Funktionentheorie I & II

gelesen von Prof. Ruscheweyh
Wintersemester 07/08
Sommersemester 2008
LaTeX von Maximilian Michel

—nicht Korrektur gelesen—

1. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Funktionentheorie I

0. Überblick

0.1. Literatur

1. Lars Ahlfors „Complex Analysis“ (bestes Buch, aber erfordert Kenntnisse, bietet Hintergrundwissen)

2. Remmert „Funktioinentheorie I+II“ (Entspricht ungefähr der VL I-II), ganz gut als Ergänzung, nicht geeignet als Ersatz für VL

3. Rudin, „Real and Complex Analysis“ viel Material, Grundlagenwissen erforderlich

4. Comway, „Functions of one Complex variable i“

Skript im Internet...

0.2. Überblick

$\mathbb{C}$ -nicht angeordneter Körper der komplexen Zahlen

- $$\begin{aligned} (a, b), a, b \in \mathbb{R} \\ (a_1, b_1) + (a_2, b_2) =& (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) =& (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 - a_2 b_2) \\ (0, 1) \cdot (0, 1) =& (-1, 0) \Rightarrow \sqrt{-1} = i \end{aligned}$$

  Schreibweise:

  $$\begin{aligned} z \in \mathbb{C} \Rightarrow (V^2 \ni) z =& a + ib \, (= (a, 0) + (0, 1)(b, 0)) \\ a =& \text{Re } (z) \\ b =& \text{Im } (z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= r\cos\varphi + ir\sin\varphi \\
&= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= re^{i\varphi} \\
z_1 =& r_1 e^{i\varphi_1} \\
z_2 =& r_2 e^{i\varphi_2} \\
z_1 \cdot z_2 =& r_1 \cdot r_2 z_1 = r_1 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\
z =& re^{i\varphi} = a + ib \\
r =& \sqrt{a^2+b^2} =: |z| \\
\overline{z} =& \text{konjugiert Komplex} \\
\overline{z} :=& a - ib
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2}$$

$$\to (z \neq \overline{z})\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

(Skizze$_2$ Kugel in Ebene $\mathbb{C}$) *Stereographische Projektion*

Metrik in $\mathbb{C}$:

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

$(\mathbb{C}, d)$ *metrischer Raum*

Bemerkung. *1.*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} z_n =& z_0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty}(Re\ z_n) = Re\ z_0 \\ \lim_{n\to\infty}(Im\ z_n) = Im\ z_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ *heißt* stetig *in* $z_0 \in M$, *falls* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

1. *Weierstraß*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad a_k, z \in \mathbb{C} \quad \text{Polynome}$$

$$\to R(z) = \frac{P_1(z)}{P_1(z)} \text{ rationale Funktionen} \to \qquad \underbrace{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k}_{\text{„Algebra‘Potenzreihen“ } \textit{Weierstraß}}$$

2. *Riemann*

$$\underbrace{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)}_{\text{Algebra}}$$

ist die sogenannte *komplexe Differenzierbarkeit*, ist NICHT äquivalent zur *totalen Differenzierbarkeit*

3. *Winkeltreue Abbildungen*
   Winkel → Tangenten → 1. Ableitung

Rieman und Weierstraß sind identisch, beschreiben also die gleichen Funktionen

1. Holomorphe Funktionen

Definition. *komplexe Differenzierbarkeit*
$M \subset \mathbb{C}$ offen, $f : M \to \mathbb{C}, z_0 \in M$
M heißt *komplex differentierbar* in z_0 falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (= c)$$

existiert. In diesem Fall heißt c die Ableitung von f in z_0, $c =: f'(z_0)$

Beispiel.

1. $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ *ist überall komplex diffbar, mit*

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k (z - z_0)^{k-1}$$

2. $f(z) = \overline{z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z - z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{|\overline{z} - \overline{z}_0| \, e^{-i\varphi}}{|z - z_0| e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}$$

$\lim_{z \to z_0} e^{-2i\varphi}$ *existiert nicht* $\Rightarrow f(z) = \overline{z}$ *ist nicht in* z_0 *komplex differentierbar*

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ z &= x + iy = (x,y) \\ f_x(z) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ f_y(z) &= u_y(x,y) + iv_y(x,y) \end{aligned}$$

Definition. f ist *total (reell) differentierbar* wenn u, v die oben genannten Eigenschaften haben.

$$
\begin{aligned}
z_0 &= x_0 + iy_0 \\
&= (x_0, y_0) \\
u(x_0,y_0) &= u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)(x-x_0) + u_y(x_0,y_0)(y-y_0) + q_1(x,y)\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \\
&\quad q_1 \text{ stetig in } (x_0,y_0),\ q_1(x_0,y_0) = 0 \\
v(x_0,y_0) &= v(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)(x-x_0) + v_y(x_0,y_0)(y-y_0) + q_2(x,y)\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \\
&\quad q_2 \text{ stetig in } (x_0,y_0),\ q_2(x_0,y_0) = 0 \\
f(z) &= \underbrace{u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)}_{f(z_0)} + \underbrace{(u_x + iv_x)}_{f_x(z_0)}(x-x_0) + \underbrace{(u_y + iv_y)}_{f_y(z_0)}(y-y_0) + (q_1(x,y) + iq_2(x,y) \to 0) \\
&\quad\ \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \\
&= f(z_0) + f_x\frac{1}{2}(z + z_0 + (\overline{z} - \overline{z}_0)) + f_y(z_0)\frac{1}{2i}(z - z_0 - (\overline{(z-\overline{z}_0)})) + q(z)|z-z_0| \\
&\quad q \text{ stetig in } z_0, q(z_0) = 0 \\
&= f(z_0) + \underbrace{\frac{1}{2}(f_x - if_y)}_{f_z(z_0)}(z-z_0) + \underbrace{\frac{1}{2}(f_x + if_y)}_{f_{\overline{z}}(z_0)}(\overline{z} - \overline{z}_0) + \widetilde{q}(z)(z-z_0) \\
\widetilde{q}(z) &= q(z)\frac{|z-z_0|}{z-z_0} \\
&\quad q \text{ stetig in } z_0, \widetilde{q}(z_0) = 0
\end{aligned}
$$

$f_z(z_0)$ und $f_{\overline{z}}(z_0)$ sind *Wirthinger- Ableitungen*

1.1.

Nebenrechnug:

$$
\begin{aligned}
z - z_0 &= (x-x_0) + i(y-y_0) \\
x - x_0 &= \frac{1}{2}\left((z-z_0) + (\overline{z} - z_0)\right) \\
y - y_0 &= \frac{1}{2i}(z - z_0 - (\overline{z} - \overline{z}_0))
\end{aligned}
$$

Sei f total differentierbar $\Rightarrow \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0} + \widetilde{q}(z)$

Satz. *f in z_0 komplex differentierbar $\Leftrightarrow$ f total differentierbar und $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ In diesem Fall ist $f_z(z_0) = f'(z_0)$*

Bemerkung. *1. f komplex differentierbar $\Rightarrow$ f stetig (in z_0)*

2. f, g komplex differentierbar $\Rightarrow$ $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$ komplex differentierbar.

3. f komplex differentierbar
$\Rightarrow f_{\overline{z}}(z_0) = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right) = 0$

Daraus folgt also:

$$\begin{aligned}(u_x - v_y) + i(v_x + u_y) &= 0\\ \Rightarrow \begin{pmatrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das sind die sogenannten Cauchy-Riemannsche DGL

4. $f = u + iv, \quad u, v \in C^2(M)$ *komplex differentierbar*

$$\Rightarrow u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Rightarrow & u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \Rightarrow & v_{xy} - v_{yx} = 0\end{array}\right\} \text{Laplace Gleichung}$$

$$\Rightarrow u, v \text{ Harmonische Funktionen}$$

5. *Gleiche Vorraussetzung*

$$\begin{aligned}(f_z)_{\overline{z}} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f\\ &= \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})\end{aligned}$$

Definition. *Holomorphie*
$M \subset \mathbb{C}$ offen, $f : M \to \mathbb{C}$, $z_0 \in M$, dann heißt f *holomorph* in z_0 falls es eine Umgebung $U(z_0) \subset M$ gibt, in der f komplex differentierbar ist.
f heißt *holomorph* in M falls f in *jedem* Punkt $z_0 \in M$ holomorph ist.
in englischer Literatur:
holomorph $\hat{=}$ *analytisch*

Satz 1.1. *Eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist holomorph in $|z - z_0| < R$, und es gilt:*

$$P'(z) = \sum_{k=1!}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Insbesondere ist $P(z)$ beliebig oft komplex differentierbar, denn die Ableitung ist wieder eine Potenzreihe und der Konvergenzradius ist wieder der Selbe $\Rightarrow$ Beweis: Vollständige Induktion. Es gilt also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, k \in \mathbb{N}_0$$

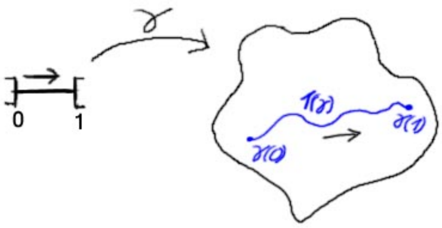
Beispiel. 1. $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ *holomorph in* $|z| < 1$

2. $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$
Vorsicht: Singularität bei $z = i$!!

3. $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $R = \infty$ *mit* $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ *für* $z_1 = z$ *und* $z_2 = -z$ *gilt:* $e^z + e^{-z} = e^0 = 1$
$\Rightarrow e^z \neq 0$ *in* $\mathbb{C}$

2. Cauchyscher Integralsatz

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, stetig diffbar heißt *Weg*
$T(\gamma) = \{\gamma(t) : 0 \le t \le 1\}$ heißt *Träger* von γ



$$\begin{aligned} \gamma(t) =& x(t) + iy(t); \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Gamma \\ -\gamma :& \gamma(1-t) \end{aligned}$$

$$\boxed{L(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| \, dt}$$

γ: Weg, $F : T(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig

$$\int_\gamma F(\zeta) d\zeta := \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

Rechenregel:

1. $$\int_{-\gamma} F(\zeta) d\zeta = - \int_\gamma F(\zeta) d\zeta \tag{2.1}$$

2. $$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt \text{ „Länge“ von } \gamma \tag{2.2}$$

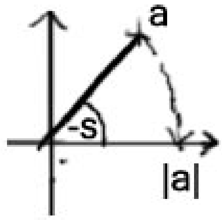
3. $$\left| \int_\gamma F(\zeta) d\zeta \right| \le L(\gamma) \cdot \max_{\zeta \in T(\gamma)} (|F(\zeta)|) \tag{2.3}$$

Beweis 1. zu 2.3:

$$s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Re}\left[e^{is}\int_\gamma F(\zeta)d\zeta\right]\right| &= \left|\operatorname{Re}\left[\int_0^1 e^{is}F(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt\right]\right| \\
&= \left|\int_0^1 \operatorname{Re}\left[e^{is}\cdot F(\gamma(t))\dot\gamma(t)\right]dt\right| \le \int_0^1 \left|\operatorname{Re}\left[e^{is}F(\gamma(t))\dot\gamma(t)\right]\right|dt \le \\
&\overset{|\operatorname{Re}\le|z|}{\le} \int_0^1 \left|e^{is}F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\right|dt = \int_0^1 |F(\gamma(t))|\cdot|\dot\gamma(t)|dt \\
&\le \max_{t\in[0,1]}|F(\gamma(t))|\cdot\int_0^1|\dot\gamma(t)|dt = \max_{\zeta\in T(\gamma)}|F(\zeta)|\cdot L(\gamma)
\end{aligned}$$

$$a\in\mathbb{C}\Rightarrow \exists_{s\in\mathbb{R}} e^{is}\cdot d = |a|$$



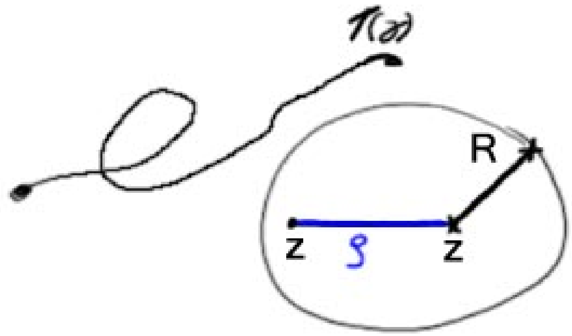
Durch die Wahl von s:

$$\left|\operatorname{Re}\underbrace{\left[e^{is}\int_\gamma F(\zeta)d\zeta\right]}_{=\left|\int_\gamma F(\zeta)d\zeta\right|}\right| = \left|\operatorname{Re}\left|\int_\gamma F(\zeta)d\zeta\right|\right| = \left|\int_\gamma F(\zeta)d\zeta\right|$$

Satz 2.1. *γ Weg, $F: T(\gamma)\to\mathbb{C}$ stetig. Dann ist*

$$\boxed{f(z) := \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta} \qquad z\in\mathbb{C}\backslash T(\gamma)$$

in jedem $z\in\mathbb{C}\backslash T(\gamma)$ holomorph



Beweis 2.

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \le \frac{\rho}{R} < 1$$

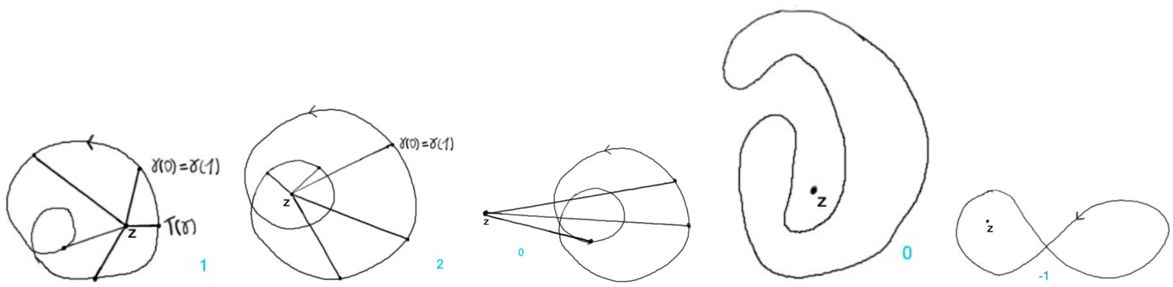
$$
\begin{aligned}
|z - z_0| &= \rho < R \\
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k
\end{aligned}
$$

konvergiert absolut und glm. für $\zeta \in T(\gamma)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(z) &= \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) d\zeta \overset{\substack{\text{abs.\& glm.} \\ \text{Konvergenz}}}{=} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\underbrace{\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}}_{???} \right] (z - z_0)^k
\end{aligned}
$$

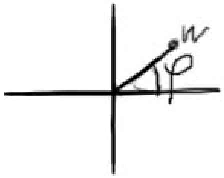
$\Rightarrow f(z)$ ist in $z_0 \in \mathbb{C} \backslash T(\gamma)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, deren Konvergenzradius(mindestens) der Abstand $(z_0, T(\gamma))$ beträgt.
$\Rightarrow f$ ist holomorph in z_0, also holomorph in $\mathbb{C} \backslash T(\gamma)$

γ sei ein geschlossener Weg (d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$), $n(z, \gamma)$ sei die *Windungszahl* von γ bezüglich $z \notin T(\gamma)$



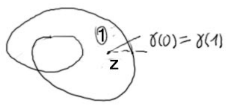
$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \left[\arg(\gamma(t) - z) - \arg(\gamma(0) - z) \right] \\
n(z, \gamma) = &\frac{1}{2\pi} \left[\arg(\underbrace{\gamma(1)}_{\text{über den Verlauf gesehen } k \cdot 2\pi} - z) - \arg(\gamma(0) - z) \right] \\
= &\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \arg(\underbrace{\gamma(t) - z}_{q(t)}) \right] dt
\end{aligned}
$$

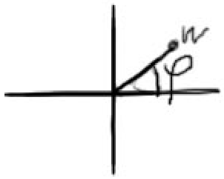
mit $\arg w = \arctan \left(\frac{\text{Im } w}{\text{Re } w} \right)$



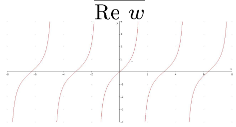
$$n(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{\text{Im } w}{\text{Re } w}\right)\right]dt$$

Windungszahl $n(z,\gamma)$, $z \notin T(\gamma)$

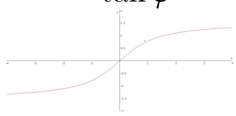




$\frac{\text{Im } w}{\text{Re } w}$



$= \tan\varphi$



<u>Randbemerkungen zu Skizzen:</u>

$$\tan\varphi = \frac{\text{Im } w}{\text{Re } w}$$
$$\varphi = \arctan\frac{\text{Im } w}{\text{Re } w}$$
$$f(x) = \arctan(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} n(z,\gamma) &= \frac{1}{2\pi}\left(\arg(\gamma(1)-z)-\arg(\gamma(0))-z\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{d}{dt}\arg(\underbrace{\gamma(t)-z}_{q(t)})dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(z,\gamma) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{d}{dt}\arg q(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 Im\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}dt = Im\frac{1i}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)-z}dt \end{aligned}$$

$$\boxed{n(z,\gamma) = \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right]}$$

Nebenrechnung

$$
\begin{aligned}
d/(dt) \arg q(t) &= d/dt \arctan \frac{\text{Im } q(t)}{\text{Re } q(t)} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{\text{Im } q}{\text{Re } q}\right)^2} \cdot \frac{\dot{\text{Im}}\text{Re } q - \text{Im } q\dot{\text{Re}}}{(\text{Re } q)^2} \\
&= \frac{1}{(\text{Re } q)^2 + (\text{Im } q)^2} \cdot \frac{\text{Im } \dot q \cdot \text{Re } \overline{q} + \text{Im } \overline{q}\text{Re } \dot q}{\text{Im } (\dot q \overline{q})} \quad = \frac{\text{Im } \dot q \overline{q}}{q \cdot \overline{q}} = \text{Im } \frac{\dot q \cancel{\overline{q}}}{q \cancel{\overline{q}}}
\end{aligned}
$$

Satz 2.2. *γ Geschlossener Weg in $\mathbb{C}$, dann gilt*

$$\boxed{n(z,\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}}$$

ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash T(\gamma)$ konstant gleich einer ganzen Zahl. Auf der unbeschränkten Komponente ist $n(z,\gamma) \equiv 0$

Beweis 3.

$$
\begin{aligned}
z &\in \mathbb{C}\backslash T(\gamma) \\
\varphi(\tau) &:= e^{\int_0^\gamma \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)-z} dt} \\
\text{Dann gilt:} & \\
\dot\varphi(\tau) &= \varphi(\tau) \frac{\dot\gamma(\tau)}{\gamma(\tau) - z} \\
\text{mit } \dot\varphi(\tau) &= \varphi(\tau)\psi(\tau) \\
\psi(\tau) &= \frac{\varphi(\tau)}{\gamma(\tau) - z} \\
\Rightarrow \dot\psi(\tau) &= \frac{\dot\varphi(\tau)(\gamma(\tau) - z) - \dot\gamma(\tau)\varphi(\tau)}{(\gamma(\tau) - z)^2} \equiv 0 \\
\Rightarrow \psi(\tau) &\equiv c \\
\Rightarrow \varphi(\tau) &= c(\gamma(\tau) - z) = \frac{\gamma(\tau) - z}{\gamma(0) - z} \\
\varphi(0) &= c(\gamma(0) - z) = 1 \\
\Rightarrow \Phi(1) &= \frac{\gamma(1) - z}{\gamma(0) - z} = 1 \\
\text{, da } \gamma(0) = \gamma(1) & \\
&= e^{\int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)-z} dt} \\
&= \boxed{e^{2\pi i n(z,\gamma)} = 1}
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
e^w &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\
\Rightarrow |e^w| &= e^x = e^{Rew}
\end{aligned}
$$

<u>Ende Nebenrechung</u>

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e^{Re(2\pi i n(z,\gamma))} = 1\\
&\Rightarrow Re(2\pi i n(z,\gamma)) = 0\\
&\Rightarrow Re\left[i(2\pi n(z,\gamma))\right]\\
&\Rightarrow n(z,\gamma) \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow e^{2\pi i n(z,\gamma)} = \cos(2\pi n(z,\gamma)) + i\sin(2\pi i n(z,\gamma)) = 0\\
&\Rightarrow n(z,\gamma) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Da $n(z,\gamma)$ auf jeder Zusammenhangskomponente *holomorph* und damit *stetig* ist, folgt: $n(z,\gamma) = const$ auf der Zusammenhangskomponente.

