(0) > 1$.

Beweis. Sei $\omega \in \mathbb{D} \setminus \Omega^*$. Der \mathbb{D} -Automorphismus (siehe Satz 17.6) ist

$$z \mapsto f_1(z) = \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z}$$

(Bild von ebendieser Abbildung)

schickt ω auf den Nullpunkt und den Nullpunkt auf $-\omega$. Dabei ist $f_1(\Omega^*)$ einfach zusammenhängend und $0 \in \mathbb{D} \setminus \{f_1(\Omega^*)\}$; damit existiert auf $f_1(\Omega^*)$ nach Korollar 10.5 ein holomorpher Zweig h der Quadratwurzel, der zudem injektiv auf $f_1(\Omega^*)$ ist und $h(f_1(\Omega^*)) \subset \mathbb{D}$ (klar). Sei

$$z \mapsto f_2(z) = e^{i\lambda} \frac{z - d}{1 - \bar{d}z},$$

wobei $d := h(-\omega) \in \mathbb{D}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ später bestimmt wird. Damit ist $f_2 \in \text{Aut } \mathbb{D}$ (wieder nach Satz 17.6). Mit

$$g := f_2 \circ h \circ f_1 : \Omega^* \rightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{D}$$

ist

$$g(0) = f_2(h(-\omega)) = f_2(d) = 0.$$

Nun sei $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $g'(0) > 0$. Es verbleibt $g'(0) > 1$ zu zeigen: Mit

$$H = z^2$$

ist

$$G := f_1^{-1} \circ H \circ f_2^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

holomorph und auf $g(\Omega^*)$ die Umkehrung von g . Es ist $G(0) = 0$ und offensichtlich ist G keine Drehung; nach dem Schwarz'schen Lemma (Satz 17.5) gilt

$$|G'(0)| < 1$$

und also

$$g'(0) = \frac{1}{G'(0)} > 1$$

□

Bemerkung. Hier endet der Teil, der für das Staatsexamen relevant ist. Nichtsdestoweniger ist der kommende Teil nicht minder Interessant.

14.05.09

Bemerkung. Der Riemann'sche Abbildungssatz und Analoga für Riemann'sche Flächen besitzen viele wichtige Anwendungen; mehr dazu kann man in „Uniformisierung“ von ROLF NEVANLINNA (Springer 1953) finden.

Wir berichten noch kurz über die interessanten Werkzeuge, die wir im Beweis kennen gelernt haben:

Definition. schlicht:

Sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, dann heißt eine holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ **schlicht**, wenn sie injektiv ist⁵; insbesondere gilt dann $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ nach Satz 16.2

Zur Untersuchung der auf der Einheitskreisscheibe erklärten schlichten Funktionen betrachtet man die Menge:

$$\mathcal{S} := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \text{ schlicht mit } f(0) = 0, f'(0) = 1\}; \quad (19.1)$$

die **Normierung** ist dabei keine große Einschränkung. Jedes $f \in \mathcal{S}$ besitzt insbesondere eine auf \mathbb{D} konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \quad (19.2)$$

BIEBERBACH⁶ bewies 1916, dass stets $|a_2| \leq 2$ gilt und vermutete darüberhinaus $|a_n| \leq n$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Diese **Bieberbach'sche Vermutung** wurde 1985 von DE BRANGES⁷ bewiesen (siehe Kapitel 15 [??])

Bemerkung. In dieser (wie auch in vielerlei anderer) Hinsicht ist also die **Koebe-Funktion** extremal:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n. \quad \left(= z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)$$

Zum Abschluss des Kapitels zeigen wir

Satz 19.3. Sei $k \in \mathcal{S}$ und $k(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, \frac{1}{4})$

Bemerkung. Tatsächlich besagt der $\frac{1}{4}$ -Satz von KOEBE-BIEBERBACH, dass für $f \in \mathcal{S}$ das Gebiet $f(\mathbb{D})$ stets die offene Kreisscheibe von Radius $\frac{1}{4}$ um den Nullpunkt enthält.

Beweis. Die Cayley-Abbildung

$$z \mapsto h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$$

⁵bzw. eine biholomorphe oder auch **konforme** Abbildung f von Ω auf $f(\Omega)$

⁶LUDWIG BIEBERBACH 1884-1982

⁷LOUIS DE BRANGES DE BOURCIA Geboren 1932

(vergleich auch mit Beispiel 17.1) bildet \mathbb{D} schlicht auf die obere Halbebene \mathbb{H} ab, ihr negatives Quadrat

$$p(z) = -k(z)^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

bildet \mathbb{D} schlicht auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ab (injektiv auf Grund der Injektivität von k und der Existenz der holomorphen Quadratwurzel). Also folgt die Aussage des Satzes über

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}p(z) - \frac{1}{4}.$$

□

A. Approximation und Universalität

Bemerkung. Dies ist die Vorlesung vom 22.12.2008

Der **Weierstraß'sche Approximationssatz** besagt, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann¹.