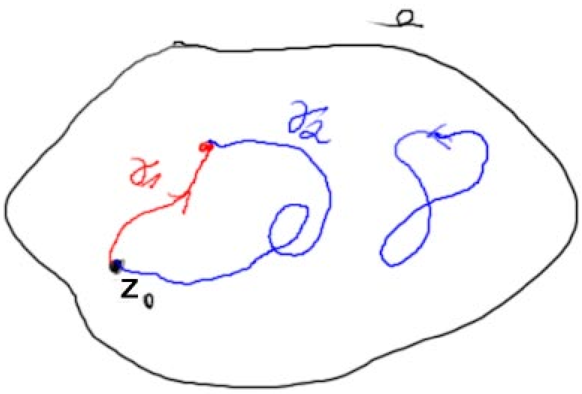
$$|n(z,\gamma)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \max_{\zeta\in T(\gamma)} \underbrace{\frac{1}{|\zeta - z|}}_{<\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\pi}} L(\gamma) < \frac{1}{2} \text{ für } |z| \text{ groß}$$

$$\Rightarrow n(z,\gamma) = 0 \text{ für „dieses“ } z$$

$$\Rightarrow n(z,\gamma) = 0 \text{ in unbeschränkten Zusammenhangskomponenten (kurz ZK)}$$

Hilfssatz. *Ω Gebiet (offen und zusammenhängend) f holomorph in Ω, f' stetig in Ω, γ sei ein geschlossener Weg in Ω (d.h. $T(\gamma) \subset \Omega$)*

$$\Rightarrow \int_\gamma F'(\zeta)d\zeta = 0$$



Beweis.

$$\int_\gamma F'(\zeta)d\zeta = \int_0^1 F'(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt$$

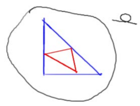
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(\gamma(t))\Big|_{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{F(\gamma(t)) - F'(\gamma(t_0))}{t - t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t-t_0}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\\
&= F'(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma(t_0)
\end{aligned}$$

□

Satz 2.3. (Goursat) *Ω Gebiet, Punkt $p \in \Omega$ fest. f stetig in Ω, holomorph für alle $z \in \Omega \backslash \{p\}$, Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in Ω. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$$

für jedes Dreieck $\Delta \subset \Omega$



$$\left|\int_{\partial\Delta_0}\right| \leq \left|\int_{\partial\Delta_{0,1}}\right| + \left|\int_{\partial_{0,2}}\right| + \left|\int_{\partial_{0,3}}\right| + \left|\int_{\partial_{0,4}}\right| \leq 4 \left|\int_{\underbrace{\partial_{0,1}}_{=:\Delta_1}}\right|$$

$$\left|\int_{\partial_{0,j}}\right| = max_{k=1,\dots,4} \left|\int_{\partial_{0,k}}\right|$$

02.11.07

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\right| \leq \sum_{s=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_{0,1}} f(z)dz\right| \\
\leq 4 \cdot \left|\int_{\partial \underbrace{\Delta_{0,j}}_{\Delta_1}} f(z)dz\right| \\
\leq 4^2 \left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz\right| \\
\vdots \\
\leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \\
\vdots
\end{aligned}$$

$$\dots \subset \Delta_n \subset \dots \Delta_1 \subset \Delta_0$$

$$L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta_0)$$

$$\Rightarrow \exists^1 z_0 \quad (z_0 \neq p) \quad \text{mit } z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$$

f holomorph in z_0:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{\substack{z \in \Omega \backslash \{p\} \\ |z-z_0|<\delta}} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

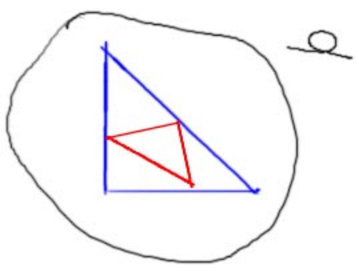
$$\Leftrightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon \, |z - z_0|$$

(Skizze 50 fast wie Skizze 46)
Sei $\varepsilon > 0$ fest, $\Rightarrow \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \Delta_{n_0} \subset K_\delta(z_0)$

$$\underbrace{\int_\gamma f(z_0)dz}_{\text{geschlosen in}\Delta_0} = \int_\gamma (f(z_0)z)'dz \overset{HS}{=} 0$$

$$\int_\gamma f'(z_0)(z - z_0)dz = \int_\gamma \left[\frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2\right]' dz \overset{HS}{=} 0$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right| &\leq 4^{n_0} \left|\int_{\partial\Delta_{n_0}} f(z)dz\right| \\
&= 4^{n_0} \left|\int_{\partial\Delta_{n_0}(\subset K_\delta(z_0))} \left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right] dz\right| \\
&\leq 4^{n_0} L(\partial\Delta_{n_0}) \max_{z \in \partial\Delta_{n_0}} \underbrace{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}_{<\varepsilon|z - z_0|} \\
&\leq 4^{n_0} L(\partial\Delta_{n_0})^2 \cdot \varepsilon \\
&= (2^{n_0} L(\partial\Delta_{n_0}))^2 \, \varepsilon \\
&= \varepsilon \cdot (L(\Delta_0))^2 \\
\Rightarrow \left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right| &= 0
\end{aligned}$$



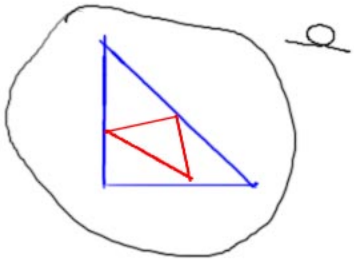
(Skizze 51)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right| &\leq \left|\int_{\partial A}\right| + \cancel{\left|\int_{\partial B}\right|} + \cancel{\left|\int_{\partial C}\right|} \\
&\leq L(\partial A) \cdot \max_{z \in A} |f(z)| \\
&\leq L \underbrace{(\partial A)}_{\to 0} \cdot \max_{z \in A} |f(z)|
\end{aligned}$$

$$A \to \{p\}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta_0} f(z)dz = 0$$

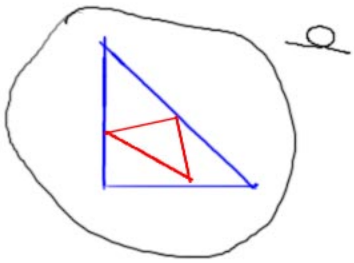
(3)



Skizze 52

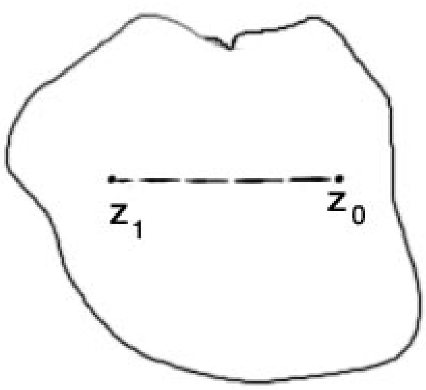
$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz = \underbrace{\int_{\partial A} f(z)dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial B} f(z)dz}_{=0}$$

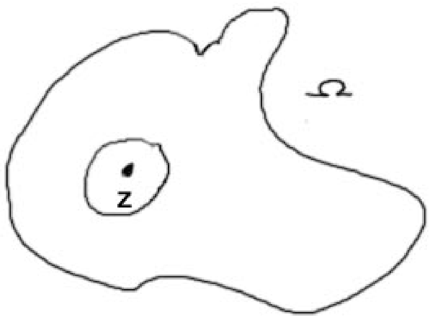
(4)

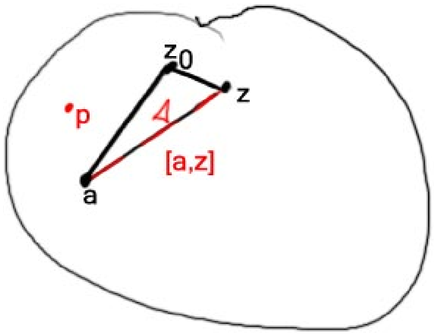


Skizze 53

Satz 2.4. *(*Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete*)*
Sei Ω konvexes Gebiet, $p \in \Omega$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph in $\Omega \backslash \{p\}$, f stetig in Ω. Dann existiert eine (in Ω holmorphe) Stammfunktion F für f (d.h.: $F' = f \in \Omega$) Insbesondere ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden in Ω liegenden geschlossenen Weg γ. (Folgt aus Hilfssatz)







(Skizze 54-56)

Beweis. Sei $a \in \Omega$ fest, $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta, z \in \Omega$ $\quad (\int_a^z f(\zeta)d\zeta)$, $z_0 \in \Omega$ fest

$$0 = \underbrace{\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta}_{F(z)} + \int_{[z,z_0]} f(\zeta)d\zeta + \underbrace{\int_{[z_0,a]} f(\zeta)d\zeta}_{-F(z_0)}$$

$$\Rightarrow F(z) - F(z_0) = -\int_{[z,z_0]} f(\zeta)d\zeta$$

$$\Rightarrow \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = -\frac{1}{z-z_0}\int_{[z,z_0]} f(\zeta)d\zeta - f(z_0)\Big| \div (z-z_0), \quad -f(z_0)$$

$$= -\frac{1}{z-z_0}\int_{[z,z_0]} (f(\zeta)-f(z))d\zeta$$

$$\frac{1}{z-z_0}\int_{[z,z_0]} 1\cdot d\zeta = \frac{1}{z-z_0}\int_z^{z_0} d\zeta$$

$$= \frac{1}{z-z_0}[\zeta]_z^{z_0} = \frac{\cancel{z-z_0}}{\cancel{z-z_0}} = -1$$

$$\frac{1}{z-z_0}\int_{[z,z_0]} f(z_0)d\zeta = -f(z_0)$$

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right|$$

$$\leq \frac{1}{|z-z_0|}|z-z_0| \max_{\zeta\in[z,z_0]} |f(\zeta)-f(z)|$$

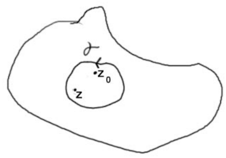
$$\to 0, z \to z_0$$

$\Rightarrow F$ ist holomorph in z_0, $F'(z_0) = f(z_0)$, $z_0 \in \Omega$ beliebig $\square$

Satz 2.5. *(*Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete*)*
Ω konvex. f holomorph in Ω. γ geschlossener Weg in Ω, $z \in \Omega \backslash T(\gamma)$. Dann gilt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)n(z,\gamma)}$$

$$n = 1 \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$



Wenn ich Werte eine Funktion kenne, dann kenne ich auch alle Werte im Inneren vom Kreis (gilt erstmal nur für solche Kreise)

05.11.07

Beweis.

$$z \in \Omega \backslash T(\gamma)$$

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

für $I \in \Omega$. g ist holomorph in $\Omega \backslash \{z\}$ stetig in Ω

$$\begin{aligned} \overset{2.4}{\Rightarrow} 0 &= \int_\gamma g(\zeta)d\zeta = \int_\gamma \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta} - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - f(z)\underbrace{\frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i n(z,\gamma)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

Folgerung. *1. f holomorph in z_0. Dann besitzt f in $U(z_0)$ eine Darstellung als Potenzreihe: $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_k)^k$ Insbesondere ist f in $U(z_0)$ beliebig oft differenzierbar (es existieren die Ableitungen $f^{(k)}(z)$ als holomorphe Funktionen in $U(z_0)$ für $k \in \mathbb{N}$)*

2. Sei f holomorph in Ω, $\overline{K_r(a)} \subset \Omega$ Dann gilt:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\cdot e^{i\phi})d\phi$$

*(*Mittelwertformel für holomorphe Funktionen*)*

$$\gamma(\phi) = a + r\cdot e^{i\phi}$$

$$1\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} f(a + r\cdot e^{i\phi})\frac{\cancel{i}\cancel{r\cdot e^{i\phi}}}{\cancel{re^{i\phi}}}d\phi$$

3. *f holomorph, $f = u + iv$, $\Rightarrow u, v$ harmonisch*

$$\begin{aligned} Re\ f(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\ f(a + re^{i\phi})d\phi \\ \Rightarrow u(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\phi})d\phi \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mittelwertformel für harmonische Funktionen

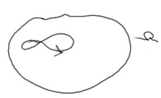
Satz 2.6. *(*Satz von Morera*)*
Sei Ω ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.
Für jedes in Ω gelegene Dreieck Δ gelte

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$$

Dann ist f holomorph in Ω

Beweis.

$$\begin{aligned} z_0 \in \Omega, \overline{K_r(z_0)} &\subset \Omega \\ K_r(z_0) &= \text{Konvex} \\ F(z) &= \int_{[z_o,z]} f(\zeta)d\zeta \\ &\overset{2.4}{\Rightarrow} F \text{ ist Stammfunktion zu } f \text{ in } K_r(z_0) \\ &\Rightarrow F' = f \text{ in } K_r(z_0) \\ &\Rightarrow f \text{ ist holomorph in } K_r(z_0) \\ &\Rightarrow f \text{ ist holomorph in } \Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$



□

Hilfssatz. *Ω Gebiet, γ ein Weg mit $T(\gamma) \subset \Omega$. $g(z, \zeta) : \Omega \times T(\gamma) \to \mathbb{C}$ sei so, dass*

1. $g(\cdot,\zeta)$ holomorph in Ω für $I \in T(\gamma)$

2. $\frac{d}{dz}g(z,\zeta)d\zeta$. Dann ist F holomorph in Ω mit

$$F'(z) = \int_\gamma g'(z,\zeta)d\zeta$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
z_0 &\in \Omega \\
\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} &= \frac{1}{z-z_0}\int_\gamma \underbrace{(g(z,\zeta)-g(z_0,\zeta))}_{\int_{[t_0,z]} g'(t,\zeta)dt} d\zeta \\
\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma g'(z_0,\zeta)d\zeta &= \frac{1}{z-z_0}\int_\gamma \left[\int_{[t_0,z]} g'(t,\zeta)dt - (z-z_0)g'(z_0,\zeta)\right] d\zeta \\
&= \frac{1}{z-z_0}\int_\gamma \int_{[t,z_0]} (g'(t,\zeta)-g'(z_0,\zeta))dt d\zeta \\
\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma g'(z_0,\zeta)d\zeta\right| &\leq \frac{1}{|z-z_0|}L(\gamma)\max_{\zeta\in T(\gamma)}\left|\int_{[z_0,z]}(g'(t,\zeta)-g'(z_0,\zeta))d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{\cancel{|z-z_0|}}L(\gamma)\cancel{|z-z_0|}\max_{\substack{\zeta\in T(\gamma)\\ \underbrace{t\in[z_0,z]}_{\text{kompakt}}}}\left|\underbrace{g'(t,\zeta)-g'(z_0,\zeta)}_{\text{glm stetig}}\right| \to 0 \quad z\to z_0
\end{aligned}$$

□

Satz 2.7. Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete (verallg)
Ω konvex, f holomorph in Ω, γ geschlossener Weg in Ω, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{k+1}}d\zeta = n(z,\gamma)f^{(k)}(z), \quad z \in \Omega\backslash T(\gamma)$$

Beweis. Ω^* Zusammenhangskomponente von Ω ohne $T(\gamma)$. Dort ist $n(z,\gamma) \equiv const$.

$$g(z,\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, (z,\zeta) \in \Omega^* \times T(\gamma)$$

holomorph in Ω^* für $I \in T(\gamma)$ fest.

$$\begin{aligned}
g'(z,\zeta) &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}, \text{ stetig in } \Omega^*\times T(\gamma) \\
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z,\zeta)d\zeta = n(z,\gamma)f(z) \\
\Rightarrow \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta \right.&= \left.\frac{1}{2\pi i}g'(z,\zeta)n(z,\gamma)f'(z)\right]
\end{aligned}$$

...Induktion □

09.11.07

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, Konvergenzradius > 0

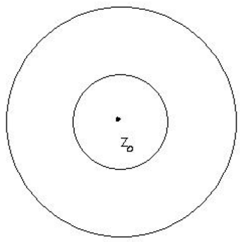
$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} f(z_0) = 0 \qquad\qquad \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k-1}$$

Annahme: $a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0$

$$f(z) = (z-z_0)^{m+1} \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k-(m+1)}}_{\neq 0 \text{ in Umgebung von } z_0}$$

$\Leftrightarrow f$ hat in z_0 eine Nullstelle der *(genauen) Ordnung* $m+1$



Satz 2.8. *(*Satz von der Isoliertheit der Nulstelle*)*
f holomorph in Ω, $f \neq 0$ in Ω, dann ist jede Nullstele z_0 von f in Ω isoliert, das heißt, es gibt ein Kreis $K_\rho(z_0) \subset \Omega$ mit

$$f(z) \neq 0 \text{ in } \in K_\rho(z_0)\backslash\{z_0\}$$

Beweis.

$$A := \{z \in \Omega : \ f \text{ hat in } z \text{ eine } \textit{nicht isolierte Nullstelle}\}$$

1. $z \in \Omega\backslash A \Rightarrow$ entweder z ist isolierte Nullstelle von $f \Rightarrow \exists U_2(z)$ mit $f \neq 0$ in $U_2(z)\backslash\{z\}$ oder $f(z) \neq 0 \Rightarrow f \neq 0$ in $U_1(z) \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \widetilde{z} \in \Omega\backslash\{z\} &\Rightarrow f(\widetilde{z}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \widetilde{z} \text{ ist nicht Nullstelle von } f \\ &\Rightarrow \widetilde{z} \notin A \\ &\Rightarrow \exists U(z) \subset \Omega \text{ mit } U(z) \cup = \emptyset \\ &\Rightarrow U(z) \subset \Omega\backslash A \\ &\Rightarrow A \text{ Abgeschlossen} \end{aligned}$$

2.

$$z_0 \in A \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

$$\exists\{z_j\} \subset \Omega, \qquad f(z_0) = 0, \qquad z_j \to z_0$$

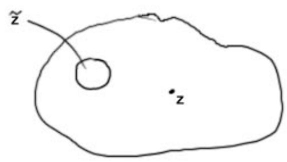
Falls f in z_0 eine m-fache Nullstelle hat, so existiert eine Umgebung $U(z_0)$ mit $f(z) \neq 0, z \in U(z_0) \backslash \{z_0\}$

$$\Rightarrow a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = 0$$

$$z \in U(z_0)$$

$$\Rightarrow U(z_0) \subset A \Rightarrow A \text{ offen}$$

A ist also abgeschlossen *und* offen $\Rightarrow$ A ist also entweder die Nullmenge (nach Bedingung allerdings ausgeschlossen) oder die Allmenge



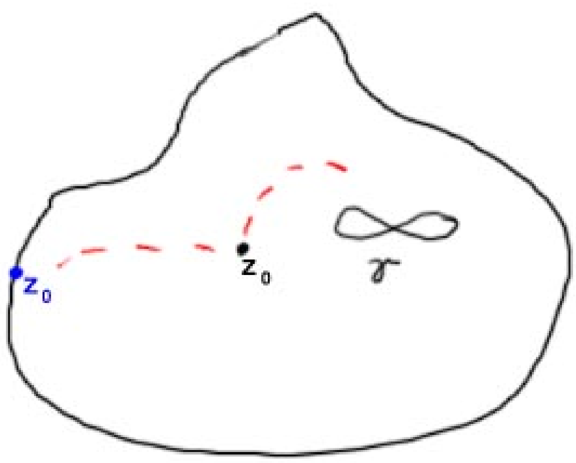
□

Satz 2.9. *(*Identitätsprinzip*) Ω Gebiet, f, g holomorph in Ω. Es gibt einen Punkt $z_0 \in \Omega$, und eine Folge $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \Omega \backslash \{z_0\}$ mit*

$$f(z_0) = g(z_j), \qquad j \in \mathbb{N}$$

Wenn dann $\lim_{j \to \infty} z_j = z_0$*, so gilt*

$$f \equiv g \ \textit{in}\ \Omega$$



Achtung: Der Satz ist* falsch*, wenn man Randpunkte betrachtet!!