Gilt selbiges auch für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}$? Was ist das komplexe analytische Analogon des Weierstraß'schen Approximationssatz?

Beispiel. Für welche kompakte Mengen K ist beispielsweise die meromorphe Funktion $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ polynomiell approximierbar? Für die Einheitskreislinie \mathcal{C} gilt bekanntlich

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \neq 0 = \int_{\mathcal{C}} p(z) dz$$

für jedes Polynom p (denn jedes solche p ist holomorph und also der Cauchy'sche Integralsatz anwendbar). Eine notwendige Bedingung für polynomielle Approximierbarkeit ist also, dass das Komplement $\mathbb{C} \setminus K$ der kompakten Menge K zusammenhängend ist ($\Leftrightarrow K$ ist einfach zusammenhängend).

Tatsächlich gilt:

Satz A.1. Approximationssatz von Runge²:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sowie $K \subset \Omega$ kompakt. Dann kann f auf K gleichmäßig durch rationale Funktionen approximiert werden, deren Pole in $\mathbb{C} \setminus K$ liegen; ist $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend, so kann f auf K gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.

Der folgende Beweis basiert auf dem Cauchy'schen Integralsatz für ein Quadrat:

Lemma A.2. Mit dem obigen Bezeichnungen gibt es endlich viele Liniensegmente $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ in $\Omega \setminus K$ mit

$$f(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in K \quad (\text{A.1})$$

Beweis. Sei $d = c \cdot \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, wobei $0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ konstant). Es bezeichne $Q = \{Q_1, \dots, Q_M\}$ die (nach Heine-Borel) endliche Menge von Quadraten einer achsenparallelen Pflasterung von \mathbb{C} durch Quadrate der Kantenlänge d , die nicht leeren Durchschnitt mit K haben. Ferner seien $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ die positiv orientierten Kanten der Quadrate in Q , welche nicht zu zwei benachbarten Quadraten

¹Ana IV

²RUNGE, CARL VON 1856-1927

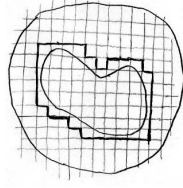


Abbildung A.1.: Umrandung des Weges mit Liniensegmenten (Beweis zu Lemma A.2)

in Q gehören. Auf Grund der Wahl von c ist stets $\gamma_n \subset \Omega$ und $\gamma_n \cap K = \emptyset$. Für jedes $z \in K$, das nicht auf dem Rand eines Quadrates in Q liegt, gibt es genau ein $Q_j \in Q$ und mit dem Cauchy'schen Integralsatz 9.2 folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{für } j = m \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und damit

$$f(z) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

sind Q_m und \tilde{Q}_m benachbart in Q , so verschwindet das Integral über ihre gemeinsame Seite (auf Grund der entgegengesetzten Orientierung), was auf die Formel (A.1) von Lemma A.2 führt, falls $z \in K$ nicht auf dem Rand eines Quadrates in Q liegt. Wegen $\gamma_n \subset \mathbb{C} \setminus K$ mit der Stetigkeit selbiger auch für beliebige $z \in K$. \square

Lemma A.3. *Mit den Bezeichnungen von oben gibt es für jedes Liniensegment $\gamma \subset \Omega \setminus K$ eine Folge rationaler Funktionen mit Polstellen auf γ , welche das Integral*

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{A.2}$$

auf K gleichmäßig approximieren.

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$ eine Parametrisierung von γ , dann gilt

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt.$$

Wegen $\gamma \cap K = \emptyset$ ist der Integrand $F(z, t) = \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}$ rechts stetig auf $K \times [0, 1]$, und mit der Kompaktheit von K gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\max_{z \in K} |F(z, t_1) - F(z, t_2)| < \varepsilon \quad \text{für } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Mit demselben Argument wie im Beweis von Satz 6.5 folgt, dass die Riemann-Summen des Integrals $\int_0^1 F(z, t) dt$ jenes auf K gleichmäßig approximieren. Dies beweist Lemma A.3. \square

A. Approximation und Universalität

Bemerkung. Aus der Kombination von Lemma A.2 und A.3 folgt bereits die erste Aussage des **Runge'schen Satzes** über Approximation durch rationale Funktionen.

Für die polynomielle Approximierbarkeit sind noch die endlich viele „Pole zu verschieben“; hierzu genügt:

Lemma A.4. *Es sei $\mathbb{C}K$ zusammenhängend und $z_0 \notin K$. Dann kann die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ auf K gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.*

Beweis. Sei z_1 ein Punkt außerhalb einer großen offenen Kreisscheibe um den Nullpunkt, welche K enthalte. Dann

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{z_1^{n+1}} z^n,$$

wobei die geometrische Reihe gleichmäßig für $z \in K$ konvergiert. Deren Partialsummen sind Polynome in z und liefern eine gleichmäßige Approximation von $\frac{1}{z-z_1}$ auf K . Ähnlich verfährt man für den allgemeinen Fall $\frac{1}{(z-z_1)^k}$.

Es genügt also zu zeigen, dass $\frac{1}{z-z_0}$ auf K gleichmäßig durch Polynome in $\frac{1}{z-z_1}$ approximiert werden kann: Auf Grund des Zusammenhangs von $\mathbb{C}K$ gibt es eine parametrisierte Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}K$, $t \mapsto \gamma(t)$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$. Mit der Kompaktheit von K und γ ist $\varrho := \frac{1}{2} \text{dist}(K, \gamma) > 0$, und es gibt eine Folge von Punkten $\omega_1, \dots, \omega_l$ auf γ mit $\omega_0 = z_0$ und $\omega_l = z_1$ und

$$|\omega_j - \omega_{j+1}| < \varrho$$

für $0 \leq j < l$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-\omega_{j+1}} &= \frac{1}{z-\omega_j} \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega_{j+1}-\omega_j}{z-\omega_j}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega_{j+1}-\omega_j)^n}{(z-\omega_j)^{n+1}}. \end{aligned}$$

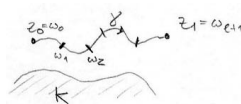


Abbildung A.2.: Veranschaulichung der Punktfolge

Mit der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe folgt nun, dass $\frac{1}{z-\omega_{j+1}}$, auf K gleichmäßig durch Polynome in $\frac{1}{z-\omega_j}$ approximiert werden kann, also gilt selbiges für $\frac{1}{z-z_0}$ durch Polynome in $\frac{1}{z-z_1}$, vermöge Induktion. Lemma A.4 ist bewiesen. \square

Bemerkung. Dies schließt auch den Beweis des Approximationssatzes von Runge ab; der Beweis liefert leider keine explizite Folge von Polynomen, die eine gegebene Zielfunktion gleichmäßig approximieren :(
Allerdings erlaubt der Satz A.1 den Nachweis der Existenz einer ganzen Funktion mit einer „universellen“ Approximationseigenschaft:

Satz A.5. Universalitätssatz von Birkhoff:

Es gibt eine ganze Funktion $f(z)$, so dass zu jeder auf einem einfach zusammenhängendem Gebiet Ω holomorphen Funktion $g(z)$ eine Folge komplexer Zahlen a_1, a_2, \dots existiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z + a_n) = g(z) \quad \forall z \in \Omega, \quad (\text{A.3})$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω .

Bemerkung. Dies ist ein wahrlich bemerkenswerter Satz! Die Aussage ist eine leichte Verschärfung des **Birkhoff**'schen Originals nach SEIDE und WALSH (1941), deren Argument wir hier reproduzieren.

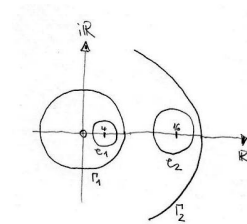


Abbildung A.3.: Skizze zum Beweis von Satz A.5

Beweis. Für ein $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Kreislinie

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4^n| < 2^n\}, \\ \Gamma_n &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 4^n + 2^n + 1\}; \end{aligned}$$

dann sind die \mathcal{C}_n allesamt disjunkt und Γ_n enthält $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ im Inneren, aber keinen Punkt von $\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+2}, \dots$. Die Menge der Polynome in z mit rationalen Koeffizienten ist **abzählbar** (klar, eben Koeffizientenweise); sei $p_1(z), p_2(z), \dots$ eine solche Abzählung.

Wir **definieren** eine Folge von Polynomen $\Pi_n(z)$ wie folgt:

Sei $\Pi_1(z) = p_1(z - 4)$ und $\Pi_2 = (z)$ so, dass

$$\begin{aligned} |\Pi_1(z) - \Pi_2(z)| &< \frac{1}{4} && \text{für } z \in \Gamma_1, \\ |p_2(z - 4^2) - \Pi_2(z)| &< \frac{1}{4} && \text{für } z \in \mathcal{C}_2; \end{aligned}$$

A. Approximation und Universalität

tatsächlich gelten diese Ungleichungen nach dem Maximumsprinzip (Satz 7.6) auch für alle z aus dem Inneren der jeweiligen Kreise. Ein solches Polynom $\Pi_2(z)$ existiert hierbei nach dem Approximationssatz von Runge A.1! Allgemeiner sei $\Pi_n(z)$ ein Polynom, welches

$$\begin{aligned} |\Pi_{n-1}(z) - \Pi_n(z)| &< \frac{1}{2^n} && \text{für } z \in \Gamma_{n-1} \\ |p_n(z - 4^n) - \Pi_n(z)| &< \frac{1}{2^n} && \text{für } z \in \mathcal{C}_n; \end{aligned}$$