Beweis. $h(z) := f(z) - g(z)$ ist holomorph in Ω, $h(z_j) = 0$, $j = 1, \ldots$

$$\Rightarrow \lim_{j \to \infty} \underbrace{h(z_j)}_{=0} \xrightarrow{\text{Stetigkeit}} \boxed{h(z_0) = 0}$$

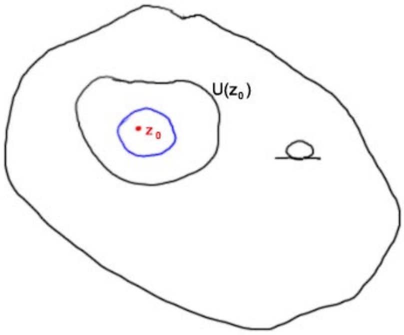
$$\overset{2.8.}{\Rightarrow} h \equiv 0 \text{ in } \Omega \Rightarrow h \equiv g \text{ in } \Omega$$

□

Satz 2.10. *(*Maximumsprinzip*)*
f holomorph in Ω. Es gebe einen Punkt $z_0 \in \Omega$ mit

$$\forall_{z \in U(z_0) \subset \Omega} |f(z)| \leq |f(z_0)|$$

Dan gilt $f(z) \equiv f(z_0)$ in Ω.



Beweis.

Es gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in K_\rho(z_0) \subset U(z_0)$$

Sei $0 < R < \rho$ und $|z|^2 = z\bar{z}$

$$\begin{aligned}
\left|f(z_0 + Re^{i\varphi})\right|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k e^{ik\varphi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} R^k e^{-ik\varphi} \\
&= \sum_{k,j=0}^{\infty} a_k \overline{a_j} R^{k+j} e^{i(k-j)\varphi} \quad \text{(glm. Konvergenz)} \\
\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left|f(z_0 + Re^{i\varphi})\right|}_{\leq |f(z_0)|^2} d\varphi &= \sum_{k,j=0}^{\infty} a_k \overline{a_j} R^{k+j} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\varphi} d\varphi}_{\delta_{k,j}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 R^{2k} \leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2 \\
\Rightarrow a_k &= 0, \quad k = 1, 2 \dots \\
\Rightarrow f(z) &= a_0 \underbrace{(= f(z_0))}_{=a_0} \text{ in } K_\rho(z_0) \\
\overset{\text{Identität}}{\Longrightarrow} f(z) &\equiv a_0 \text{ in } \Omega \text{ und } a_0 = f(z_0)
\end{aligned}$$

□

12.11.07

Maximumsprinzip:
f holomorph im Gebiet Ω, $f \neq 0$.
Dann nimmt $|f|$ in Ω kein lokales/globales Minimum an, es sei denn, $f \equiv 0$.

Beweis. $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ ist holomorph in Ω. Falls $|f|$ in $z_0 \in \Omega$ minimal ist, so hat $|g|$ in z_0 ein Maximum, d.h. also $g = const$ und damit $f = const$. □

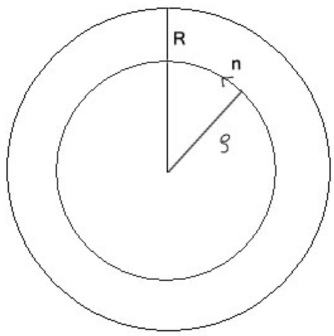
Satz 2.11. *(*Cauchy'scher Abschätzungssatz*)*
f sei holomorph in $K_R(z_0)$.
Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \leq \frac{k!M}{R^k}$$

wobei

$$\boxed{M = \sup_{z \in K_R(z_0)} |f(z)|}$$

Beweis. $0 < \rho < 1$



$$\begin{aligned} f^{(k)}(z_0) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ \Rightarrow \left|f^{(k)}(z_0)\right| &\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \max_{\zeta \in \partial K_\rho(z_0)} \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right| \\ &\leq k! \cdot \rho \cdot M \cdot \frac{1}{\rho^{k+1}} = \frac{k! \cdot M}{\rho^k} \\ \overset{\rho \to R}{\Longrightarrow} \left|f^{(k)}(z_0)\right| &\leq \frac{k! \cdot M}{R^k} \end{aligned}$$

□

Folgerungen:

(i) Unter der gleichen Vorraussetzung

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \\ \Rightarrow |a_k| &\leq \frac{M}{R^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

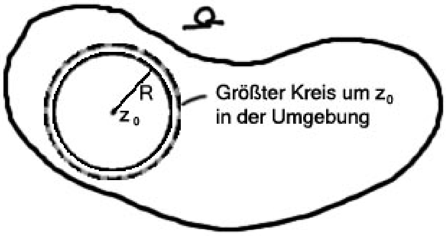
$$\frac{1}{\text{Konvergenzradius}} = \overline{\lim}_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} \qquad \leq \left(\frac{M}{R^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R}$$

Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ ist $\geq R$

(ii) f holomorph in Ω, $z_0 \in \Omega$ insbesondere holomorph in $K_R(z_0)$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Konvergenz in } K_R(z_0)}$$

$\Rightarrow$ holomorphe Fortsetzung



(iii) Falls f in $\mathbb{C}$ holomorph, so besitzt f eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

die f in ganz $\mathbb{C}$ darstellt.

Definition. *Transzednez* Eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2.7}$$

heißt *ganze Funktion*.
Eine ganze Funktion heißt *Polynom*, falls in 2.7 nur endlich viele der Koeffizienten $a_k \neq 0$ sind, andernfalls heißt f *ganz transzendent* $\Rightarrow$ ist *nicht transzendent*, also Beispielsweise $e^x, \cos z, \sin \alpha, \ldots$

Satz 2.12. *Sei f eine ganze Funktion. Es existiere ein $R_0 > 0$, ein $M > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass*

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n, \qquad \forall\, |z| \geq R_0$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$

Bemerkung. $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \Rightarrow n = deg\ (P) = grad\ (P)$
Genauer: P ist vom genauen Grad n, *falls $a_n \neq 0$*

Beweis. f holomorph in $K_R(0)$, $R \geq R_0$, (nach Vorraussetzung: $|f(z)| \leq M \cdot R^n \quad \forall\, |z| \leq R$)

$$\begin{aligned} \overset{2.11}{\Rightarrow} |a_k| &\leq \frac{M \cdot R^n}{R^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ &= \frac{M}{R^{k-n}} \end{aligned}$$

Für $k > n$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{M}{R^{k-n}} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \\ \Rightarrow a_k &= 0, \qquad k > n \\ \Rightarrow f(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \\ &\Rightarrow f \text{ Polynom mit } \deg(P) \leq n \end{aligned}$$

□

Satz 2.13. *(*Satz von Liouville*)*
Sei f eine ganze Funktion und es gelte $|f(z)| \leq M < \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dann ist $f \equiv const$

Beweis. Wie in Satz 2.12, nur mit $n = 0$ □

Beispiel.

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \begin{cases} z = x & \to & +\infty \\ z = -x & \to & +\infty \end{cases}$$

Hilfssatz.

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

vom genauen *Grad n $(a_n \neq 0)$. Dann existiert ein $R_0 > 0$ mit:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n \leq |P(z)| &\leq \frac{3}{2}|a_n| \cdot |z^n|, \quad |z| \geq R_0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a_n| \leq \frac{|P(z)|}{|z^n|} &\leq \frac{3}{2}|a_n| \end{aligned}$$

Beweis.

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot z^{k-n}}_{A(z)} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |P(z)| &\leq |a_n z^n| \cdot |1 + A(z)| \leq |a_n z^n| \cdot (1 + |A(z)|) \\ |P(z)| &\geq |a_n z^n| \cdot (1 - |A(z)|) \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass für ein geeignetes R_0 und alle $|z| \geq R_0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} |A(z)| &\leq \tfrac{1}{2} \\ |A(z)| &\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \cdot |z|^{k-n} \xrightarrow{|z|\to\infty} \end{aligned}\right\} \exists R_0, \text{ mit } |z| \geq R_0$$

$$\Rightarrow |A(z)| \leq \frac{1}{2}$$

□

16.11.07

Satz 2.14. *(*Fundamentalsatz der Algebra*) Ein Polynom vom* genauen *Grad $n \geq 1$ hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, die Vielfachheiten mitgezählt*

Beweis. **(i)** Annahme: P habe keine Nullstelle in $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \tfrac{1}{P} \text{ ist ganze Funktion}\\
&\Rightarrow \left|\tfrac{1}{P(z)}\right| \leq \tfrac{2}{|a_n||z|^n}, \quad |z| \geq R_0\\
&\Rightarrow \left|\tfrac{1}{P(z)}\right| \leq \tfrac{2}{|a_n|R_0^n}, \quad z \geq R_0\\
&\Rightarrow \tfrac{1}{P} \text{ ist Polynom vom Grad } 0\\
&\Rightarrow P \text{ ist konstant } (P \equiv \text{const Wiederspruch zur Annahme!!})\\
&\Rightarrow P \text{ hat (mindestens eine) Nullstelle}
\end{aligned}$$

(ii) $Q(z) = \frac{P(z)}{z-z_0}$ wobei z_0 eine Nullstelle von P ist. ($\Rightarrow P(z_0) = 0$)

$$|Q(z)| \leq \frac{|P(z)|}{|z-z_0|} \overset{|z|\geq R_0}{\leq} \frac{3}{2} \cdot \frac{|a_n| \cdot |z^n|}{|z-z_0|} = \underbrace{\frac{3}{2}|a_n| \cdot \frac{|z|}{|z-z_0|}}_{\leq M \;\; \substack{|z| \geq R_0 \\ |z| \geq 2\cdot|z_0|}} |z|^{n-1}$$

$$\Rightarrow Q \text{ ist ein Polynom vom Grad} \leq n-1$$

$$|Q(z)| \geq \underbrace{\frac{1}{2}|a_n|}_{\neq 0} \underbrace{\frac{|z|^n}{|z-z_0|}}_{\urcorner |z|^{n-1}}$$

$$\Rightarrow Q(z) \text{ ist Polynom vom genauen Grad } (n-1)$$

$$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} P \text{ hat genau } n\text{-Nullstellen}$$

□

$$\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty, \qquad \lim_{z\to\infty} \left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \neq 0$$

$$e^z \begin{matrix} \nearrow \infty & z \to +\infty \\ \searrow 0 & z \to -\infty \end{matrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Satz 2.15. *(*Casorati- Weierstraß*)*
Sei f ganz transzendent. Dann gibt es zu jedem $\omega \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Folge $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ mit:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \omega$$

Beweis. Anahme: $\exists_{\omega\in\mathbb{C}}, \quad _{\varepsilon>0}\forall_{|z|\geq R_0} |f(z)-\omega| > \varepsilon$
$g(z) := f(z)$ ist ganz transzendent, $g \neq 0$ in $|z| \geq R_0$. g hat in $|z| \geq R_0$ nur endlich viele Nullstellen.
(Falls g im Kompaktum $|z| \leq R_c$ ∞-viele Nullstellen hätte, so gäbe es einen Häufungspunkt

mit $g(z_{HP}) = 0 \to$ Wiederspruch zur beschränktheit der Nullstellen!)
Nullstellen: $z_1, \dots, z_n$ Vielfachheiten berücksichtigt

$$G(z) := \frac{g(z)}{\prod_{k=1}^n (z - z_k)} \quad \text{hat in } |z| \leq R_0 \text{ keine Nullstelle}$$

$G(z)$ ist ganz
$\Rightarrow \frac{1}{G(z)}$ ist ganz.
Für $|z| \geq R_0$:

$$\left|\frac{1}{G(z)}\right| \leq \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^n (z - z_n)}{g(z)}}_{\text{grad}\equiv 0} \leq \frac{\overbrace{M}^{=\text{const}}}{\varepsilon} \; |z|^n$$

$\Rightarrow \frac{1}{G(z)}$ ist Polynom vom Grad $\leq n$ (da $\frac{1}{G(z)}$ keine Nullstelle hat)
$\overset{2.14}{\Rightarrow} \frac{1}{G(z)} \equiv c = \text{const}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(z) &= \frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (z - z_k) \\ \Rightarrow f(z) &= \underbrace{\frac{1}{c} \prod_{k=1}^n (z - z_k) + w}_{\text{Polynom}} \end{aligned}$$

Wiederspruch zur Annahme, dass f ganz-transparent. $\square$

Satz 2.16. *f sei holomorph in $\mathbb{D} = \{z := |z| < 1\}$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.*
Falls $f(0) = 0$ so gilt:

(i) $|f(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$

(ii) $|f'(0)| \leq 1$

*Das Gleichheitszeichen „=" in **(i)** (für ein $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$) und **(ii)** gilt genau für die Funktion $f(z) = \lambda \cdot z$ mit $|\lambda| = 1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$*

Eine andere Formulierung des Satzes 2.16 ist:

Satz. *$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, $f(0) = 0$*

1. $|f(z)| \leq |z|, z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$

2. $|f'(z)| \leq 1$

„=" kann nur für Funktionen $f(z) = \lambda z$ auftreten, $|\lambda| = 1$

Beweis. $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ holomorph in $\mathbb{D}$.
Sei $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
\underbrace{|g(z_0)|}_{|z_0|<R<1} &\leq \max_{|z|=R} |g(z)| \leq \max_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z|} \\
&\leq \frac{1}{R} \\
&\text{für } R \to 1 \leq 1 \lim_{R\to 1} \frac{1}{R} && \Rightarrow |g(z)| \leq 1 \text{ in } \mathbb{D} \\
\textbf{(i)} &\Rightarrow |f(z)| \leq |z| \qquad \forall_{z\in\mathbb{D}} \\
\textbf{(ii)} &\underbrace{|g(0)|}_{\leq 1} = \left|\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}\right| = \left|\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right| = |f'(0)| \leq 1
\end{aligned}$$

Gleichheit in $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| &&= 1 \\
\Rightarrow |g(z_0)| &&= 1 \\
\overset{\max}{\Rightarrow} g(z) &&\equiv \lambda = \text{const} \\
|\lambda| &&= 1 \\
\Rightarrow f(z) &= \lambda \cdot z \quad \forall_{z\in\mathbb{D}}, &|\lambda| = 1 \\
|f'(0)| = 1 \\
|g(0)| = 1
\end{aligned}$$

$\overset{\max}{\Rightarrow} \ldots$ (analog)
$\Rightarrow f(z) = \lambda \cdot z$, $|\lambda| = 1$ □

19.11.07

Bemerkung. *Falls f um $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ besitzt, so gilt:*

$$|f(z)| \leq |z|^n, \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$$

Bemerkung. *Die Funktion $f(z) = \lambda\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$, $z \in \mathbb{D}$ mit $|\lambda| = 1$ und $z_0 \in \mathbb{D}$ sind die* Automorphismen *von $\mathbb{D}$ (d.h. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph bijektiv)*

$$\begin{aligned}
|f(z)| = \frac{z-z_0}{1-\overline{z}_z z} \qquad &= |\lambda| \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right| z \in \partial\mathbb{D} \;\; = |\lambda| \left|\frac{\overline{z}z - z_0\overline{z}}{1-\overline{z}_0 z}\right| \\
&= \underbrace{|\lambda|}_{=1} \underbrace{\left|\frac{1-z_0\overline{z}}{1-\overline{z}_0 z}\right|}_{=1} = 1
\end{aligned}$$

$\mathbb{D} \ni \omega = \lambda\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$ *hat genau eine Lösung $z \in \mathbb{D}$*

Annahme: *$g \in Aut(\mathbb{D})$,*

$$\begin{aligned}
g(0) &= 0 \\
&\Rightarrow |g'(0)| \leq 1 \\
h(\omega) &= g^{-1}(\omega \in Aut(\mathbb{D})) \\
h(0) = 0 &\Rightarrow |h'(0)| \leq 1 \\
h'(0) = \frac{1}{g'(0)} &\Rightarrow |g'(0)| \geq 1 \\
&\Rightarrow |g'(0)| = 1 \\
\Rightarrow (2.16) g(z) &= \lambda z, |\lambda| = 1 \\
g \in Aut(\mathbb{D}), g(x) &= 0, x \in \mathbb{D} \\
h(z) = \underbrace{g\left(\frac{x+z}{1+\overline{x}z}\right)}_{\in Aut(\mathbb{D})} &\in Aut(\mathbb{D}) \\
h(0) == &\Rightarrow h(z) = \lambda z \\
\Rightarrow g\left(\underbrace{\frac{x+z}{1+\overline{x}z}}_{\omega(z)}\right) &= \lambda z \\
&\Rightarrow g(z) = \lambda \omega^{-1}(z)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f \in Aut(\mathbb{D}) \Leftrightarrow f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}}$$

Satz 2.17. *(*verallg. Schwarzes Lemma*) (*Lemma von Schwarz-Pick*)*
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{D}$. Dann gilt:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{1 - \overline{z}_0 z}$$

$z \in \mathbb{D}$, „=“ gilt nur für $f \in Aut(\mathbb{D})$

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ holomorph}$$
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| f(re^{i\varphi}) \right|^2}_{\leq 1 \quad 0<r<1} d\varphi = \left[\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq 1 \right]$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leq 1 \qquad (\Rightarrow |a_k| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad f(z) = z^k)$$
$$|a_0|^2 + |a_1|^2 \leq 1$$
$$\Leftrightarrow |f'(0)|^2 \leq 1 - |f(0)|^2$$
$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \frac{\left| 1 - \overline{f(z_0)} f(z) \right|}{|1 - \overline{z}_0 z|}$$
$$\overset{z \to z_0}{\Longrightarrow} |f'(z_0)| \leq \frac{\left| 1 - |f(z_0)|^2 \right|}{\left| 1 - |z_0|^2 \right|}$$

$$\boxed{|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}}$$

$$\overset{z_0 = 0}{\Longrightarrow} \boxed{|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2}$$

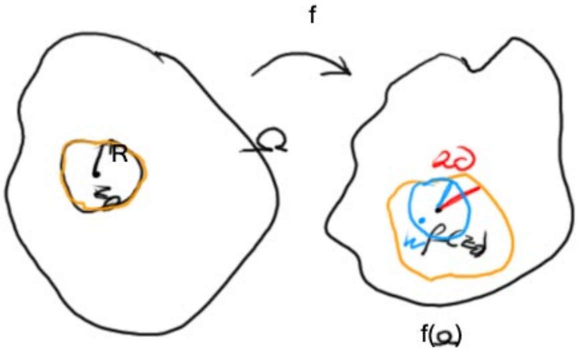
Beweis.

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{f(\frac{\zeta + z_0}{1 + \overline{z}_0 \zeta}) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(\frac{\zeta + z_0}{1 + \overline{z}_0 \zeta})} \\ &= W\left(f\left(\frac{\zeta - z_0}{1 + \overline{z}_0 \zeta} \right) \right), \quad W \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \\ &= W(f(w(\zeta))), \quad W, w \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \\ f &: \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad F(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\overset{2.16}{\Rightarrow} \left. \begin{array}{l} |F(\zeta)| \leq |\zeta|, \quad \zeta \in \mathbb{D} \\ \zeta = w^{-1}(z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \end{array} \right\} \left| F(w^{-1}(z)) \right| \leq \left| w^{-1}(z) \right|$$
$$\Rightarrow |W(f(z))| \leq \left| w^{-1}(z) \right| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \right|$$
$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \right|$$

□

Satz 2.18. *(*Satz von der Gebietstreue*) Ω Gebiet, f holomorph in Ω, $f \not\equiv const$. Dann ist $f(\Omega)$ auch Gebiet*



Beweis.
Wir wählen $\overline{\varepsilon}$ so, dass:

1. $\overline{K_\varepsilon(z_o)} \subset \Omega$

2. $f(z) \neq f(z_0)$, $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$ (Falls ein solches ε nicht existiert, so wäre $f \equiv const$ Wiederspruch zur Annahme)
   Sei $\delta := \frac{1}{2}\mathrm{dist}(f(\partial K_\varepsilon(z_0)), f(z_0))$
   Sei $w \in K_\varepsilon(f(z_0))$ beliebig.

$$|w - f(z_0)| < |w - f(z)|\,, \quad z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$$
$$g(z) := f(z) - w, \qquad \text{holomorph in } \Omega$$
$$|g(z_0)| < |g(z)|\,, \quad z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$$

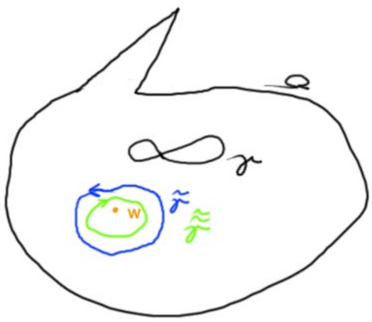
   Das Minimumsprinzip führt zu:
   $\Rightarrow g$ hat in $K_\varepsilon(z_0)$ eine Nullstelle, $g(z_1) = 0$
   $\Rightarrow f(z_1) = w$
   $\Rightarrow w \in f(K_\varepsilon(z_0))$
   $\Rightarrow K_\delta(f(z_0)) < f(K_\varepsilon(z_0))$
   $\Rightarrow f(\Omega)$ offene Menge

□

23.11.07

Ω Gebiet, konvex, f holomorph in Ω, γ geschlossener Weg in Ω

$$\Rightarrow \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$$



$F(z)$ holomorph in $\Omega\backslash\{w\}$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} F(\zeta)d\zeta$$

Beispiel.