(bzw. im jeweiligen Inneren) Dann konvergiert die Folge der $\Pi_n(z)$ gleichmäßig im Inneren jedes Kreises Γ_m , also lokal gleichmäßig in \mathbb{C} . Nach dem Satz 6.3 von Weierstraß ist die Grenzfunktion $f(z)$ existent und ganz. Tatsächlich besitzt sie die gewünschte Approximationseigenschaften: Ist nämlich $g(z)$ holomorph un einem einfach zusammenhängendem Gebiet Ω , so gibt es mit dem de, Approximationssatz von Runge A.1 eine Folge von Polynomen $p_{n_k}(z)$ mit oBdA rationalen (!) Koeffizienten, so dass $\lim_{n_k \rightarrow \infty} p_{n_k}(z) = g(z)$ für $z \in \Omega$, wobei die Konvergenz gleichmäßig auf jedem Kompaktum in Ω ist. Für $z \in \mathcal{C}_n$ gilt nun mit

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\Pi_n(z)}_{(*)} + \underbrace{(\Pi_{n+1}(z) - \Pi_n(z))}_{(**)} + \underbrace{(\Pi_{n+2} - \Pi_{n+1})}_{(***)} + \dots \right\}$$

dass

$$\begin{aligned} |f(z) - p_n(z - 4^n)| &\leq \underbrace{|\Pi_n(z) - p_n(z - 4^n)|}_{< \frac{1}{2^n}} + \underbrace{|\Pi_{n+1}(z) - \Pi_n(z)|}_{< \frac{1}{2^{n+1}}} + \dots \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

nach Konstruktion, was für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z + 4^n) - p_n(z)| = 0$$

für alle z , gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbb{C} (wobei wir natürlich wieder das Maximumsprinzip bemühen). Damit folgt nun für unsere Zielfunktion

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(z + 4^n) = g(z) \quad \forall z \in \Omega,$$

gleichmäßig auf jedem Kompakten $K \subset \Omega$. □

Bemerkung. Mittlerweile kennt man viele Verallgemeinerungen dieses Universalitätsphänomens. Das prominenteste und im Wesentlichen einzige „explizite“ Beispiel einer universellen Funktion ist die **Riemman'sche Zetafunktion** $\zeta(s)$:

Satz A.6. Universalitätstheorem von Voronin (1975):

Es sei K eine kompakte Teilmenge des Vertikalstreifens $\{s \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1\}$ mit zusammenhängenden Komplement und g eine auf K stetige nullstellenfreie

Funktion, die im Inneren von K holomorph sei. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein reelles $\tau > 0$, so das

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - g(s)| < \varepsilon; \quad (\text{A.4})$$

die Menge all dieser τ hat sogar positive untere Lebesgue-Dichte, das heißt diese Approximationsaufgabe wird von „vielen“ shifts τ gelöst!

Bemerkung. Die Forderung an die Zielfunktion $g(z)$, keine Nullstellen in K zu besitzen, hängt eng mit der Verteilung der Zeta-Nullstellen zusammen. Könnte die Zeta-Funktion eine Funktion $g(z)$ mit einer Nullstelle in K gleichmäßig approximieren, so folgte mit dem Satz von ROUCHÉ (Satz 12.6), dass $\zeta(s)$ eine Nullstelle rechts der kritischen Geraden $s = \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$ (im Widerspruch zur Riemann'schen Vermutung) besäße ...

Index

- $\frac{1}{4}$ -Satz, 160
- \mathbb{C} -Linearität, 22
- ε -Umgebung, 11
- a -Stellen, 99
- b -ten Potenz, 82
- b -ten Potenz von a , 82
- n -te Wurzel, 83
- n -ten Einheitswurzeln, 10
- Äquivalenz, 23
- Überschneidungen, 23
- ähnliche, 29
- äquivalent, 23

- A. Köcher, 7
- A. Krieg, 7
- Abelschen Grenzwertsatz, 19
- abgeschlossen, 12
- abgeschlossene Kreisscheibe, 52
- Ableitung, 14
- Ableitung, logarithmische, 80
- Abschätzung, triviale, 25
- absolut (lokal) gleichmäßig konvergent, 120
- absolute Konvergenz, 44
- Abstand, euklidischer, 8
- Adolf Hurwitz, 101
- algebraische Abschluss, 11
- Analytisch, 21
- analytisch, 15, 21, 40
- analytische Fortsetzbarkeit, 56
- analytische Fortsetzung, 76
- Apfelmännchen, 12
- Approximationssatz, Weierstraß'sche, 162
- Approximationssatz von Runge, 162
- Arcustangens, 41
- Argument, 10
- Argumentprinzip, 98
- Argumentsprinzip, 99
- Arzela Ascoli, 150
- Ausschöpfung, 154

- Behnke, 50
- Bernoulli-Zahlen, 41
- beschränkt, 12
- Betrag, 8
- Betragsmaximum, 38
- Betragsminimum, 55
- Bieberbach, 160
- Bieberbach'sche Vermutung, 160
- biholomorph, 138
- biholomorph äquivalent, 138
- bijektiv, 8
- Bildweg, 139
- Birkhoff, 165
- Birkhoff's Universalitätssatz, 165
- Bogenlänge, 24
- bogenweise zushgd offene Menge, 47
- Bolzano Weierstraß, 151
- Bolzano-Weierstraß, 150
- Busam, 49
- Busan, 7

- Caratheodory, 156
- Carmina Mathematica, 3
- Cauchy, 35, 42, 93
- Cauchy Integr.-satz f einf zushg. Gebiete, 74
- Cauchy'sche Integralformeln, 37
- Cauchy'sche Ungleichungen, 38
- Cauchy'schen Integralformeln, 35
- Cauchy'scher Integralsatz für Kreisscheiben, 33
- Cauchy-Folge, 12
- Cauchy-Riemann'sche DGL, 16
- Cayley Abbildung, 143
- Cotangens, 59

- de Branges, 160
- Determinante der Jacobimatrix, 18
- dicht, 60
- Diffeomorphismus, 139
- Differential, 15

- Differenzierbarkeit, komplexe, 14
 Diskret, 47
 Distanz, sphärische, 137
 Dixon, 67
 Doppelpunkte, 23
 doppelt, 57
 Doppelverhältnis, 144

 einfach, 57
 einfach Zusammenhängend, 74, 156
 einfach zusammenhängend, 74
 einfache Kurve, 23
 einfacher Zusammenhang, 33
 Einheit, imaginär, 8
 Einheitskreisscheibe, 138
 Einheitssphäre, 136
 Einpunktkompaktifizierung, 138
 Eisenstein, 135
 endliche Ordnung, 111
 Eugène Rouché, 99
 euklidischer Abstand, 8
 Euler, 78, 124
 Euler'scher Ergänzungssatz, 113
 Euler-Mascheroni-Konstante, 131
 Euler-Moivré, 10

 Familie, 150
 Familie, gleichmäßig beschränkt, 150
 Familie, normal, 153
 Fatou, 12
 Fehlerterm, 117
 Fejér, 156
 Fischer, 7
 Fixkörper, 9
 Fortsetzbarkeit, analytische, 56
 Fourier-Reihe, 91
 Fourier-Reihenentwicklung hol. Fkt, 91
 Fraktal, 12
 fraktales Differenzieren, 37
 Freitag, 7, 49
 Fubini, 113
 Fundamentalsatz der Algebra, 11, 39
 Fundamentalsatz der Algebra (schärfer), 39
 Funktionenreihen, normal konvergente, 44

 Gamma-Funktion, 45
 ganze Funktion, 38
 ganzzahlige Funktion, 62

 Gauß, 11
 Gauß'sche Produkt, 132
 Gauß'sches Produkt, 132
 Gebiet, 12, 26, 47
 Gebietsintegral, 36
 Gebietstreue, 54
 gebrochen lineare Transformationen, 141
 gelochte Kreisscheibe, 56
 gelochte Umgebung, 49
 gelochten Umgebung, 49
 Gesamtänderung des Argumentes, 99
 geschlossene Kette, 65
 geschlossene Kurve, 23
 glatt, 23
 glatt, stückweise, 23
 glatte Kurve, 23
 gleichmäßig beschränkte Familie, 150
 Globaler Cauchy-Integralsatz und -formeln, 66
 Goursat, 29, 31
 Green, 28
 Gudermann, 117

 H. Cremer, 3
 Häufungspunkt, 12
 Hadamard, 19, 126
 Hadamard'sche Produktsatz, 126
 Hadamard'scher Produktsatz, 126
 Hamilton, 9
 Hauptteil, 92
 Hauptzweig, 78
 hebbar, 56, 89
 Hebbarkeit, 56
 Heine-Borel, 12, 42, 93
 Heine-Borell, 137
 Henri Cartan, 59
 Herman Amandus Schwarz, 146
 holomorph, 15, 40, 138
 holomorphe n -te Wurzel, 83
 holomorphen Logarithmus, 80
 Holomorphie, 15
 Holomorphie-Kriterium, 42
 homolog, 65
 homotop, 71
 Homotopie, 33
 Horizont-Streifen, 90
 Hurwitz, 101, 158