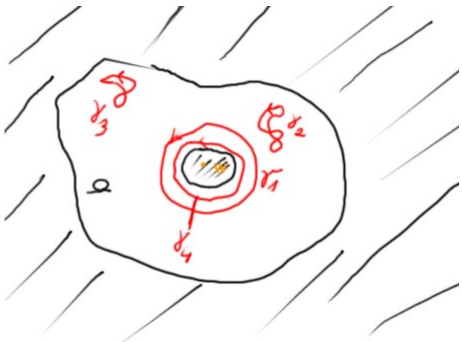
$$F(z) = \frac{1}{z-w}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 1 \neq 0$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}+\tilde{\tilde{\gamma}}} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \qquad = 0$$

Definition. Ω Gebiet, y_j, $j = 1 \ldots n$ geschlossener Wege in Ω, $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, n$

1. Dann heißt $\Gamma := m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \ldots m_n\gamma_n$ ein *Zykel* in Ω. Für $z \notin T(\Gamma)$ definiert man die Windungszahl von Γ bzgl z ($n(z,\Gamma)$) als

$$\sum_{j=1}^{n} m_j n(z, \Gamma_j)$$

2. Ein Zykel Γ heißt *null-homolog* falls $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$



$$\Gamma := \underbrace{-\gamma_1}_{\text{Null-Homolog}} + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

3. Zwei Zykel Γ_1, Γ_2 in Ω heißen *Homolog*, wenn

$$\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Nullhomolog ist

Satz 2.19. *: (*Cauchyscher Integeralsatz*)*
Ω Gebiet, f holomorph in Ω, Γ null-homologer Zykel in Ω. Dann gilt

(i) $n(z,\Gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $z \in \Omega\backslash T(\Gamma)$

(ii) $\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 0$

Beweis. 1.

$$g(z,\zeta):\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$$

$$g(z,\zeta)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}, & z\neq\zeta(z,\zeta)\in\Omega^2\\ f'(\zeta), & z=\zeta\in\Omega\end{cases}$$

ist stetig in $\Omega\times\Omega$
$(a,b)\in\Omega\times\Omega$.

(i) $a\neq b\surd$

(ii) $a=b$

$$\begin{aligned}&|g(z,\zeta)-g(a,a)|\\ z\neq\zeta=&\left|\frac{1}{z-\zeta}\int_{[\zeta,z]}f'(t)dt-\frac{1}{z-\zeta}\int_{[\zeta,z]}f'(a)dt\right|\\ =&\left|\frac{1}{z-\zeta}\int_{[\zeta,z,]}(f'(t)-f'(a))dt\right|\\ \leq&\frac{1}{|\zeta-z|}|z-\zeta|\max_{t\in[\zeta,z]}|f'(t)-f'(a)|\overset{(z,\zeta)\to(a,a)}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

wegen **(ii)** gilt:$\zeta=z$

$$|g(z,z)-g(a,a)|=|f'(z)-f'(a)|\overset{z\to a}{\longrightarrow}0$$

2.

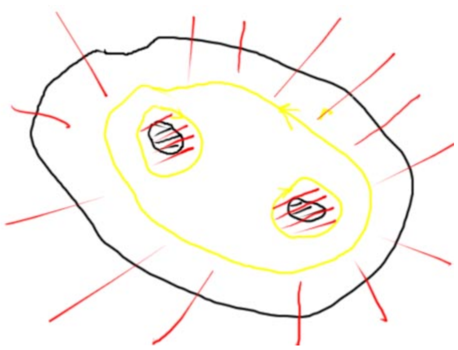
$$h(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta,z)d\zeta,\quad z\in\Omega$$

Sei $\Delta\subset\Omega$ Dreieck

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta}h(z)dz&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\int_\Gamma g(\zeta,z)d\zeta dz\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\underbrace{\int_\Delta g(\zeta,z)dz\,d\zeta}_{\text{Goursat}=0}\right)=0\end{aligned}$$

Morera: h holomorph in Ω

3. $\Omega':=\{z\in\mathbb{C}\backslash T(\Gamma):n(z,\Gamma)=0\}$



$$\Rightarrow \Omega \cup \Omega' = \mathbb{C}$$

$$\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset \text{ enthält offene Menge} \varphi(z) = \begin{cases} h(z) & z \in \Omega \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, & z \in \Omega' \end{cases}$$

$\underbrace{z \in \Omega' \cup \Omega}_{(\notin T(\Gamma))}$

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \\ &= -f(z)n(z,\Gamma) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ ist in $\mathbb{C}$ definiert, holomorph in $\mathbb{C}$
$\Rightarrow \varphi$ ganz

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$|z| \text{ groß}, \ \rightarrow z \in \Omega'$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2\pi i} L(\Gamma) \max_{\zeta \in T(\Gamma)} |f(\zeta)|}_{=M<\infty} \cdot \max_{\zeta \in T(\Gamma)} \frac{1}{|\zeta - z|} \xrightarrow{z \to 0} 0$$

$$\Rightarrow \varphi(z) \to 0, \quad z \to \infty$$

$$\Rightarrow \varphi \equiv 0$$

$\Rightarrow$ für $z \in \Omega$:

$$f(z)n(z,\Gamma) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \textbf{(i)}$$

(Beweis nach *Dixon* (1972) **(ii)**

$$a \in \Omega \backslash T(\Gamma), \quad F(z) := (z-a)f(z) \text{ holomorph in } \Omega$$

$$\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} n(a,\Gamma)\underbrace{F(a)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta) d\zeta$$

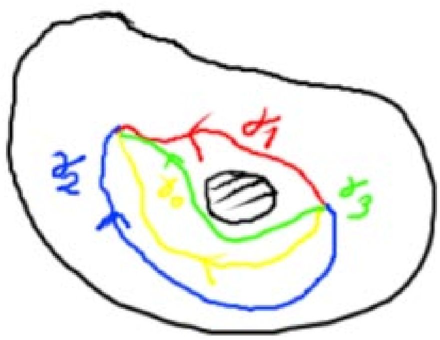
□

26.11.07

Ω Gebiet,

$$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$$

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$



Definition. γ_0, γ_1 heißen *homotop* (in Ω), falls es eine stetige Funktion

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

gibt, für die gilt:

1. $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, $t \in [0,1]$
2. $H(s,0) = \gamma_0(0)$, $H(s,t) = \gamma_1(t)$, $s \in [0,1]$

(Skizze Rechteck y= s, x=t, Rot grün Gelber Strich, Grün teilt die Fläche in der Mitte, Bereich: 0-1)

Definition. Ein geschlossener Weg γ in Ω heißt *null-homotop*, wenn er homotop zu dem Punktweg $\gamma^*(t) = \gamma(0)$ ist

Bemerkung. *Homotopie von Wegen in Ω mit gleichen Anfangs und Endpunkt ist eine Äquivalenzrelation (γ_0 γ_1)*

Definition. Ω Gebiet ist einfach zusammenhängend, falls jeder geschlossene Weg in Ω *null-homotop* ist

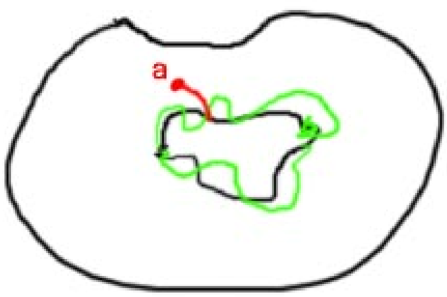
Satz 2.20. *Sei Ω Gebiet, $\gamma_0, \gamma 1$ geschlossene Wege in Ω, homotop. Dann sind γ_0, γ_1 auch homolog bzgl. Ω*

Hilfssatz 1. *γ_0, γ_1 geschlossene Wege in Ω, für ein $a \in \mathbb{C} \backslash \Omega$ gelte*

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_0(t) - a|\,, \quad t \in [0,1]$$

Dann gilt

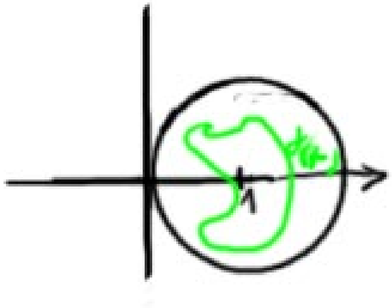
$$n(a, \gamma_0) = n(a, \gamma)$$



Beweis.

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_0(t) - a}{\underbrace{\gamma_1(t) - a}_{\neq 0}}, \qquad t \in [0,1]$$

$$|\gamma(t) - 1| = \left| \frac{\gamma_1(t) - a}{\gamma_0(t) - a} - 1 \right| = \left| \frac{\gamma_0(t) - \gamma_1(t)}{\gamma_0(t) - a} \right| < 1$$

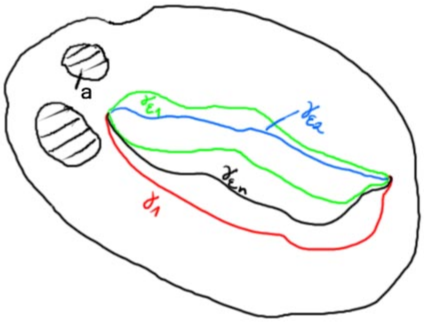


$\Rightarrow n(0,\gamma) = 0$

$$n(0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - 0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\dot\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)-a}dt - \int_0^1 \frac{\dot\gamma_0(t)}{\gamma_0 - a}dt \quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta - a} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{d\zeta}{\zeta - a} = n(a,\gamma_1) - n(a,\gamma_0)$$

□



Beweis.

mit:

- H ist glm stetig in $[0,1]\times[0,1]$
- $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$

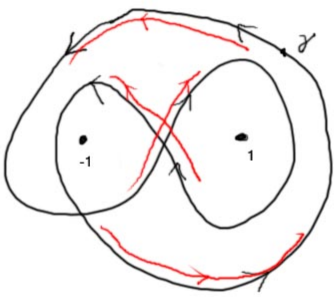
Aus dem Hilfssatz folgt:

$$\left.\begin{array}{r} n(a,\gamma_0) = n(a,\gamma_{\varepsilon_1}) \\ n(a,\gamma_{\varepsilon_1}) = n(a,\gamma_{\varepsilon_2}) \\ \vdots n(a,\gamma_{\varepsilon_n}) = n(a,\gamma_1) \end{array}\right\} \Rightarrow n(a,\gamma_0) = n(a,\gamma_1)$$

$\Rightarrow \gamma_0$ homolog γ_1 □

Beispiel 2.21.

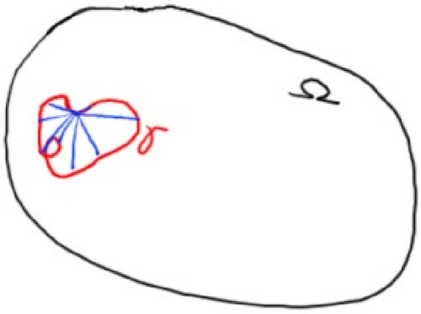
$$\Omega = \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$$



nicht null homotop

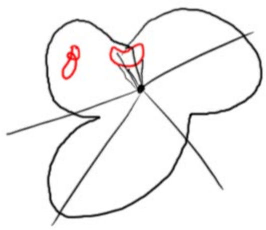
$$n(-1,\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta \pm 1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta \pm 1} = 0$$

Null homolog



Bemerkung.

$$\begin{aligned} H(s,t) :=& (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0) \\ 0 \leq& s \leq 1 \\ 0 \leq& t \leq 1 \\ \square \to& \Omega \Rightarrow \qquad \qquad \gamma \textit{ null-Homotop} \end{aligned}$$



Ω *Sternförmig* $\Rightarrow$ Ω *einfach zusammenhängend*

Satz 2.22. (allgemeiner Cauchy Integralsatz) *Ω einfach zusammenhängend, γ geschlossenere Weg in Ω, f holomorph in Ω*

$$\Rightarrow \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$$

Beweis. γ geschlossen$\Rightarrow$ γ null homotop
$\Rightarrow \gamma$ ist null homolog
$\Rightarrow \int_\gamma f(\eta)d\zeta = 0$ $\square$

3. Isolierte Singularitäten

30.11.07

$$A_{s,r}(z_0) = \{z : s < |z - z_0| < r\}$$
$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r$$
$$\widetilde{F}_2(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k, \quad |w|\, y \frac{1}{\varrho}$$
$$F_2(z) :\, = \widetilde{F}_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \qquad |z - z_0| > s$$
$$|z - z_0| < r \qquad |z - z_0| > s$$
$$f(z) = F_1(z) + F_2(z) \quad \text{holomorph in } A_{s,r}(z_0)$$

$$f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad \begin{cases} a_k, & k \geq 0 \\ b_{-k}, & k \leq -1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Definition. Eine Reihe der Form 3.1 heißt *Laurent-Reihe*. Der Abschnitt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ heißt *Nebenteil von f*, der Abschnitt $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k$ heißt *Hauptteil von f* der Laurentreihe.

Satz 3.1. *Eine in $A_{s,r}(z_0)$ holomorphe Funktion f besitzt eine in $A_{s,r}(z_0)$ konvergente Laurentreihendarstellung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Diese Reihe ist in $A_{s,r}$ kompakt konvergent und absolut konvergent. Für die Koeffizienten c_k gilt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

wobei $\gamma = z_0 + \varrho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, und $s < \varrho < r$

Beweis. Sei $K \subset A_{s,r}(z_0)$ kompakt, γ_1, γ_2 Kreise mit Mittelpunkt z_0 und so, dass K zwischen γ_1 und γ_2 liegt.
Beüglich $A_{s,r}(z_0)$ sind γ_1, γ_2 homolog, $\gamma_0 := \gamma_2 - \gamma_1$.

Dann gilt für alle z zwischen γ_1 und γ_2; z zwischen $\gamma_1$und γ_2

$$\begin{aligned}
\underbrace{n(z,\gamma_0)}_{=1} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} = \\
f(z) &= +\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\right) f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right) f(\zeta)d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}(\zeta - z_0)^k f(\eta)d\zeta\right)}_{c_{-(k+1)}=c_{-k-1}}(z-z_0)^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta\right)}_{c_k}\cdot(z-z_0)^k \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\cdot(z-z_0)^k
\end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{\underbrace{1-\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}_{<1 \text{ für } \zeta\in\gamma_2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \quad \text{absolut, glm konvergent} \\
\zeta\in\gamma_1 &= -\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta - z_0}{z-z_0}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}
\end{aligned}$$

Nebenrechnung Ende $\gamma - \gamma_1$ ist Nullhomolog in $A_{s,r}(z_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\dots d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\dots d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\dots d\zeta$$

$\gamma - \gamma_2$ folgt absolut analog.
Spezialfall: $A_{0,r}(z_0)$ in z_0 punktierte Kreisscheibe (Skizze: Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r)
f holomorph in $0 < |z-z_0| < r$ wobei 0 und r nicht dabei sind.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

$\Rightarrow z_0$ ist *isolierte Singularität* □

Beispiel.

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k \qquad 0 > |z| < \infty F\left(\frac{1}{2}\right) \quad = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^k$$

ist ganz.

Definition. Sei

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

mit einer *isolierten Singularität* z_0, dann heißt z_0:

1. eine *hebbare Singularität*, falls $c_k = 0$, $k < 0$
2. eine *Polstelle der genauen Ordnung* $m > 0$, falls $c_k = 0$, $k \leq -m - 1$, $c_{-m} \neq 0$
3. eine *wesentliche Singularität*, falls unendlich viele der Koeffizienten c_k, $k < 0$, von Nul verschieden sind.

Satz 3.2. *(*Riemannscher Hebbarkeitssatz*)*
Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$ (das heißt, es existiert $\varrho > 0$, sodass f holomorph ist in $a < |z - z_0| < \varrho$). Falls eine Konstante $M < \infty$ existiert mit

$$|f(z)| \leq M, \quad 0 < |z - z_0| < \varrho$$

dann ist die singularität hebbar (das heißt, es existiert eine holomorphe Fortsetzung von f in dem Punkt z_0)

Beweis.

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z), & 0 < |z - z_0| < \varrho. \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

ist stetig in $|z - z_0| < \varrho$, holomorph in $0 < |z - z_0| < \varrho$
$\overset{\text{Goursat}}{\Rightarrow} \forall_\Delta$ Dreiecke in $K_\varrho(z_0)$ gilt $\int_{\partial\Delta} g(\zeta) d\zeta = 0$
$\overset{\text{Morera}}{g}$ ist holomorph in $K_\varrho(z_0)$.
$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$ ist auch *holomorph (ergänzbar)* in z_0 □

3.12.07

Wiederholung der letzten VL f hat isolierte Singluarität in $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < \varrho$$

(i) Singularität behebbar $\Leftrightarrow a_k = 0$, $k < 0$

(ii) Singularität ist Polstelle $\Leftrightarrow$ nur endlich viele $a_k \neq 0$ für $k < 0$
Polstelle der genauen Ordnung m falls $a_{-m} \neq 0$, $a_k = 0$, $k < -(m + 1)$

(ii) Singularität ist

Bemerkung. *(*Liuvile*) g ganz, $|g(z)| \leq M$, $\quad z \in \mathbb{C} \Rightarrow g \equiv const$*

$$\begin{aligned} [f(z) :&= g\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k} \quad \text{Laurent-Reihe } z_0 = 0 \end{aligned}$$

f hat isolierte Singularität in $z_0 = 0$

$$|f(z)| \leq M \text{ in } z \in IC\backslash\{0\}$$

$$\overset{3.2}{\Rightarrow} b_k = 0 \quad k \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow f(z) \equiv b_0$$

$$\Rightarrow g(z) \equiv b_0]$$

Satz 3.3. *f habe in z_0 isolierte Singularität. Dann besitzt f in z_0 eine Polstelle der genauen Ordnung m, falls es Konstanten $0 < M_1, M_2 < \infty$ gibt mit*

$$M_1 \leq |f(z)(z - z_0)^m| \leq M_2$$

für alle z mit $z < |z - z_0| < \varrho$.

Beweis. **(i)** f habe eine Polstelle der Ordnung m, d.h.:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^m$$

mit $a_{-m} \neq 0$

$$f(z)(z - z_0)^m = a_{-m} + \underbrace{\sum_{k=-m+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}}_{\text{holomorph in } z_0, \quad =0 \text{ in } z=z_0}$$

Wähle $\varrho > 0$ mit $\left|\sum_{k=-m+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}\right| \leq \frac{1}{2} |a_{-m}|$, $|z - z_0| < \varrho$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} |a_{-m}|}_{M_1} \leq |f(z)(z - z_0)^m| < \underbrace{\frac{3}{2} |a_{-m}|}_{M_2}$$

(ii) $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ hat auch isolierte Singularitäten in z_0

$$\Rightarrow M_1 \leq |g(z)| \leq M_2 \qquad 0 < |z - z_0| < \varrho \tag{3.2}$$

$\Rightarrow z_0$ ist hebbar für $g(z)$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

$$\Rightarrow \left\{ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-m} \right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ hat Polstelle der Ordnung } \leq m \\ \Rightarrow (g(z_0) \neq 0) \Rightarrow b_0 \neq 0, \quad b_0 \; a_{-m} \end{array}$$

$b_0 \neq 0 =$*genaue* Ordnung m

□

Satz 3.4. *(*Casorati- Weierstraß*)*
f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Dann ist z_0 wesentlich, genau dann, *wenn*

$$\forall_{\varrho > 0} \overline{f(A_{0,\varrho})} = \overline{\mathbb{C}} \tag{3.3}$$

]

Beweis. Falls 3.3 nicht gilt, so existiert

$$w \in \mathbb{C} = \exists_{\varrho>0} \overline{f(A_{0,\varrho})} \cup K_2(w) = \emptyset$$
$$\Rightarrow |f(z) - w| \geq \varepsilon, \quad |z - z_0| < \varrho$$
$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \text{ ist holomorph in } |z - z_0| < \varrho$$
$$\Rightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad |z - z_0| < \varrho$$
$$\overset{3.2}{\Rightarrow} g(z) \text{ holomorph in } z_0$$
$$\Rightarrow g(z) = (z - z_0)^m G(z) \qquad G(z_0) \neq 0$$
$$\Rightarrow f(z) - w = \frac{1}{(z - z_0)^m G(z)}$$
$$= \frac{1}{(z - z_0)^m} \widetilde{G}(z), \quad \widetilde{G} \text{ holomorph in } U(z_0)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m}$$
$$\Rightarrow f(z) - w = \sum_{k=-m}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \Rightarrow f(z) \qquad \text{hat in } z_0 \text{ einen P}$$
$$\Rightarrow f(z) \text{ hat in } z_0 \textit{ keine} \text{ wesentliche Singularität}$$

□

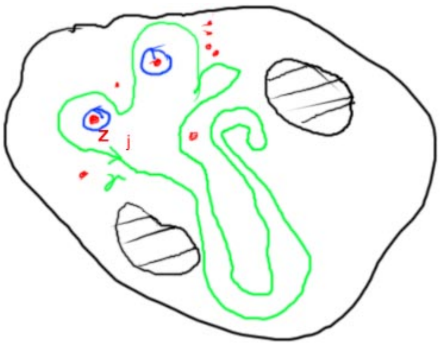
Definition. *Residuum* f habe in z_0 eine isolierte Singularität, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Dann heißt der Koeffizient a_{-1} das *Residuum* von f in z_0.

$$a_{-1} =: \operatorname{res}_{z_0} f$$

$$\left(a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial k_\varepsilon(z_0)} f(\zeta) d\zeta \right)$$

Satz 3.5. *(*Residuensatz*)*
Ω Gebiet, f holomoprh in Ω bis auf islierte Singularitäten z_j, $j \in I$. γ sei Zykel in Ω, null-homolog, und es gelte $z_j \neq T(\gamma), j \in I$
Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in \Omega} n(z, \gamma) res_{\ f}$$



Beweis.