- identische Verschwinden, 141
- Identitätssatz, 47
- imaginären Einheit, 8
- Imaginärteil, 8
- Imaginärteil-Funktionen, 15
- Integralformeln nach Cauchy, 35
- Integralsatz für Kreisscheiben nach Cauchy, 33
- integrierbar, komplex, 22
- Integrierbarkeit komplexer Funktionen, 22
- Inversion, 143
- involutorischer Körperautomorphismus, 9
- isolierte Singularität, 56

- J.Bernouilli, 78
- Jacobi, 135
- Jacobi-Matrix, 15
- Jacobimatrix, Determinante, 18
- Jens Jordan, 124
- Jensen'sche Formel, 109
- Jensen, Johan L.W.V., 109
- Jordan'sche Kurvensatz, 74
- Julia, 12

- Körper, 60
- Kette, 64
- Kette, geschlossen, 65
- Ketten, 64
- Koebe, 160
- Koebe-Funktion, 160
- kompakt, 12
- kompakt konvergent, 42, 103
- komplex differenzierbar, 14
- komplex Integrierbar, 22
- Komplexe Analysis, 7
- komplexen Logarithmus, 77
- konform, 139
- konforme, 160
- konformer, 156
- konjugiert komplexe Zahl, 8
- Konvergenz, 11
- Konvergenz des unendlichen Produktes, 118
- Konvergenz, kompakte, 42
- Konvergenz, lokal gleichmäßige, 42
- Konvergenzradius, 19
- konvergiert gleichmäßig, 41
- Koordinatentransformation, 19
- Kreisketten, 76
- Kreislinie, 24
- Kreisscheibe, abgeschlossen, 52
- Kreisscheibe, gelocht, 56
- Kreisscheibe, offen, 11, 52
- Kreisscheibe, punktiert, 56
- Kurve, 23
- Kurve, geschlossen, 23
- Kurve, glatt, 23
- Kurve, parametrisiert, 23
- Kurve,einfach, 23
- Kurvenintegral, 24
- Kurvenintegrale, 22

- l'Hospital, 114
- Landau, 44
- Laurent, Pierre, 85
- Laurent-Entwicklung, 85, 88
- Laurent-Reihe, 88
- Laurent-Reihen, 85
- Laurent-Zerlegung, 86
- Lieb, 7
- Limiten, 14
- lineare Approximierbarkeit, 14
- Linearität, 25
- Liouville, 156
- Liuoville, 39
- logarithmische Ableitung, 80
- Logarithmus, holomorpher, 80
- lokal glm konv. Funktionenfolgen, 42
- Louis de Branges de Bourcia, 160
- Ludwig Bieberbach, 160

- Möbiustransformation, 141
- Möbiustransformationen, 141, 142
- Magnus Gösta Mittag-Leffler, 104
- Majorantentest, 44
- Mandelbrot, 12
- Mandelbrotmenge, 12
- Maximumsprinzip, 54
- mehrdeutigen Logarithmus, 26
- Menchhoff, 18
- Mercator, 140
- Meromorph, 58
- meromorph, 58, 138
- Methode d. konv.-erzgnen Summanden, 104
- Metrik, 137
- Minimumsprinzip, 55

- Mittag-Leffler, Markus Gösta, 104
 Mittelwerteigenschaft, 35
 Monodromiesatz, 83
 Montell, 158

 negative Orientierung, 24
 nicht diskret, 47
 nicht existent, 118
 Nordpol, 136
 normal, 155
 normal konvergent, 44
 normal konvergente Funktionenreihen, 44
 normale Familie, 153
 Normierung, 160
 Nullfolge, 30
 Nullhomolog, 65
 nullhomolog, 65

 Obermenge, offen, 15
 offen, 11
 offene Kreisscheibe, 11, 52
 offenen Obermenge, 15
 Offenheit, 11
 Ordnung der Null-bzw. Polstelle, 98
 Ordnung eines Pols, 57
 Ordnung von f , 111
 orientierter Winkel, 139
 Orientierung, negative, 24
 Orientierung, positiv, 24
 orientierungstreu, 139
 Orientierungsumkehrung, 25
 Orthogonalitätsrelation, 26

 parametrisierte Kurve, 23
 Partialbruchzerlegung, 59
 partielle Integration, 22
 Permanenzprinzip, 49
 Picard, 61
 Pierre Laurent, 85
 Poincarè, 135
 Pol, 57, 89
 Pol-Ordnung, 57
 Polarkoordinaten, 10
 Polygonzug, 31
 positive Orientierung, 24
 Potenzreihen, 18
 Primitive, 25
 Primzahlverteilung, 135