Die Summe $\sum_{z\in\Omega} n(z,\gamma)\mathrm{res}_z f$ hat nu endlich viele von Null verschiedene Terme, nämlich für die $z = z_j$ mit $n(z,\gamma) \neq 0$. Diese z_j seien normiert als $z_1, \dots, z_n$ o.B.d.A
Wähle $K_{\varepsilon_j} \subset \Omega$ mit $T(\gamma) \cap K_{\varepsilon_j}(z_j) = \emptyset$, $\overline{K_{\varepsilon_j(z_j)}} \cap \overline{K_{e_s}(z_s)}$, $j = 1, \dots, n$

$$\gamma^* := S\gamma - \sum_{j=1}^{n} n(z_j,\gamma)\partial K_{\varepsilon_j}(z_j)$$

Zu zeigen: γ^* null homolog bezüglich $\Omega\backslash\{z_1, \dots z_n\}$.

$$\begin{aligned}
&a \in \mathbb{C}: \\
&n(a,\gamma^*) = n(a,\gamma) - n\left(a, \sum_{j=1}^{n} n(z_j,\gamma)\partial K_{\varepsilon_j}(z_j)\right) \\
&\qquad = \underbrace{n(a,\gamma)}_{=0} - \sum_{j=1}^{n} Sn(z_j,\gamma)\underbrace{n(a,\partial K_{\varepsilon_j}(z_j))}_{=0} \\
&a = z_s \\
&n(z_s,\gamma^*) = n(z_s,\gamma) - \sum_{j=1}^{n} n(z_j,\gamma)\underbrace{n(z_s,\partial K_{\varepsilon_j}(z_j))}_{\delta_{j,s}} \\
&\qquad = n(z_s,\gamma) - n(z_s,\gamma) = 0
\end{aligned}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta - \sum_{j=1}^{n} n(z_j,\gamma)\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{\varepsilon_j}(z_j)} f(\zeta)d\zeta}_{\mathrm{res}_{z_j} f}$$

□

07.12.07

Definition. Ω Gebiet, f holomorph in Ω bis auf Polstellen. Dann heißt f *meromorph* in Ω
$\forall g \not\equiv 0$ f, g holomorph $\to \frac{f}{g}$ meromorph

Satz 3.6. *(*Log. Residuum*)* *Ω Gebiet, f* meromorph *in Ω, f habe in Ω Nullstellen $a_j, j = 1, \dots, n$ mit en Vielfachheiten u_j, Polstellen $b_j, j = 1, \dots, m$ mit Vielfachheiten p_j. Weiter hin sei γ null-homolog in Ω, $a_j, b_j \notin T(\gamma)$. F sei holomorph in Ω.*
Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(\zeta) = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{j=1}^{n} u_j n(a_j,\gamma)F(a_j) - \sum_{j=1}^{m} p_j n(b_j,\gamma)F(b_j)$$

Beweis. $F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist meromorph in Ω mit singularitäten (Polstellen) genau in den Punkten

a_j, b_j.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma H(\zeta)d\zeta &= \sum_{z\in\Omega} n(z,\gamma)\operatorname{res}_z H\\
\operatorname{res}_{a_j} H(z)\\
f(z) &= (z-a_j)^{n_j}G(z), \quad G \text{ holomorph in } a_j, G(a_j)\neq 0\\
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n_j}{z-a_j}+\frac{G'(z)}{G(z)},\\
F(z) &= F(a_j)+(z-a_j)g(z)\\
F(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= (F(a_j)+(z-a_j)g(z))\left(\frac{n_j}{z-a_j}+\frac{G'(z)}{G(z)}\right)\\
&= \underbrace{\frac{n_jF(a_j)}{z-a_j}}_{\text{Hauptteil}}+\underbrace{n_jg(z)+F(a_j)\frac{G'(z)}{G(z)}+(z-a_j)g(z)\frac{G'(z)}{G(z)}}_{\text{holomorph in } a_j}
\end{aligned}
$$

Analog folgt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{b_j} H(z) &= -p_jF(b_j)\\
f(z) &= (z-b_j)^{-p_j}G(z) \quad G \text{ holomorph in } b_j, G(b_j)\neq 0\\
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-p_j}{z-b_j}+\frac{G'(z)}{G(z)},\\
F(z) &= F(b_j)+(z-b_j)g(z)\\
F(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= (F(b_j)+(z-b_j)g(z))\left(\frac{-p_j}{z-b_j}+\frac{G'(z)}{G(z)}\right)\\
&= \underbrace{\frac{-p_jF(b_j)}{z-b_j}}_{\text{Hauptteil}}+\underbrace{-p_jg(z)+F(b_j)\frac{G'(z)}{G(z)}+(z-b_j)g(z)\frac{G'(z)}{G(z)}}_{\text{holomorph in } b_j}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma H(\zeta)d\zeta = \sum n(z,\gamma)\operatorname{res}_z H = \sum_{j=1}^{n} n(z,\gamma)n_jF(a_j) - \sum_{j=1}^{m} n(b_j,\gamma)p_jF(b_j)
$$

□

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=z} &= \frac{ze^z}{z^2+\tau^2}dz, \qquad \tau\in\mathbb{R}\\
f(z) := (z^2+\tau^2) &= (z+i\tau)(z-i\tau), \quad z=\pm i\tau \quad \textit{1. Ordnung}\\
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{2z}{z^2+\tau^2},\\
F(z) &= e^z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=z}\frac{2ze^z}{z^2+\tau^2}dz &= \frac{1}{2}\left(F(\tau)+F(-i\tau)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\tau}+e^{-i\tau}\right) = \cos\tau
\end{aligned}
$$

Satz 3.7. *(*Argument Prinzip*)*
f meromorph in Ω. $\Omega^* \subset \Omega$, $\gamma := \partial\Omega^*$ Zykel in Ω. f habe auf $\partial\Omega^*$ keine Nullstellen und Polstellen.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = N - P$$

Wobei

- *N:= Anzahl der Nullstellen von f in Ω^**
- *P:= Anzahl der Polstellen von f in Ω^**

Beweis. in Satz 3.6. Setze $F = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta &= \sum_{j=1}^{n} n_j - \sum_{j=1}^{m} p_j \\
&= N - P \\
\partial\Omega^* : \gamma(t), 0 \le t \le 1 & \\
N - P &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}{f(\gamma(t))}dt \\
&= -j\frac{2\pi}{\int}^1_0 \frac{f(\dot{\gamma}(t))}{f(\gamma(t))}dt \\
&= \operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{f(\dot{\gamma}(t))}{f(\gamma(t))}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \operatorname{Im}\left[\frac{d}{dt}\log g(\gamma(t))\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\arg f(\gamma(t))\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0))\right]
\end{aligned}$$

□

Beispiel.

$$f(z) = z^2, \quad |z| = 1 \quad f(e^{it}) = e^{2it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Kreis wird schneller durchlaufen!
$f(z) = \frac{1}{z}$
$f(e^{it}) = e^{-it}$ *Kehr umlaufrichtung Um!*
$f(z) = \frac{z}{1-z}$, $|z| = z$ *Sie kehren die Umlaufrichtung, das Argument darf sich nach einem kompletten Umlauf nicht verändern.*

Satz 3.8. *(*Satz von Rouche*)*
Ω Gebiet, Ω^* Gebiet, $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$, $\partial\Omega^*$ Zykel, f, g holomorph in Ω.

$$\forall_{z\in\partial\Omega^*} |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

$\Rightarrow f, g$ haben in Ω^* die gleiche Anzahl von Nullstellen.

Eine andere Formulierung des Satzes von Rouche ist

Satz.

$$|g(z)| < |f(z)| + |(f+g)(z)|$$

$\Rightarrow f,\ f+g$ *haben gleiche Zahl an Nullstellen.*

Folgerung. *(*Fundamentalsatz der Algebra*)*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \neq 0$$

hat in $\mathbb{C}$ genau n *Nullstellen.*

Beweis.

$$\exists_{R<\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq |a_k|\, R$$

Sei R irgendeine solche Zahl. (Skize 157)

$$\begin{aligned} |z| = R : |P(z) - a_n z^n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\ &\leq sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, R^k \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) R^{n-1} \\ &\leq |a_k|\, R^n = |a_n z^n| \leq |a_n z^n| + |P(z)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \underbrace{P(z)}_{f} + \underbrace{(-a_n z^n)}_{g} \right| < \underbrace{|-a_n z^n|}_{g} + \underbrace{|P(z)|}_{f}$$

$\Rightarrow P$ und $a_n z^n$ haben gleiche Anzahl von Nullstellen in $|z| < R$
$\Rightarrow$ Behauptung □

10.12.07

Beweis. f, g holomorph auf $\partial\Omega^*$ keineNullstellen. Die Funktion $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$, $z \in \Omega$, ist *meromorph* in Ω. Sei $t > 0$:

$$I_t := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega^*} \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta) - t} d\zeta$$

Falls $h(\zeta) = t$ für ein $\zeta \in \partial\Omega^*$

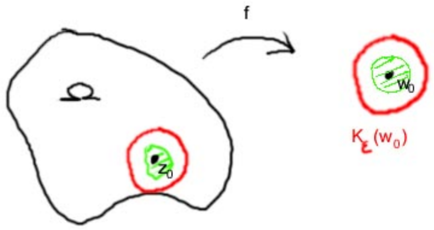
$$f(\zeta) = tg(\zeta) \Rightarrow |f(\zeta) + g(\zeta)| = |f(\zeta)| + |g(\zeta)|\, (Wiederspruch)$$

$\Rightarrow I_t = N_t - P$ von h in Ω^* ist stetig in $t \geq 0$, I_t liefert nur ganze Zahlen
$\Rightarrow I_t \equiv$ const $\lim_{t\to\infty} I_t = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow I_t = 0, \quad t \geq 0 \Rightarrow I_0 = 0 \\ I_0 &= \frac{1}{2ii} \int_{\partial\Omega^*} \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega^*} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta}_{N(f)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega^*} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta}_{N(g)} = 0 \end{aligned}$$

□

Satz 3.9. *(*Satz von der Gebietstreue*)*
Ω, f holomorph in Ω, $f \not\equiv$ const. $\Rightarrow f(\Omega)$ ist Gebiet



Beweis.

$$
\begin{aligned}
& w_0 = 0 \\
\Rightarrow\ & f(z) = w_0 + a_k(z-z_0)^k + (z-z_0)^k G(z) \\
& \text{mit } a_k \neq 0 G(z_0) = 0 \\
& \Rightarrow \exists_{\varepsilon>0} \forall_{|z-z_o|\le\varepsilon} |G(z)| < |a_k| \\
& \Rightarrow \forall_{z\in\partial K_\varepsilon(z_0)} \left|(f(z)-w_0) + (-a_k(z-z_0)^k)\right| = |z-z_0|^k |G(z)| \\
& \quad < \left|a_k(z-z_0)^k\right| \le \left|a_k(z-z_0)^k\right| + |f(z)-w_0|
\end{aligned}
$$

Wobei der letzte Term mit $G(z)$ in vielen Büchern weggelassen wird, da er in diesem Falle keinen weiteren Einfluss hat

$$
\Rightarrow \exists_{\mu>0} \forall_{w\in K_\mu(w_0)}
$$
$$
\forall_{z\in K_\varepsilon(z_0)} \left|(f(z)-w) + (-a_k(z-z_0)^k)\right| < \left|a_k(z-z_0)^k\right| (+|f(z)-w|)
$$

$\Rightarrow f-w$ hat in $K_\varepsilon(z_0)$ die geleiche Anzahl von Nullstellen wie die Funktion $a_k(z-z_0)^k$, nämlich k
Das heißt also der Wert $w \in K_\varepsilon(z_0)$ hat ein Urbild in $K_\varepsilon(z_0)$
$\Rightarrow K_\mu(w_0) \subset f(K_\varepsilon(z_0)) \subset f(\Omega)$
$\Rightarrow f(\Omega)$ offen
$\Rightarrow f(\Omega)$ Gebiet
(K_μ ist das Grüne Gebiet) □

Bemerkung. $(k=1)$
falls $f'(z_0) \neq 0$, so sit f in einer kleinen *Umgebung von z_0 injektiv*

Satz 3.10. *(*Existenz der Inversen*)*
Ω Gebiet, $z \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$, $w_0 = f(z_0)$. Seien μ, ε wie im vorhergehenden Beweis. Dann existiert $f^{-1}(w)$ in $K_\mu(w_0)$ und ist dort holomorph*; es gilt demnach in $K_\mu(w_0)$:*

$$
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w} d\zeta = f^{-1}(w) \tag{3.4}
$$

Beweis. Es genügt 3.4 zu Beweisen.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \overbrace{\zeta}^{F(\zeta)} \frac{f'(\zeta)}{\underbrace{f(\zeta)-w}_{f(\zeta)}} d\zeta &\overset{3.6}{=} F(f^{-1}(w)) \\
&= f^{-1}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung. *Falls F in $\overline{K_\varepsilon(z_0)}$ holomorph ist, so gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{F(\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta = F(f^{-1}(w))$$

Bemerkung. *f habe in z_0 eine Polstelle der Ordnung $\geq m$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_0} f &= \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\Big|_{z=z_0} \\
[f(z) &= \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \\
\Rightarrow (z-z_0)^m f(z) &= \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m} \\
\Rightarrow \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\big|_{z-z_0} &= \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \frac{(k+m)!}{(k+m-(m-1))!}(z-z_0)^{k+(m-1)+m}\Big|_{z=z_0} \\
&= \sum_{k=-1} \infty a_k \frac{(n+m)!}{(k-(m-1)+m)!}(z-z_0)^{k+1}\Big|_{z=z_0} = a_{-1}(m-1)!
\end{aligned}$$

14.12.07

Satz 3.11. *(*Formel von Burmann-Lagrange*)*
Es sei Ω ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$, und F und f seien holomorph in z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$. Damit ist $F \circ f^{-1}$ holomorph in $w_0 := f(z_0)$ und besitzt um w_0 eine Entwicklung$(F \circ f^{-1})(w) = \sum_{k=0}^{\infty}(w-w_0)^k$ mit $a_0 = F(z_0)S$ und:

$$a_k = \frac{1}{k!}\left[F'(z)\left(\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right)^k\right]^{(k-1)}\Bigg|_{z=z_0}$$

für alle $k \geq 1$

Beweis. wegen $f'(z_0) \neq 0$ gibt es nach Satz 3.10 ein $\varepsilon > 0$, sodass f in $B_\varepsilon(z_0) = \overline{K_\varepsilon(z_0)}$S injektiv ist. Nach Offenheitsprinzip gibt es ein $\delta > 0$ sodass $K_\varrho(w_0) \subseteq f(K_\varepsilon(z_0))$
Nach Satz 3.6 ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{F(z)f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{\substack{f(z)=w \\ z\in K_\varepsilon(z_0)}} F(z) = F(f^{-1}(w))$$

für alle $w \in K_\varrho(w_0)$
Mit dem Hilfssatz von 2.7 dem Residuensatz und der obigen Bemerkung zur Berechnung von

Residuen folgt für alle $k \geq 1$, wenn o.E. $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k!}(F \circ f^{-1})(w) = \frac{1}{2\pi i \cdot k!}\left(\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{F(z)f'(z)}{f(z)-w}dz\right)^{(k)}\Bigg|_{w=w_0} \\
&= \frac{1}{2\pi i \cdot k!} \cdot (k!) \cdot \int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{F(z)f'(z)}{(f(z)-w)^{k-1}}\Bigg|_{w=w_0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{F(\varepsilon e^{it})f'(\varepsilon e^{it})}{(f(\varepsilon e^{it})-w)^{k+1}}\varepsilon e^{it} dt\Bigg|_{w=w_0} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{k}\frac{F(\varepsilon e^{it})}{(f(\varepsilon e^{it})-w)^k}\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{F'(\varepsilon e^{it})\varepsilon i e^{it}}{(f(\varepsilon e^{it})-w)^k}dt\Bigg|_{w=w_0} \\
&= 0 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{F'(z)}{(f(z)-w)^k}dz\Bigg|_{w=w_0} \\
&= \left(\frac{1}{k}\sum_{z \in K_\varepsilon(z_0)} \operatorname{res}_z \frac{F'(z)}{(f(z)-w)^k}\right)\Bigg|_{w=w_0} \\
&= \frac{1}{k}\operatorname{res}_{z_0} \frac{F'}{(f-w)^k} = \frac{1}{k(k-1)!}\left(\frac{F'(z)(z-z_0)^k}{(f(z)-f(z_0))^k}\right)^{(k-1)} \\
&= \frac{1}{k!}\lim_{z \to z_0}\left[F'(z)\left(\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right)^k\right]^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

□

3.1. Logarithmusfunktion

Es sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ist $\log w \in \mathbb{C}$ ein Logarithmus von w, d.h. $e^{\log w} = w$ so gilt:

$$|w| \cdot e^{i\arg(w)} = w = e^{\log w} = e^{\operatorname{Re}(\log w)+\operatorname{Im}(\log w)} = e^{\operatorname{Re}(\log w)} \cdot e^{\operatorname{Im}(\log w)}$$

und es folgt $\log|w| = \operatorname{Re}(\log w)$ und $\operatorname{Im}(\log w) = \arg(w) + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Durch $\log w := \log|w| + i\arg(w) + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind also für alle $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ Logarithmen von w definiert.

Zur Darstellung: Verwende

Durch die Exponentialfunktion wird jeder Streifen $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\}$ (mit $a \in \mathbb{R}$) bijektiv und holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ abgebildet. Jedoch ist deren Umkehrabbildung nicht mehr stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Der offene Streifen $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\}$ wird durch Exponentialfunktion bijektiv und holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{te^{ia}|t > 0\}$ also auf eine geschlitzte Ebene abgebildet. Dort besitzt exp eine nach Satz 3.10 holomorphe Umkehrfunktion, das heißt einen *holomorphen Logarithmus*. Insbesondere existiert für $S := \{z \in \mathbb{C}| -\pi < \operatorname{Im} < \pi\}$ eine *holomorphe Umkehrabbildung* von exp auf $W := \exp(S) = \mathbb{C}\backslash\,]-\infty, 0]$, der sogenannte *Hauptzweig des Logarithmus*, also

$$\log := (\exp|_S)^{-1}$$

Satz 3.12. *(*Existenz von Logarithmen*)*
Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und F sei holomorph und nullstellenfrei in Ω. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h in Ω mit $e^h = F$

Beweis. Es sei ein $a \in \Omega$ fixiert und $c \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass $e^C = F(a)$. Für $z \in \Omega$ sei γ_z ein Weg von $a = \gamma_z(0)$ nach $z = \gamma_z(1)$ Es sei:

$$h(z) = \int_{\gamma_z} \frac{F'}{F}(\zeta) d\zeta + c \quad \text{für alle } z \in \Omega$$

Da wegen des einfachen Zusammenhangs jeder geschlossene Weg in Ω *nullhomotop* und damit *nullhomolog* in Ω ist und $\frac{F'}{F}$ wegen der Nullstellenfreiheit von F holomorph in Ω ist, ist nach dem globalen Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\gamma \frac{F'}{F}(\zeta) d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in Ω. Daher ist $\int_{\gamma_z} \frac{F'}{F}(\zeta) d\zeta$ unabhängig von der Wahl des Weges γ_z und $h(z)$ daher *wohldefiniert* S Es ist h holomorph in Ω mit $h' = \frac{F'}{F}$ (vrgl. Beweis des Cauchyscher Integralsatzes). Damit folgt:

$$(Fe^{-k}) = e^{-k} \dot{F}' e^{-k} F h' = e^{-k} \cdot F \cdot \left(\frac{F'}{F} - h' \right) = 0$$

und $h(a) = c$

das heißt

$$e^{h(a)} = e^c = F(a)$$

Daher ist $F = e^h$ □

Beispiel. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin \Omega$*

1. *Für $F(z) = z$ folgt aus dem Satz die Existenz einer holomorphen Logarithmus auf Ω, das heißt, $e^{h(z)} = z$ für alle $z \in \Omega$*
2. *Es sei $a \in \mathbb{C}$. Darum setzt man $z^a := e^{a \cdot \log z}$ für alle $z \in \Omega$ mit einer beliebigen Logarithmusfunktion* log *auf Ω.*

Bemerkung. *Auf $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ existiert kein holomorpher Logarithmus, denn es ist*

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

Das heißt $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ keine Stammfunktion

17.12.07

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \to \infty} \arctan x \Big|_{-R}^{R} = \pi$$

(Skizze Halbkugel mit Punkt i)

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} &= 2\pi i \\
\operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} &= \operatorname{res}_i \frac{1}{(z+i)(z-i)} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{\cancel{z-i}}{(z+i)\cancel{(z-i)}} \\
&= \frac{1}{2i} \\
\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{2it}} dt \\
\text{mit } \widetilde{\gamma}_R(t) &= Re^{it}, \qquad 0 \le t \le \pi \\
\lim_{R\to\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{2it}} dt \right| &\le \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{R}{|1+R^2e^{2it}|} dt \\
&\le \lim_{R\to\infty} \pi \frac{R}{R^2-1} = 0 \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi
\end{aligned}
$$

Methode:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(z)=0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{res}_z \frac{P(x)}{Q(x)}
$$

P, Q Polynome, $\deg P \leq \deg Q - z$ $Q \neq 0$ auf $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} = \operatorname{Re} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

(Skizze Rechteck, durchlaufen gegen Uhrzeigersinn)

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^{R} + \int_{[R,R+iR]} + \int_{[R+iR,-R+iR]} + \int_{[-R+iR,-R]}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2} &= \ldots = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{z+i} \\ &= \frac{e^{-1}}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{e^{i(R+iR)}}{1+(R+itR)^2} \right| &\leq \int_0^1 \frac{e^{-tR} R}{\underbrace{|1+R^2(1+it)^2|}_{\geq R^2-1}} dt \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} \frac{e^{-tR} R}{R^2-1} \\ &\leq \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big[\Rightarrow \frac{\pi}{e} &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \Big] \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned} \widetilde{\ }(t) &= (1-t)R + t(R+iR) \\ &= R + itR \\ 0 \leq t &\leq 1 \end{aligned}$$

Nebenrechnung Ende

Methode:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(x)=0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{res}_z \frac{e^{ix} P(x)}{Q(x)}$$

P, Q seien reelle Polynome. $\deg P \leq Q - 1$ $Q \neq 0$ auf $\mathbb{R}$

4. Grenzprozesse bei holomorphen Funktionen

4.1. Produktsatz von Weierstraß

Satz 4.1. *(*Satz von Weierstraß*)*
Ω Gebiet, f holomorph in Ω, $f_n \to f$ lokal gleichmäßig. (das heißt, gleichmäßig in jedem Kompaktum $\mathcal{K} \subset \Omega$).
Dann gilt:

(i) *f ist holomorph in Ω*

(ii) $\forall_{\in\mathbb{N}} f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *lokal gleichmäßig in Ω*

Beweis. **(i)** Dreieck $\bar{\Delta} \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
\forall_{n\in\mathbb{N}} 0 = \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz &\quad \overset{\substack{\text{wegen glm.} \\ \text{Konvergenz auf} \\ \partial\Delta}}{\longrightarrow} \quad \int_{\partial\Delta} f(z)dz \\
\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 &\overset{\text{Morera}}{\Rightarrow} f \text{ ist holomorph in } \Omega \\
(Skizze)\text{oBdA:} k = 1 & \\
\widetilde{\mathcal{K}} := \{z : \exists_{z_0\in\mathcal{K}} |z - z_0| \leq R\} & \text{ ist kompakt in } \Omega \\
z_0 \in \mathcal{K} & \\
|f'(z) - f_k'(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{1}{R^2} \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \\
&\leq \frac{1}{R} \max_{I \in \widetilde{\mathcal{K}}} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

also gleichmäßig in $\mathcal{K}$ □

Bemerkung. *Ω Gebiet. Es existiert eine ausschöpfende Folge von kompakten $\mathcal{K}_k$:*

(i) $\mathcal{K}_n \subset \dot{\mathcal{K}}_{n+1} \subset \Omega$

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n = \Omega$

f, g holomorph in Ω:

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f(z)-g(z)\|_{\mathcal{K}_n}}{1+\|f(z)-g(z)\|_{\mathcal{K}_n}}$$

mit $\|f(z)-g(z)\| := \max_{z\in\mathcal{K}} |f(z)-g(z)|$ Metrik auf den Raum der in Ω holomorphen Funktionen. $\mathcal{H}(\Omega)$ abgeschlossener metrischer Raum der in Ω holomorphen Funktionen

Satz 4.2. Satz von Hurwitz
$\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_n(z) \neq 0$ in Ω, $n \in \mathbb{N}$ Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert lokal gleichmäßig in Ω gegen $f(\in \mathcal{H}(\Omega))$. Dann gilt:
entweder $f \equiv 0$
Oder $f(z) \neq 0$ in Ω.

Beweis 4. Annahme: $f \not\equiv 0$, aber $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \Omega$.

$$|f(z)| \geq \varepsilon > 0, \; |z-z_0| = R$$
$$\exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} \forall_{|z-z_0|=R} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall_{n \geq n_0} \forall_{|z-z_0|=R} |f_n(z) - f(z)| < |f(z)| + |f_n(z)|$$

$\overset{\text{Rouche 3.8}}{\Longrightarrow}$ $f_n(z)$ und $f(z)$ haben in $|z-z_0| < R$ die gleiche Anzahl von Nullstellen, mindestens eine! Widerspruch zu $f_n(z) \neq 0$ in Ω.

Satz 4.3. Satz von Hurwitz 2
Ω Gebiet, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, f_n injektiv in Ω, $n \in \mathbb{N}$. $\{f_n\}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen f. Dann gilt: Entweder ist f konstant
Oder injektiv in Ω

Beweis 5. Es haben z_1 und z_2 zwei disjunkten Umgebungen.

$$f \not\equiv \text{const}$$
$$f(z_1) = f(z_2) = w$$
$$(f_n(z) - w)$$
$$\Downarrow$$
$$(f(z) - w)$$

4.1.1. Partialbruchzerlegung

P, Q Polynome:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \overbrace{S(z)}^{\text{auch Polynom}} + \frac{\widetilde{P}(z)}{Q(z)};$$
$$\deg(\widetilde{P}) < \deg(Q)$$
$$\widetilde{R}(z) := \frac{\widetilde{P}(z)}{Q(z)}$$

$z_1, \ldots, z_n$ Nullstellen von Q ($\widehat{=}$ Polstellen von $\widetilde{R}$)

$$M_j(z) = \sum_{k=-P_j}^{-1} \frac{A_{k,j}}{(z-z_j)^k} \qquad j = 1, \ldots, m$$

Betrachte: $\widetilde{R} - \sum_{j=1}^{m} M_j(z)$ ist ganz (und sei ein rationales Polynom) und geht gegen 0 (für $z \to \infty$).

Satz 4.4. Satz von Mittag-Leffler
$z_j \to \infty$ Folge in $\mathbb{C}$,

$$H_j(z) = \sum_{c=1}^{P_j} \frac{A_{j,k}}{(z - z_j)^k}$$

seien (beliebig) vorgegebene „Hauptteile“*. Dann existiert eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $H(z)$, die in $\Omega := \mathbb{C} \backslash \{z_j\}$ holomorph ist, und in den z_j die Hauptteile H_j „besitzt“. Die allgemeine Lösung dieses Problemes ist*

$$H + G, \qquad G \text{ ganz}$$

Beispiel. $z_j \in \mathbb{Z}$, $H_j(z) = \frac{1}{(z-j)^2}$ $\qquad z_j = j$, *und*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} \qquad \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 \text{ ist Lösung davon}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin \pi z}{\pi} &= (-1)^j \frac{\sin \pi (z-j)}{\pi} \qquad j \in \mathbb{Z} \\
&= (-1)^j \frac{1}{\pi}\left[\pi(z-j) - \frac{1}{3!}\pi^3 (z-j)^3 + \cdots\right] \\
&= (z-j)(-1)^j \left[1 + \underbrace{Q(z)}_{\substack{\text{Nullstelle 2.er Ord-} \\ \text{nung in } z=j}}\right] \\
\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 &= \frac{1}{(z-j)^2} \cdot \frac{1}{(1+Q(z))^2} \\
&= \frac{1}{(z-j)^2}\left[1 + \frac{1}{(1+Q(z))^2} - 1\right] \\
&= \frac{1}{(z-j)^2}\left[1 + \frac{1+2Q+Q^2-1}{(1+Q(z))^2}\right] \\
&= \frac{1}{(z-j)^2} + F(z), \qquad F \text{ holomorph in } z=j
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-j)^2} = G(z) \quad \text{mit } G(z) \text{ ganz.}
$$

$$
\begin{aligned}
G\left(\frac{z}{2}\right) + G\left(\frac{z+1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{(\sin \pi \frac{z}{2})^2} + \frac{\pi^2}{\underbrace{\sin \pi \frac{z+1}{2}}_{\cos \pi \frac{z}{2}}} - \sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{z}{2}-j\right)^2} - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{z+1}{2}-j\right)^2} \\
&= \frac{\pi^2 \left(\left(\sin\left(\pi\frac{z}{2}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\pi\frac{z}{2}\right)\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\sin \pi z\right)^2} \\
&\quad - \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{4}{(z-2j)^2}}_{\text{grade Anteile}} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{4}{(z-(2\cdot j-1))^2}}_{\text{ungerade Anteile}}\right) \\
&= 4 \cdot \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - 4 \cdot \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-j)^2} \\
&= 4 \cdot G(z) \\
M(R) &:= \max_{|z|\le R} |G(z)|, \qquad R > 0 \\
M(z) &= |G(z_0)| = \frac{1}{4}\left|G\left(\frac{z_0}{2}\right) + G\left(\frac{z_0+1}{2}\right)\right| \\
&\le \frac{1}{4}\left(\underbrace{M(1)}_{\le M(2)} + \underbrace{M\left(\frac{3}{2}\right)}_{\le M(2)}\right) \\
&\le \frac{1}{2} M(2) \\
\Rightarrow (2) = 0 &\Rightarrow G \equiv 0 \\
&\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-j)^2}}, \quad \text{da } G \equiv 0
\end{aligned}
$$

07.01.08

Beweis. Ohne Einschränkung sei $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ Es sei $B_j = B_{\frac{1}{2}|z_j|}(0) = \overline{K_{\frac{1}{2}|z_j|}(0)}$. Es sei außerdem $\varepsilon_j > 0$ so gewählt, dass $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon < \infty$ (zum Beispiel $\varepsilon_j := \frac{1}{2^j}$).
In $K_{|z_j|}(0)$ ist H_j holomorph und besitzt eine dort kompakt gleichmäßig konvergente Taylorentwicklung $H_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} z^k$. (Auf B_j ist die Konvergenz also gleichmäßig). Also gibt es $k_j \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| H_j(z) - \sum_{k=0}^{k_j} b_k^{(j)} z^k \right| < \varepsilon_j$$

für alle $z \in B_j$ und alle j.
Es sei

$$g_j(z) := \sum_{k=0}^{k_j} b_k^{(j)} z^k \text{ und } H := \sum_{j=1}^{\infty} (H_j - g_j)$$

Es sei ein $R > 0$ gegeben. Es gibt dann ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_j| \geq 2R$ für alle $j \geq j_0$. Es ist dann $B_R(0) \subseteq B_j$ für $j \geq j_0$.
Als ist

$$|H_j(z) - g_j(z)| < \varepsilon_j$$

für alle $z \in B_R(0)$ und alle $j \geq j_0$.
Somit ist $\sum_{j=1} \varepsilon_j$ konvergente Majorante für $\sum_{j=j_0}^{\infty} (H_j - g_j)$ in $B_R(0)$. Also ist $\sum_{j=j_0}^{\infty} (H_j - g_j)$ gleichmäßig in $B_R(0)$ konvergent.
Nach dem Konvergenzsaz von Weierstraß (**??**) ist $\sum_{j=j_0}^{\infty} (H_j - g_j)$ holomorph in $B_R(0)$. Weiter ist $\sum_{j=1}^{j_0-1} (H_j - g_j)$ rational, also meromorph in $\mathbb{C}$ mit Polstellen in $K_R(0)$ in den z_j mit $z_j \in K_R(0)$ und zugehörigen Hauptteil H_j. Daher ist

$$H = \sum_{j=1}^{j_0-1} (H_j - g_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} (H_j - g_j)$$

meromorph in $K_R(0)$ mit Polstellen in den $z_j \in K_R(0)$ und Hauptteilen H_j. In $K_R(0)$ hat H also die gewünschten Eigenschaften. Da $R > 0$ beliebig gewählt war, hat H in ganz $\mathbb{C}$ die gewünschten Eigenschaften.
Mit H hat also auch $H + F$ für jede ganze Funktion F die gewünschten Eigenschaften.
Ist $\widetilde{H}$ meroporph in $\mathbb{C}$ mit Polstellen z_j und Hauptteilen H_j, so ist $\widetilde{H} - H = F$ ganz und $\widetilde{H} = H + F$ □

Bemerkung. *Die sogenannten* Mittag-Leffler Reihe *aus dem Beweis ist absolut konvergent, so dass man die Summationsreihenfolge beliebig ändern darf.*

4.2. Der Produktsatz von Weierstraß

Definition. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(p_n)_n$ der partiellen Produkte $p_n := \prod_{k=1}^{n} a_k$ in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beispiel. *Für $a_k := \frac{1}{n}$ ist $p_n = \frac{1}{n!}$, das heißt,* $\lim_{n \to \infty} p_n = 0$. *Für unendliche Produkte gilt also* keine Nullstellenfreiheit*!*

Bemerkung. *Für $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)-1 \tag{4.1}$$

und

$$\prod_{j=1}^{n}(1+|u_k|) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{|u_k|} = e^{\sum_{k=1}^{n}(u_k)} \tag{4.2}$$

Beweis. Aus $1+x \leq e^x$ für $x \geq 0$ folgt Formel 4.2.
Für $n=1$ ist 4.1 klar. Es sei

$$\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1+u_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n-1}(1-|u_k|)-1$$

gültig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\right| &= \left|(1+u_k)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+u_k)-1\right)+_k\right| \\
&\leq u_k(1+|u_k|)\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1+u_k)-1\right|+|u_k| \\
&\leq (1+|u_k|)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+|u_k|)-1\right)+|u_k| \\
&= \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)-1
\end{aligned}$$

also die Behauptung.
Per Induktion ist damit Formel 4.1 bewiesen □

Satz 4.5. *Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $(f_k)_k$ eine Folge stetiger Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$, so dass $\sum_{k=1}^{\infty}$ kompakt gleichmäßig in Ω konvergiert. Dann ist*

$$F := \prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k)$$

kompakt glechmäßig konvergent in Ω, und jede Nullstelle von F ist Nullstelle eines der Faktoren $1+F_k$.

Beweis. Es sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Auf K ist $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|$ gleichmäßig konvergent und daher (wegen der Stetigkeit der f_k) stetig und nimmt auf K ein Maximum an. Es gibt also ein $C > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(z)| \leq C\forall_{z\in K}$$

Es sei

$$p_n := \prod_{k=1}^{n}(1+f_k).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}|p_n(z)| &\leq \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(z)|) \\ &\leq e^{\sum_{k=1}^{n}|f_k(z)|} \\ &\leq e^{\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(z)|} \\ &\leq e^C \qquad \forall_{z\in K}\forall_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m+1}^{n}|f_k(z)| \leq \log\left(1+\frac{\varepsilon}{e^C}\right) \qquad \forall_{z\in K}\forall_{n,m\in\mathbb{N}} N < m < n$$

Mit Formel 4.1 und Formel 4.2 folgt dann für alle $z \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq N$

$$\begin{aligned}|p_n(z)-p_m(z)| &= |p_m(z)| \cdot \left|\prod_{k=m+1}^{n}(1+f_k)-1\right| \\ &\overset{4.1}{\leq} |p_m(z)| \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n}(1+f_k)-1\right) \\ &\overset{4.2}{\leq} |p_m(z)| \cdot \left(e^{\sum_{k=m+1}^{n}|f_k(z)|}-1\right) \\ &\leq e^C \cdot \left(e^{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{e^C}\right)}-1\right) \\ &= \varepsilon\end{aligned} \tag{4.3}$$

Nach dem Cauchy Kriterium ist (p_n) also gleichmäßig konvergent auf K. Also ist $(p_m)_n$ kompakt gleichmäßig in Ω konvergent.
Nun sei ein $z_0 \in \Omega$ mit $F(z_0) = 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N}^{\infty}|f_k(z_0)| < \log\frac{3}{2}$$

Wie in Formel 4.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}|p_n(z_0)-p_N(z_0)| &\leq |p_n(z_0)| \cdot \left(e^{\sum_{k=N+1}^{n}|f_k(z_0)|}-1\right) \\ &\leq |p_N(z_0)| \cdot \left(e^{\log\frac{3}{2}}-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot|p_N(z_0)| \qquad \forall_{n\geq N}\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} p_n(z_0) := F(z_0) = 0$ folgt für $n \to \infty$

$$|p_N(z_0)| \leq \frac{1}{2}|p_N(z_0)|$$

also $p_N(z_0) = 0$ also $1 + f_k(z_0) = 0$ für ein $k \in \{1, \ldots, N\}$. □

Naiver Ansatz für ganze Funktionen mit Nullstellen z_n:

$$\cancel{F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)}$$

(ist Falsch!!)
Problem: im Allgemeinen keine Konvergenz
Lösung: konvergenzerzeugende Faktoren
Neuer Ansatz: $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\cdot e^{Q_n(z)}\right]$ Q_n: genügend langer Abschnitt der Taylorentwicklung von $\log(1-\frac{z}{z_n})$ um 0

11.01.08

Q_n soll so gewählt werden, dass $(1-\frac{z}{z_n})e^{Q_n(z)}$ möglichst gut gegen 1 konvergiert.
⇒ Wähle für Q_n gegenüber Anfang der Taylorentwicklung von $-\log(1-\frac{z}{z_n})$. Es ist

$$\log(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot w \qquad \text{für } |w|<1$$

Definition. Es sei

$$Q_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k \text{ und } E_n(z) := (1-z)e^{Q_n(z)}$$

Die E_n heißen *Weierstraß'sche Elementarfaktoren*

Satz 4.6. *Für alle $p \geq 0$ und alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$ gilt*

$$\left|1-E_{p(z)}\right| \leq |z|^{p+1}$$

Beweis. Für $p=0$ ist dies klar, da $E_0(z) = 1-z$. Es sei also $p \equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= e^{Q_p(z)}(-1+(1-z)Q_p'(z)) = e^{Q_p(z)}\left(-1+(1-z)\cdot\sum_{k=0}^{p}z^{k-1}\right) \\ &= e^{Q_p(z)}\left(-1+(1-z)\cdot\frac{1-z^p}{1-z}\right) = -z^p\cdot e^{Q_p(z)} \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten der Entwicklung von Q_p und exp um 0 alle positiv sind, gilt:

$$-E_p'(z) = z^p\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

mit gegebenen $a_k \geq 0$. Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+p+1}z^{k+p+1} = -\int_0^z E_p'(\zeta)d\zeta = E_p(0)-E_p(z) = 1-E_p(z) \quad \forall_{z\in\mathbb{C}}$$

Damit folgt für $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+p+1}z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{k+p+1}|z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{k+p+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+p+1} \\ &= 1-E_p(1) = 1 \end{aligned}$$

Also $|1-E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ □

Satz 4.7. Produktsatz von Weierstraß
Es sei $(z_n)_n$ eine Folge paarweise verschiedener $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ und (m_n) eine Folge in $\mathbb{N}$. Dann gibt es eine ganze Funktion F, di genau in den z_n Nullstellen mit der Ordung m_n hat. Jedes solche F erhält man in der Gestalt:

$$F(z) = e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right)^{m_n}$$

mit einer ganzen Funktion g und $p_n \in \mathbb{N}_0$, die

$$a(R) \sum_{k=0}^{\infty} m_n \left(\frac{R}{|z_n|} \right)^{p_n+1} < \infty \tag{4.4}$$

für alle $R > 0$ erfüllen.