 Pringsheim, 29
 Produkt, unendliches, 118
 Produktsatz nach Hadamard, 126
 Produktsatz von Weierstraß, 123
 Projektion, stereographische, 136
 Prym, Friedrich, 108
 punktierte Kreisscheibe, 56
 punktierte Sphäre, 156
 punktierte Umgebung, 56

 Quaternionen, 9

 Rand, 12
 Realteil, 8
 Realteil-Funktion, 15
 regulär, 15
 Reihe, Laurent, 88
 Reihenrest einer konvergenten Potenzreihe, 20
 Residuensatz, 93
 Residuum, 92
 Riemann, 22, 44, 135
 Riemann'sche Abbildungssatz, 156
 Riemann'sche Vermutung, 135
 Riemann'sche Zahlensphäre, 136
 Riemann'sche Zeta-Funktion, 44
 Riemann'schen Fläche, 79
 Riemann'scher Hebbbarkeitssatz, 56
 Riemann-Integral, 24
 Riemann-Integrale, 22
 Riemann'sche Zetafunktion, 166
 Riesz, 156
 Ringgebiet, 85
 Rodrigues, 9
 Rolf Nevanlinna, 160
 Rouché, 100, 167
 Runge, Carl von, 162

 Satz über das Produkt von Weierstraß, 123
 Satz über die Universalität von Birkhoff, 165
 Satz von Casorati-Weierstraß, 60
 Satz von der Ergänzung nach Euler, 113
 Satz von der Gebietstreue, 53
 Satz von der offenen Abbildung, 53
 Satz von Goursat, 29
 Satz von Heine-Borel, 42
 Satz von Hurwitz, 101
 Satz von Liouville, 38, 138
 Satz von Mittag Leffler, 104

- Satz von Montel – allg. Version, 154
- Satz von Montell, 150
- Satz von Morera, 42
- Satz von Rouché, 99
- Satz von Schwarz, 51
- Satz von Vitali, 153
- Satz von Vitali – allg. Version, 154
- Satz von Weierstraß, 40, 42
- schlicht, 160
- schwache Stirling'sche Formel, 116
- Schwarz'sche Lemma, 146
- Schwarz'sche Spiegelungsprinzip, 51
- Seide, 165
- Shakarazi, 7
- Singularität, isolierte, 56
- Singularität, wesentlich, 60
- Singularität, wesentlich und beschränkt, 57
- Singularitäten, 7
- Sommer, 50
- sphärische Distanz, 137
- Spur, 64, 65
- stückweise glatt, 23
- Stammfunktion, 25
- Stein, 7
- stereographische Projektion, 136
- Stirling'sche Formel, schwache, 116
- Stirling'schen Formel, 116, 117
- Stokes, 36
- Substitutionsregel, 22
- Superposition, 59
- Symmetrie von Ω , 50

- Tangentenbildung, 14
- Theorem der Universalität von Voronin, 166
- Thetafunktion, 135
- totale Ableitung, 15
- totale Diffbarkeit, 17
- Träger, 64, 65
- Transformationen, gebrochen lineare, 141
- transformationsinvariant, 24
- trigonometrischen Funktionen, 15
- triviale Abschätzung, 25

- Umgebung, 11
- Umgebung, gelocht, 49
- Umkehrung einer Möbiustransformation, 142
- Umlaufzahl, 62, 65
- Umlaufzahl, 62
- unendliche Produkt, 118
- unendliche Produkte von Funktionen, 120
- unendliches Produkt, 118
- Universalitätssatz von Birkhoff, 165
- Universalitätstheorem von Voronin, 166
- Unterkörper, 8

- Vitali, 155
- Vollständigkeit, 12
- Voronin, Universalitätstheorem von, 166

- wächst, 58
- Wallis, 125
- Walsh, 165
- Weg, 12
- Wege-äquivalent, 12
- Wegintegral, 24
- Weierstraß, 40, 158
- Weierstraß'sche Approximationssatz, 162
- Weierstraß'scher Produktsatz, 123
- wesentlich, 89
- wesentliche Singularität, 60
- wesentliche und beschränkte Singularität, 57
- Winkeltreu, 139
- Wirtinger-Kalkül, 29
- Wirtinger-Kalkül, 16
- Wohldefiniertheit, 24

- Zahlensphäre, Riemann'sche, 136
- Zeta-Funktion, 135
- ziemlichen Solidarität, 49
- zusammenhängend, 12
- Zusammenhängend, einfach, 74, 156
- Zusammenhang, einfacher, 33
- Zusammenhangskomponente, 12, 61, 75
- Zweig des komplexen Logarithmus, 78
- Zweige, 78
- Zyklus, 64, 65