Bemerkung. *Eine etwaige Nullstelle in z_0 kann man durch einen Faktor z^m berücksichtigen*

Beweis. Unabhängig von $(z_n)_n$ kann man

$$p_n := n + \lfloor \log m_n \rfloor$$

wählen. Wobei $\lfloor$ und $\rfloor$ die Gauß'schen Klammern sind, und deswegen immer $\log m_n$ abgerundet wird.
Zu gegebenen $R > 0$ gibt es nämlich ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| \geq e \cdot R$ für alle $n \geq N$. Wegen $p_n + 1 \geq n + \log m_n$ folgt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} m_n \left(\frac{R}{z_n} \right)^{p_n+1} \leq \sum_{m=N}^{\infty} m_n \left(\frac{1}{e} \right)^{p_n+1} \leq \sum_{n=N} m_n \left(\frac{1}{e} \right)^{n+\log m_n} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{e^n} < \infty$$

Es sei nun $(p_n)_n$ eine beliebige Folge mit 4.4.
Es sei ein $R > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| \geq R$ für alle $n \geq N$. Für alle $z \in B_R(0)$ ist dann $\left| \frac{z}{z_n} \right| \leq \frac{R}{|z_n|} \leq 1$, und mit Satz 4.6 folgt:

$$\left| 1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{R}{|z_n|} \right)^{p_n+1} \qquad \forall_{n\geq N} \forall_{z\in B_R(0)}$$

Wegen der Konvergenz der Reihe für $a(R)$ ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left| 1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right|$$

gleichmäßig konvergent in $B_R(0)$. Gemäß Satz 4.5 ist daher

$$F_0(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right)^{m_n}$$

kompakt gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C}$ und hat Nullstellen genau in den Nullstellen von $E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$, das heißt genau ein z_n. Nach Konvergenzsatz von Weierstraß ist F_0 holomorph in $\mathbb{C}$, also ganz. In den z_k hat F_0 somit die Nullstellenordnungen m_n.

Man kann einen Faktor e^g mit $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hinzufügen, ohne an den Nullstellen und Ihren Ordnungen etwas zu ändern.
Ist F eine beliebige ganze Funktion mit Nullstellen z_n und Ordnungen m_n, so ist $\frac{F}{F_0}$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine nullstellenfreie ganze Funktion. Nach Satz 3.12 gibt es also eine ganze Funktion g, so dass $\frac{F}{F_0} = e^g$, also

$$F = e^g \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right)^{m_n}$$

$\square$

Bemerkung. *Falls es ein $q \geq 0$ gibt, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{|z_n|^{q+1}}$ konvergiert, so kann man in Satz 4.7 $p_n = q$ für alle n wählen. Für das minimale $q \geq 0$ mit dieser Eigenschaft heißt dann*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(E_q\left(\frac{z}{z_n}\right)\right)^{m_n}$$

das kanonische Produkt *zu den Folgen $(z_n)_n$ und (m_n) und q dessen* Geschlecht

Beispiel. ***Produktdarstellung von $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$***
Die Funktion $z \mapsto \frac{\sin \pi z}{\pi z}$ ist ganz mit einfacher Nullstelle genau in den $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Da $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}$ konvergent, gehört hierzu das kanonische Produkt

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} E_1\left(\frac{z}{n}\right) = \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right] = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Nach dem Produktsatz von Weierstraß gibt es also eine ganze Funktion G, so dass

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = e^{G(z)} \cdot H(z) \qquad \forall_{z\in\mathbb{C}}$$

Durch bilden der logarithmischen Ableitung (Aufgabe 12.4) folgt:

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\pi z} - \frac{1}{z} = \frac{e^{G(z)} \cdot G'(z)}{e^{G(z)}} + \frac{H'(z)}{H(z)} = G'(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2\frac{z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = G'(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2}$$

$$G'(z) = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n+z} + \frac{1}{n-z}\right) = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \tag{4.5}$$

Nochmaliges Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} G''(z) &= -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+n)^2} + \frac{1}{(z-n)^2}\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Partialbruchentwicklung von $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$. Also ist G' konstant. Wegen 4.5 ist G' ungerade, also $G'(0) = 0$. Somit ist $G' \equiv 0$, so dass auch G konstant ist. Mit

$$1 = \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = e^{G(0)} \cdot H(0) = e^{G(0)}$$

ist also insgesamt:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{n^2} \right) \qquad \forall_{z \in \mathbb{C}}$$

Aus $G' \equiv 0$ folgt mit 4.5 ferner für die Partialbruchzerlegung des Cotangens

$$\pi \cdot \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right)$$

Satz 4.8. *Es sei $(z_n)_n$ eine Folge paarweise verschiedener $z_n \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \to \infty}$ und $(P_n)_n$ eine Folge von Polynomen. Dann existiert eine ganze Funktion G, die in dem z_n die Taylorentwicklungen*

$$G(z) = P_n(z) + (z - z_n)^{\alpha_n + 1} \cdot g_n(z)$$

mit $\alpha_n := grad(P_n)$ und ganzen Funktionen g_n hat. Die allgemeine Lösung deses Iteratiosnproblemes erhät man in der Form $G + F$ mit ganzen Funktionen F_0, die in den z_0 Nullstellen der Ordnungen $\geq \alpha + 1$ besitzen.

14.01.08

Beweis. Nach dem Produktsatz von Weierstraß gibt es eine ganze Funktion F, die in allen z_n Nullstellen der Ordnung $d_n + 1$ hat. Dann ist $\frac{P_n}{F}$ meromorph in $\mathbb{C}$ und hat in z_n eine Polstelle der Ordnung $\leq d_n + 1$. Es sei h_n der Haupt- und r_n der Nebenteil der *Laurent Entwicklung* von $\frac{P_n}{F}$ von z_n
Nach dem Satz von Mittag Leffler gibt es eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion H mit Polstellen in den z_n und zugehörigen Hauptteil h_n
Es sei

$$G := F \cdot H$$

Dann ist G eine ganze Funktion, denn in den z_n hat F Nullstellen der Ordnung $d_n + 1$ und H Polstellen der Ordnung $\leq d_n + 1$
Um z_n besitzt G die lokale Darstellung

$$G = F \cdot H = F(k_n + \varrho_n) = Fh_n + F\varrho_n = F \left(\frac{P_n}{F} - r_n \right) + F\varrho_n = P_n + F(\varrho_n - r_n)$$

wobei ϱ_n der Nebenteil der Entwicklung von H um z_n ist. Hierbei hat $F(\varrho_n - r_n)$ in z_n eine Nullstelle der Ordnung $\geq d_n + 1$. Dies zeigt die Behauptung □

4.3. Normale Familien; Die Sätze von Montel und Vitali

Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F}$ eine Familie von in Ω holomorphen Funktionen. $\mathcal{F}$ heißt *lokal beschränkt* (auch *lokal gleichmäßig beschränkt*), falls es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ ein $M < \infty$ gibt, so dass

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall_{f \in \mathcal{F}} \forall_{z \in K}$$

$\mathcal{F}$ heißt *lokal gleichmäßig stetig* in Ω, falls es zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung $K_r(z_0) \subseteq \Omega$ gibt, so dass gilt:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{f \in \mathcal{F}} \forall_{z, w \in K_r(z_0)} \left(|z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon \right)$$

Definition. $\mathcal{F}$ heißt *normal* falls jede Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge enthält, die lokal gleichmäßig in Ω gegen eine holomorphe Grenzfunktion oder gegen ∞ knovergiert.

Beispiel. *Es sei $f_n(z) := nz$. Dann ist jede f_n beschränkt in $\mathbb{D}$, aber $(f_n)_n$ ist nicht lokal beschränkt in $\mathbb{D}$. Wegen $f_n(0) = 0$ für alle n und $f_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{in}{2} \to \infty$ $(n \to \infty)$ ist $(f_n)_n$ nicht normal in $\mathbb{D}$.*
Es sei $g_n(z) := \frac{1}{n(z-1)}$. Alle g_n sind unbeschränkt un $\mathbb{D}$, aber $(g_n)_n$ ist total beschränkt in $\mathbb{D}$.

Satz 4.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ sei lokal beschränkt. Dann is t $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig in Ω*

Beweis. Es sei ein $z_0 \in \Omega$ gegeben Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $B_{2r}(z_0) \subseteq \Omega$. Hierzu gibt es ein $M > 0$, so dass

$$\forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{z\in B_{2r}(z_0)}\, |f(z)| \leq M.$$

Es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Es sei $\delta := \frac{\varepsilon r}{2M} > 0$. Es sei $f \in \mathcal{F}$ und es seien $z, w \in K_r(z_0)$ mit $|z - w| < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(w)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = 2r}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\right)d\zeta\right| \\
&= \frac{|z-w|}{2\pi}\left|\int_{|\zeta - z| = 2r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}d\zeta\right| \\
&\leq \frac{|z-w|}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot \max_{|\zeta - z_0| = 2r}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}\right| \\
&\leq |z - w| \cdot 2r\frac{M}{r^2} \\
&= \frac{2M}{r}|z - w| < \frac{2M}{r}\cdot\delta = \frac{2M}{r}\cdot\frac{\varepsilon r}{2M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dieses zeigt die Behauptung! □

Satz 4.10. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt. Es sei $(f_n)_n$ eine Folgen in $\mathcal{F}$. Es gebe eine in Ω* dichte Menge *$A \subseteq \Omega$, so dass $(f_n(z))_n$ für alle $z \in A$ konvergiert. Dann ist $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig in Ω konvergent.*

Beweis 6. Es sei ein $z_0 \in \Omega$ gegeben. Dann gibt es nach Satz 4.9 ein $r > 0$, so dass $B_R(z_0) \subseteq \Omega$ und

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{f\in\mathcal{F}}\forall_{z.w\in B_r(z_0)}\,(|z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon)$$

Es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z, w \in B_r(z_0)$ und alle u

$$|z - w| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es ist $\{K_\delta(z) |\, z \in A \cap B_r(z_0)\}$ eine offene Überdeckung von $B_r(z_0)$. Wegen der Kompaktheit von $B_r(z_0)$ gibt es endlich viele$z_1, \ldots z_n$, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{k} K_\delta z_j \geq B_r(z_0).$$

Wegen der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_n$ in A gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall_{m,n\geq N}\forall_{j=1,\ldots k}\,|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Es sei ein $z \in K_r(z_0)$ gegeben. Dann gibt es ein $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ so dass $z \in K_\delta(z_{j-0})$, Dann folgt für $n, m \geq N$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_{j_0})| + |f_n(z_{j_0}) - f_m(z_{j_0})| + |f_m(z_{j_0}) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Daher ist $(f_n)_n$ auf $K_r(z_0)$ gleichmäßig kovergent.

Satz 4.11. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Beweis 7. Es gibt eine abzählbare, in Ω dichte Teilmenge $A \subseteq \Omega$ (zum Beispiel $A = \{z \in \Omega | \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}$). Wir schreiben $A = (a_1, a_2, \ldots)$. Es sei $(f_n)_0$ eine Folge $\mathcal{F}$. Da $(f_n(a_1))_n$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{1,k}}(a_1))_k$. Induktiv folgt die Existenz von Teilfolgen $(f_{n_{j-1,k}})_k$, so dass $(f_{n_{j,k}}(a_j))_k$ konvergiert. Es sei $g_k := f_{n_{k,k}}$. Dann ist $(g_k)_k$ Teilfolge von $(f_n)_n$ und in jedem a_j konvergiert dann $(g_k)_{k \geq j}$ ist Teilfolge von $(f_{m_{j,k}})_k$.
Aus Satz 4.10 folgt, dass $(g_k)_k$ lokal gleichmäßig in Ω konvergiert.

(Skizze der Diagonalsumme: Erste Reihe: Alle Folgeglieder, 2. Reihe: eine Auswahl der 1.Reihe,3. Reihe: eine Auswahl der 2.Reihe,..., Summation über $f_{n_{k,k}}$)

Satz 4.12. Satz von Vitali
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. Es gebe eine Folge $(a_j)_j$ in Ω, die in Ω einen Häfungspunkt hat, so dass $(f_n(a_j))_n$ für alle j konvergiert. Es sei $(f_n)_n$ lokal beschränkt. Dann ist $(f_n)_n$ in Ω kompakt gleichmäßig konvergent.

Beweis 8. Wegen Satz 4.10 genügt es, die punktweise Konvergenz zu zeigen. Für alle j existiert $g(a_j) := \lim_{n\to\infty} f_n(a_j)$.
Nach Satz von Montel existiert eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die gegen ein $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ konvergeiert. Es ist dann

$$\forall_j g(a_j) = f(a_j).$$

Annahme: es gibt ein $z_0 \in \Omega$, so dass $(f_n)_n$ nicht gegen $f(z_0)$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{\tilde{n}_k})_k$, so dass $(f_{\tilde{n}_k})_k$ gegen ein $w_0 \neq f(z_0)$ konvergiert (Satz von Bolzano Weierstraß!) Wieder nach Satz von Montel konvergiert eine geeignete Teilfolge von $(f_{\tilde{n}_k})_k$ gegen ein $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Es ist dann $F(z_0) = w_0 \neq f(z_0)$. Es ist also $f \not\equiv F$. Andererseits ist $F(a_j) = \lim_{n\to\infty} f_n(a_j) = f(a_j)$ für alle j. Aus diesem Induktionsprinzip folgt $f \equiv F$ ein Widerspruch. Dies zeigt die Behauptung.

18.01.08

Satz 4.13. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes $t \in [0,1]$ sei $z \mapsto f(z,t)$ holomorph in Ω. Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ von* beschränkter Variation. *Dann ist*

$$F(z) := \int_0^1 f(z,t)d\ g(t)$$

holomorph in Ω mit

$$F'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z.t)d\ g(t) \text{ für alle } z \in \Omega$$

Bemerkung. *Beschränkte Variation: Analysis 2, Rektifizierbar/Sehnenpolygonzüge*
Außerdem ist manchmal *folgende Formel richtig:*

$$F(z) := \int_0^1 f(z,t) d\ \frac{g(t)}{dt} \cdot dt$$

Beweis. Da $t \mapsto f(z,t)$ für jedes $z \in \Omega$ stetig ist, ist $t \mapsto f(z,t)$ für jedes $z \in \Omega$ *Riemann-Stieltjes- integrierbar* bezüglich g (vrgl. Heuser, Analysis I Satz 91.1).
Es sei $(\mathcal{P}_n)_n$ eine Zerlegungsfolge für $[0,1]$, also eine Folge von Partitionen $\mathcal{P}_n = \{t_0^{(n)}, \dots, t_{q_n}^{(n)}\}$ von $[0,1]$ (das heißt $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{q_n}^{(n)}$) mit $\lim_{n\to\infty} \max_{k=0,\dots,n-1}(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = 0$
Nach Definition der Riemann- Stieltjes Integrierbarkeit (vrgl. Heuser §90) konvergiert dann

$$F_n(z) := \sum_{k=0}^{q_n-1} f\left(z, t_k^{(n)}\right) \cdot \left(g\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - g\left(t_k^{(n)}\right)\right)$$

für alle $z \in \Omega$ gegen $F(z)$.
Es sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Da $K \times [0,1]$ kompakt ist, gibt es ein $M < \infty$ mit

$$\forall_{z\in K}, \forall_{t\in[0,1]} \, |f(z,t)| \le M$$

Dann folgt für alle $z \in K$ und alle n

$$\begin{aligned}|F_n(z)| &\le \sum_{k=0}^{q_n-1} \left|f\left(z, t_k^{(n)}\right)\right| \cdot \left|g\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - g\left(t_k^{(n)}\right)\right| \\ &\le M \cdot \sum_{k=0}^{q_n-1} \left|g\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - g\left(t_k^{(n)}\right)\right| \\ &\le V_{[0,1]}(g),\end{aligned}$$

(Müsste in Heusser zwischen Paragraph 85 und 90 stehen) wobei $V_{[0,1]}(g)$ die *totale Variation* von g auf $[0,1]$ ist. Dies zeigt, dass $(F_n)_n$ lokal beschränkt auf Ω ist.
Nach Satz von Vitali (Satz 4.12) konvergiert $(F_n)_n$ daher kompakt gleichmäßig in Ω gegen F. Aus dem Konvergenzsatz von Weiertsraß (Satz 4.1) folgt die Holomorphie von F sowie $F' = \lim_{n\to\infty} F'n$. Es sei ein $z \in \Omega$ und ein $t_0 \in [0,1]$ gegeben. Aus

$$\begin{aligned}|f_z(z,t) - f_z(z,t_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta,t_0)}{(\zeta-z)^2} d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi i} 2\pi r \cdot \max_{|\zeta-z|=r} \frac{|f(\zeta,t) - f(\zeta,t_0)|}{|z\zeta - z|^2} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \max_{|\zeta-z|=r} |f(\zeta,t) - f(\zeta,t_0)| \qquad \forall_{t\in[0,1]}\end{aligned}$$

(wobei $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(z) \subseteq \Omega$) und aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf dem Kompaktum $\partial B_r(0) \times [0,1]$ folgt, dass $t \mapsto f_z(z,t)$ stetig in t_0 ist. Daher ist$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ für jede $z \in \Omega$ Riemann Stieltjes integrierbar. Es folgt nunmehr für alle $z \in \Omega$

$$F'(z) = \lim_{n\to\infty} F_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{q_n-1} \left(g(t_{k+1}^{(n)}) - g(t_k^{(n)})\right) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) d\ g(t)$$

□

4.4. Beschränktheit holomorpher Funktionen im Einheitskreis

Satz 4.14. Satz von Schwartz-Pick
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt für alle $z, z_0 \in \mathbb{D}$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}\cdot f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \quad \textit{und} \quad |f'(z_0)| \leq \frac{1-|f(z_0)|^2}{1-|z_0|^2}$$

Beweis. Es sei ein $z_0 \in \mathbb{D}$ gegeben. Dann sind

$$g(\zeta) := \frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta} \text{ und } k(\eta) := \frac{\eta - f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}\cdot\eta}$$

wegen $z_0 \in \mathbb{D}$ und $f(z_0) \in \mathbb{D}$ Automorphismen von $\mathbb{D}$ (**Übungen** Aufgabe 9.2.(b))
Es sei $\varphi := k \circ f \circ g$.
Dann ist φ holomorph in $\mathbb{D}$ mit $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $\varphi(0) = k((f(z_0))) = 0$. Mit dem Lemma von Schwarz (2.17) folgt $|\varphi(\zeta)| \leq |\zeta|$ für alle $\zeta \in \mathbb{D}$. Es sei $z \in \mathbb{D}$ und $\zeta := g^{-1}(z) \in \mathbb{D}$. Es ist $\zeta = \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ (**Übung** Aufgabe 8.3.(b)).
Damit folgt

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| = |(h \circ f)(z)| = |\varphi(\zeta)| \leq |\zeta| = \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|$$

Für $z \neq z_0$ folgt:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \left|\frac{1-\overline{f(z_0)}\cdot f(z)}{1-\overline{z_0}z}\right|$$

Für $z \longrightarrow z_0$ ergibt sich

$$|f'(z_0)| \leq \left|1.\,|f(z_0)|^2\right| 1-|z_0|^2$$

□

Satz 4.15. Satz der Jensenschen Ungleichung
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f \not\equiv 0$ und $(z_k)_k$ die Folge der Nullstellen von f. Dann gilt:

$$|f(0)| \leq \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < \infty$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f(0) \neq 0$.(Ist nämlich 0 p-fache Nullstelle von f, so betrachtet man $\widetilde{f}(z) := \frac{f(z)}{z^p}$. Nach einer Verallgemeinerung des Lemmas von Schwartz (Satz 2.17) ist dann $\left|\widetilde{f}(z)\right| \leq 1$ in $\mathbb{D}$).
Es sei $\alpha_k(z) := \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$ und $g_n := \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Behauptung

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\forall_{z\in\mathbb{D}}\, |f(z)| \leq g_n(z) \tag{4.6}$$

Beweis Für $n = 0$ gilt dies wegen $|f(z)| \leq 1 = |g_0(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Es sei 4.6 für ein $n \geq 0$ gültig. Für $h_n := \frac{f}{g_n}$ gilt dan $|h_n(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. Nach Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 3.2) ist h_n holomorph in $\mathbb{D}$. Wegen $h_n(z_{n+1}) = 0$ folgt mit dem Lemma von Schwarz Pick (Satz 2.17)

$$|h_n(z)| = \left| \frac{h_n(z) - h_n(z_{n+1})}{1 - \overline{h_n(z_{n+1})} \cdot h_n(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_{n+1}}{1 - \overline{z_{n+1}} \cdot z} \right| = |\alpha_{n+1}(z)|$$

also

$$\forall_{z \in \mathbb{D}} \, |f(z)| = |h_n(z)| \cdot |g_n(z)| \leq |\alpha_{n+1}| \cdot |g_n(z)| = |g_{n+1}|$$

Insbesondere ist

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \, |f(0)| \leq |g_n(0)| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$$

also auch $|f(0)| \leq \prod_{k=1}^{n} |z_k|$.