Abbildungsverzeichnis

4.1. Dreieckiges Wegintegral (Beweis von Satz 4.1), ©Prof. J. Steuding	29
4.2. Einteilung der Bewegung in Real und Imaginärteil von z , ©Prof. J. Steuding	31
4.3. Bilder 1 bis 4 des Integrationsweges von z nach $z + h$, ©Prof. J. Steuding	32
4.4. Das innere einer Kurve, ©Prof. J. Steuding	33
4.5. Rechteck für Gaußdichte-Integral, ©Prof. J. Steuding	34
5.1. Geschlitzter Kreisring, ©Prof. J. Steuding	35
6.1. Zwei ineinander liegende Kreisscheiben mit Zentrum z_0 , ©Prof. J. Steuding	43
7.1. Symmetrie der Menge Ω , ©Prof. J. Steuding	50
7.2. Bildliche Darstellung vom Beweis zu Satz 7.2, ©Prof. J. Steuding	51
7.3. Bildliche Darstellung des Beweises zu Satz 7.5, ©Prof. J. Steuding	54
7.4. Das Maximumsprinzip als Bild, ©Prof. J. Steuding	54
8.1. Veranschaulichung von Satz 8.41. $\Rightarrow 2.$, ©Prof. J. Steuding	61
9.1. Anschauliche Darstellung von Satz 9.1, ©Prof. J. Steuding	62
9.2. Orientierungen der Umlaufszahlen, ©Prof. J. Steuding	64
9.3. Beispiele für geschlossene und nicht geschlossene Ketten, ©Prof. J. Steuding	65
9.4. Beispiel für (nicht) nullhomologe Kette, ©Prof. J. Steuding	65
9.5. Zwei homologe Wege Γ_1 und Γ_2 , ©Prof. J. Steuding	66
9.6. Beispiel einer nullhomologen Kette, ©Prof. J. Steuding	66
9.7. Veranschaulichung zu Korollar 9.4, ©Prof. J. Steuding	70
9.8. Veranschaulichung der Homotopie, ©Prof. J. Steuding	71
9.9. Gegenbeispiel zur Umkehrung von Satz 9.5, ©Prof. J. Steuding	71
9.10. Ein Stück vom Polygonzug über $H(s, k/4)$, ©Prof. J. Steuding	72
9.11. Beispiel & Gegenbsp. f. einf. Zusammenhang, ©Prof. J. Steuding	74
9.12. homolog $\stackrel{\neq}{\leftarrow}$ homotop, ©Prof. J. Steuding	74
10.1. Überlappende Kreise K_k und K_{k+1} , ©Prof. J. Steuding	77
10.2. Veranschaulichung der Mehrdeutigkeit der Exponentialfunktion, ©Prof. J. Steuding	78
10.3. Fortsetzung des ersten Hauptzweiges, ©Prof. J. Steuding	78
10.4. Riemann'sche Fläche, ©Prof. J. Steuding	79
10.5. Verbildlichung vom Öffnungswinkel α , ©Prof. J. Steuding	81
10.6. Veranschaulichung der Einschränkung, ©Prof. J. Steuding	83

11.1. Veranschaulichung des Ringgebietes, ©Prof. J. Steuding	85
11.2. Beweis zu Satz 11.1, ©Prof. J. Steuding	86
11.3. Beweis zur Eindeutigkeit Satz 11.1, ©Prof. J. Steuding	86
11.4. Beweis zur Existenz von Satz 11.1, ©Prof. J. Steuding	87
11.5. Die Menge D und die Abb. auf Kreisring, ©Prof. J. Steuding . .	90
12.1. Umlaufzahl um Singularitäten, ©Prof. J. Steuding	93
12.2. Halbkreis mit Radius $r > 1$, ©Prof. J. Steuding	94
12.3. Skizze zum Beweis von Satz 12.4, ©Prof. J. Steuding	97
12.4. Veranschaulichung der Lösungen der Staatsexamensaufgabe, ©Prof. J. Steuding	101
12.5. Beweis zu Satz 12.7, ©Prof. J. Steuding	101
13.1. Polstellen des Beweises 13.1, ©Prof. J. Steuding	102
13.2. Veranschaulichung zum Beweis von Satz 13.1, ©Prof. J. Steuding	103
14.1. Skizze zu Beweis von Satz 14.4, ©Prof. J. Steuding	115
15.1. Skizze zu Beweis von Satz 15.9, ©Prof. J. Steuding	130
A.1. Umrandung des Weges mit Liniensegmentes (Beweis zu Lemma A.2), ©Prof. J. Steuding	163
A.2. Veranschaulichung der Punktfolge (Beweis zu Lemma A.4), ©Prof. J. Steuding	164
A.3. Skizze zum Beweis von Satz A.5, ©Prof. J. Steuding	165

Hier endet meine Vorlesungsmitschrift. Unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/jordan/Fuko09/index.html> findet ihr das handgeschriebene Skript von Prof. Steuding.

Die Bilder und Skizzen werden nach und nach ergänzt.