Es ist $1 - x \leq -\log x$ für alle $x \in]0, 1]$. Damit folgt

$$\forall_n \sum_{k=1}^{n} (1 - |z_k|) \leq -\sum_{k=1}^{n} \log |z_k| = \log \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_k|} \leq \log \frac{1}{|f(0)|}$$

also auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \leq \log \frac{1}{|f(0)|} < \infty$$

□

21.01.08

Korollar. *Es seien f, g in $\mathbb{D}$ holomorph und beschränkt. Es sei $(z_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{D}$ mit*

$$\forall_k f(z_k) = g(z_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = \infty$$

Beweis. Es sei $h := f - g$ Dan ist h holomorph und beschränkt in $\mathbb{D}$ (Einheitskreis) mit $h(z_k) = 0$ für alle k. Wähle $h \not\equiv 0$, so wäre $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$ man Satz 4.15. Dieser Widerspruch zeigt $h \equiv 0$, das heißt $f \equiv g$ □

Satz 4.16. Satz des Blaschke Produktes

Es sei $(z_k)_k \subseteq \mathbb{D} \backslash \{0\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < 0.$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, die ihre Nullstellen genau in den z_k hat. Diese lässt sich als Blaschke Produkt

$$F(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z}$$

darstellen. Jedes holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit der Nullstelle z_k erhält man in der Gestalt

$$f = e^G \cdot F$$

mit beliebigen $G \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $\operatorname{Re} G \leq 0$

Beweis. Es sei

$$\beta_k(z) = \frac{|z_k|}{z_k} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} \cdot z}.$$

Dann ist $|\beta_k(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Es sei ein $r \in]0,1[$ gegeben. Für alle $z \in B_r(0)$ und alle k ist dann

$$\begin{aligned}
|\beta_k(z) - 1| &= \left| \frac{|z_k| - \frac{z \cdot |z_k|}{z_k} - 1 + \overline{z_k} \cdot z}{1 - \overline{z_k} \cdot z} \right| \\
&= \left| \frac{|z_k| \frac{z \cdot |z_k|}{z_k} - 1 \frac{|z_k|^2 \cdot z}{z_k}}{1 - \overline{z_k} \cdot z} \right| \\
&= \left| \frac{(1 - |z_k|) \cdot \left(-1 - \frac{z|z_k|}{z_k} \right)}{1 - \overline{z_k} \cdot z} \right| \\
&\leq (1 - |z_k|) \cdot \frac{1 + |z|}{1 - |z_k \cdot z|} \\
&\leq (1 - |z_k|) \frac{1 + r}{1 - r}
\end{aligned}$$

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \cdot \frac{1+r}{1-r} < \infty$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k - 1|$ gleichmäßig auf $B_r(0)$ konvergent für jedes $r \in]0,1[$ also kompakt gleichmäßig konvergent in $\mathbb{D}$.
Nach Satz 4.5 ist $\prod_{k=1}^{\infty} \beta_k = F$ holomorph und hat als Nullstellen genau die z_k. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit Nullstellen z_k.
Es sei

$$F_n := \prod_{k=1}^{n} \beta_k \quad \text{und } g_n(z) := \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$$

Wie im Beweis von Satz 4.15 gezeigt, gilt

$$\forall_{z \in \mathbb{D}} \, |f(z)| \leq |g_n(z)|$$

Wegen $|g_n(z)| = |F_n(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $\lim_{n \to \infty} F_n = F$ folgt für $n \to \infty$

$$\forall_{z \in \mathbb{D}} \quad |f(z)| \leq \lim_{n \to \infty} |F_n(z)| = |F(z)|$$

Für $h := \frac{f}{F}$ gibt es dann $|b(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$, sodass h nach Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 3.2) holomorph auf $\mathbb{D}$ fortsetzbar ist. Da f und F dieselben Nullstellen (und Vielfachheiten) haben, ist h nullstellenfrei in $\mathbb{D}$.
Nach Satz 3.12 gibt es ein $G \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $h = e^G$. Es ist dann $f = e^G \cdot F$ und

$$\operatorname{Re} G = \log |h| \leq \log 1 = 0$$

□

5. Konforme Abbildungen

5.1. Riemannscher Abbildungssatz

Obwohl einfach zusammenhängende Gebiete mit vielen „Schlitzen" versehen sein können, gilt der Riemannsche Abbildungssatz

Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und f holomorph und *injektiv* in U. Dann heißt f *konform* oder *schlicht* in U. Ist $f : U \to V$ eine *bijektive holomorphe Abbildung* zwischen offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$, so nennt man f auch *biholomorph*

Definition. Zwei Gebiete Ω_1, Ω_2 in $\mathbb{C}$ heißen *konform äquivalent*, falls es eine konforme Abbildung von Ω_1 auf Ω_2 gibt. Man schreibt $\Omega_1 \overset{k}{\sim} \Omega_2$.

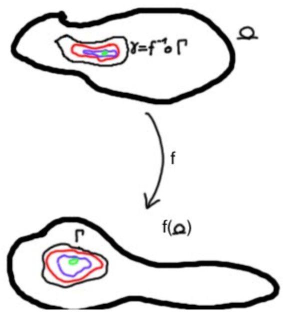
Bemerkung. *Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gebiete in $\mathbb{C}$ gestiftet, denn die Umkehrabbildung und die Komposition von konformen Abbildungen sowie die identische Abbildung sind wieder konform.*

Satz 5.1. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : \Omega \to f(\Omega)$ ein Homomorphismus (das heißt, stetig und bijektiv mit stetigem f^{-1}). Dann gilt:*

1. *$f(\Omega)$ ist ein einfach zusammenängendes Gebiet.*
2. *Ist $(z_n)_n$ eine Folge in Ω, die gegen ein $z_0 \in \partial\Omega$ konvergiert, so liegt jeder Häufungspunkt von $(f(z_n))_n$ in $\partial f(\Omega)$.*

Beides gilt insbesondere für schlichte f.

Beweis.



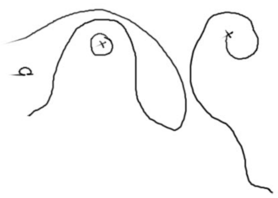
1. Da f stetig ist, ist $f(\Omega)$ zusammenhängend. Da f^{-1} stetig ist, ist $f(\Omega)$ offen, also insgesamt ein Gebiet. Es sei Γ ein geschlossener Weg in $f(\Omega)$. Dann ist $\gamma : f^{-1} \circ \Gamma$ ein (stetiger) geschlossener Weg in Ω. Da Ω einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$, die γ stetig in einen Punktweg (zum Punkt $z_0 \in \Omega$) deformiert. Es ist dann $\widetilde{H} := f \circ H : [0,1] \times [0,1] \to f(\Omega)$ eine Homotopie, die $f \circ \gamma = \Gamma$ stetig in den Punktweg zum Punkt $f(z_0)$ deformiert. Also ist Γ nullhomotop. Daher ist $f(\Omega)$ einfach zusammenhängend.

2. Es sei b ein Häufungspunkt von $(f(z_n))_n$. Dann ist $b = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k})$ für eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ von $(z_n)_n$
   Wegen $f(z_n) \in f(\Omega)$ für alle n ist $b \in \overline{f(\Omega)}$.
   Annahme: Es ist $b \in f(\Omega)$. Dann gibt es ein $a \in \Omega$ mit $f(a) = b$
   Wegen der Stetigkeit von f^{-1} in b folgt gemäß Folgenkriterium
   $$a = f^{-1}(b) = f^{-1}\left(\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} f^{-1}(f(z_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in \partial\Omega,$$
   im Widerspruch zu $a \in \Omega$!
   Also ist $b \neq f(\Omega) = (f(\Omega))^\circ$, das heißt, $b \in \overline{f(\Omega)} \backslash (f(\Omega))^\circ = \partial f(\Omega)$.

□

25.01.08

Hilfssatz 2. *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \neq \mathbb{C}$ ist konform äquivalent zu einem*



beschränkten Gebiet

Beweis. Es gibt ein $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.
Da $z \mapsto z - a$ nullstellenfrei in Ω einfach zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 3.12 eine holomorphe Logarithmusfunktion $L : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{L(z)} = z - a$ für alle $z \in \Omega$.
Es sei
$$\Psi := e^{\frac{L}{2}}.$$
Dann ist Ψ holomorph in Ω mit $\Psi^2(z) = z - a$ für alle $z \in \Omega$ (Man schreibt auch $\Psi(z) = \sqrt{z-a}$)
Es seien $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $\Psi(z_1) = \Psi(z_2)$. Dann ist
$$z_1 - a = \Psi^2(z_1) = \Psi^2(z_2) = z_2 - a,$$
also $z_1 = z_2$. Daher ist Ψ injektiv, also *konform* in Ω.
Es seien $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $\Psi(z_1) = -\Psi(z_2)$. Dann ist
$$z_1 - a = \Psi^2(z_1) = (-\Psi(z_2))^2 = \Psi^2(z_2) = z_2 - a,$$
also $z_1 = z_2$. Es folgt $\Psi(z_1) = 0$ also $z_1 - a = \Psi^2(z_1) = 0$, also $z_1 = a$ im Widerspruch zu $a \notin \Omega$.
Dies zeigt
$$\Psi(\Omega) \cap (-\Psi)(\Omega) = \emptyset,$$
also $\mathbb{C}\backslash\Psi(\Omega) \supseteq (-\Psi)(\Omega)$. Da auf $-\Psi$ konform in Ω ist, ist $(-\Psi)(\Omega)$ noch Offenheitsprinzip offen (und $\neq \emptyset$). $\mathbb{C}\backslash\Psi(\Omega)$ hat also innere Punkte.
Es gibt also ein $b \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(b) \subseteq \mathbb{C}\backslash\Psi(\Omega)$, das heißt
$$\forall_{z\in\Omega}\, |\Psi(z) - b| < \varepsilon$$
Es sei $\varphi(w) := \frac{1}{w-b}$. Dann ist φ konform in $\mathbb{C}\backslash\{b\} \supseteq \Psi(\Omega)$ mit
$$\forall_{z\in\Omega}\, |\varphi(\Psi(z))| < \frac{1}{\varepsilon}$$
Somit ist $\varphi \circ \Psi$ eine konforme Abbildung von Ω *in* das beschränkte Gebiet $K_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$ □

Satz 5.2. Riemannsche Abbildungssatz
Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine konforme Abbildung F von Ω auf $\mathbb{D}$. *Ist $z_0 \in \Omega$ gegeben, so kann man F so wählen, dass*

$$F(z_0) = 0 \text{ und } F'(z_0) > 0$$

Beweis. **I. Eindeutigkeit** Habe F und G die gewünschten Eigenschaften, so ist

$$H := F \circ G^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ (ein Einheitskreisautomorphismus) mit $H(0) = 0$ und

$$H'(0) = \frac{F'(G^{-1}(0))}{G'(G^{-1}(0))} = \frac{F'(z_0)}{G'(z_0)} > 0$$

Es folgt (z.B. aus dem Lemma von Schwarz oder aus Übungsaufgabe 9.2 (b)), dass $H = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, also $F \equiv G$.

II. Existenz Nach dem Hilfssatz gibt es eine konforme Abbildung φ von Ω auf ein beschränktes Gebiet $\Omega_0 = \varphi(\Omega)$. Es sei $a := \varphi(z_0)$.
Es sei

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega_0 \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ konform},\ f'(a) = 1,\ f(a) = 0\}$$

Für $f \in \mathcal{F}$ sei

$$\mu(f) := \sup_{z \in \Omega_0} |f(z)|$$

und es sei

$$\mu_0 := \inf_{f \in \mathcal{F}} \mu(f)$$

Für $f(z) := z - a$ ist $f \in \mathcal{F}$. Daher ist $\neq \emptyset$, und es ist $\mu(f) < \infty$, da Ω_0 beschränkt. Daher ist $\mu_0 < \infty$
Es gibt eine Folge $(f_k)_k \subseteq \mathcal{F}$ mit $\mu_0 \lim_{k\to\infty}(f_k)$ Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k \geq k_0} \mu(f_k) \leq \mu_0 + 1$$

Dies bedeutet

$$\forall_{k \geq k_0} \forall_{z \in \Omega_0} |f_k(z)| \leq \mu_0 + 1$$

Somit ist $(f_k)_{k \geq k_0}$ lokal beschränkt in Ω_0 und daher nach Satz von Montel normal. Es gibt also eine Teilfolge $(f_{k_j})_j$, die kompakte gleichmäßig in Ω_0 gegen eine holomorphe Grenzfunktion F_0 konvergiert. ($F_0 \equiv \infty$ scheidet aus)
Es ist

$$F_0(a) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j}(a) = 0$$

und nach dem Konvergenzssatz von Weierstraß

$$F_0'(a) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j}'(a) = 1$$

Nach dem Korrolar zum Satz von Hurwitz ist F_0 injektiv, also konform in Ω_0. Es ist also $F_0 \in \mathcal{F}$. Es seien ein $z_0 \in \Omega_0$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|F_0(z) - f_{k_j}(z)\right| < \varepsilon \qquad \text{und } \mu(f_{k_j} \leq \mu_0 + \varepsilon$$

Es folgt

$$|F_0(z)| \le \left|f_{k_j}(z)\right| + \varepsilon \le \mu(f_{k_j}) + \varepsilon \le \mu_0 + 2\varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist $|F_0(z)| \le \mu_0$.
Dies zeigt:

$$\mu(F_0) = \sup_{z \in \Omega_0} |F_0(z)| \le \mu_0$$

Wegen $F_0 \in \mathcal{F}$ ist andererseits $\mu(F_0) \ge \mu_0$, insgesamt laso $\mu(F_0) = \mu$
Es ist $F_0(\Omega_0) \subseteq B_{\mu_0}(0)$ und nach Offenheitsprinzip sogar $F_0(\Omega_0) \subseteq K_{\mu_0}(0)$.
Annahme: $F_0(\Omega_0) \ne K_{\mu_0}(0)$.
Dann gibt es ein $\alpha \in]-1,0[$ und ein $t \in]0,2\pi[$ mit $\mu_0\alpha \cdot e^{it} \notin F_0(\Omega_0)$: Durch

$$\Psi_1 := \frac{e^{-it}}{\mu_0} F_0$$

wird Ω_0 konform auf $\Psi_1(\Omega_0) \subseteq \mathbb{D}$ abgebildet mit $\Psi_!(z) \ne \alpha$ für alle $z \in \Omega_0$,

$$\Psi_1(a) = 0 \qquad \text{und } \Psi_1'(a) \frac{e^{-it}}{\mu_0} \cdot F_0'(a) = \frac{e^{-it}}{\mu_0}.$$

Es sei

$$\Psi_2 := \frac{\Psi_1 - \infty}{1 - \alpha\Psi_1}.$$

Dann bildet Ψ_2 das Gebiet Ω_0 konform auf $\Psi_2(\Omega_0) \subseteq \mathbb{D}$ ab mit

$$\forall_{z \in \Omega_0} \Psi_2(z) \ne 0, \quad \Psi_2(a) = -\alpha \quad \text{und } \Psi_2'(a) = \frac{1-\alpha^2}{1-0} \cdot \Psi_1'(a) = (1-\alpha^2)\frac{e^{-it}}{\mu_0}$$

denn

$$\frac{1}{d\zeta} \cdot \frac{\zeta - \alpha}{1 - \alpha\zeta} = \frac{1 - \alpha\zeta + (\zeta - \alpha)\alpha}{(1-\alpha\zeta)^2} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha\zeta)^2}$$

Wegen der Nullstellenfreiheit von Ψ_2 und weil Ω_0 nach Satz 5.19 Teil **(a)** einfach zusammenhängend ist, existiert die konforme Wurzel:

$$\Psi_3 := \sqrt{\Psi_2} \quad \text{mit } \Psi_3(a) = +\sqrt{-\alpha} =: \beta > 0$$

Es sei

$$\Psi_3'(a) = \frac{1}{2\Psi_3(a)} \cdot \Psi_2'(a) = \frac{1}{2\beta} \cdot (1-\alpha^2)\frac{e^{-it}}{\mu_0}$$

Es sei

$$\Psi_4 := \frac{\Psi_3 - \beta}{1 - \beta\Psi_3}.$$

Dann ist Ψ_4 eine konforme Abbildung von Ω_0 auf $\Psi_4(\Omega_0) \subseteq \mathbb{D}$ mit

$$\Psi_4(a) = 0 \quad \text{und } \Psi_4'(a) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2} \cdot \Psi_3'(a) = \frac{1}{1-\beta^2} \cdot \frac{1-\alpha^2}{2\beta} \cdot \frac{e^{-it}}{\mu_0} = \frac{1-\beta^4}{1-\beta^2} \cdot \frac{e^{-it}}{2\beta\mu_0} = \frac{1+\beta^2}{2\beta} \cdot \frac{e^{-it}}{\mu_0}$$

Es sei

$$\widetilde{F} := \frac{\Psi_4}{\Psi_4'(a)}$$

Dann ist $\tilde{F}$ konform in Ω_0 mit $\tilde{F}'(a) = 1$, also $\tilde{F} \in \mathcal{F}$. Es ist also $\mu(\tilde{F}) \geq \mu_0$. Andererseits ist:

$$\forall_{z\in\Omega_0} \left|\tilde{F}(z)\right| = \frac{|\Psi_4(z)|}{\Psi_4'(a)} \leq \frac{1}{|\Psi_4'(a)|} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \cdot \mu_0$$

also

$$\mu(\tilde{F}) \leq \frac{2\beta}{1+\beta^2} \cdot \mu_0 < \mu_0,$$

da $0 < \beta < 1$, also ein *Widerspruch*!
Also ist $F_0(\Omega_0) = K_{\mu_0}(0)$. Es gibt ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$, sodass

$$\eta \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot F_0'(\varphi(z_0)) \cdot \varphi'(z_0) > 0.$$

Setzt man

$$F := \frac{\eta}{\mu_0} F_0 \circ \varphi$$

so bildet F Ω konform auf $\mathbb{D}$ ab mit

$$F(z_0) = \frac{\eta}{\mu_0} \cdot F_0(\varphi(z_0)) = \frac{\eta}{\mu_0} \text{ und } F'(z_0) = \frac{\eta}{\mu_0} \cdot F_0'(\varphi(z_0)) \cdot \varphi'(z_0) > 0$$

Also leistet F das Gewünschte

□

28.01.08

Definition. Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in \Omega$. Die eindeutige konforme Abbildung f von Ω auf $\mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$ heißt *Riemann'sche Abbildungsfunktion* zu Ω und z_0. Der *Abbildungsradius* von Ω bezüglich z_0 wird definiert durch

$$\varrho(\Omega, z_0) := \frac{1}{f'(z_0)}$$

Satz 5.3. *Die komplexe Ebene* $\mathbb{C}$ *ist* nicht *konform äquivalent zu* $\mathbb{D}$

Beweis. Andernfals gäbe es eine konforme Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. Diese wäre beschränkt, nach Satz von Liouville 2.13 also konstant, ein Widerspruch! □

Folgerung. $\mathbb{C}$ *ist zu* keinem *einfach zusammenhängenden Gebiet* $\neq \mathbb{C}$ *konform äquivalent.*

5.2. Die Klasse S

Definition.

$$S := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ schlicht}, \; f(0) = 0, \; f'(0) = 1\}$$

Bemerkung. 1. *Es sei $f \in S$. Dann ist auch $g(z) := \frac{f(\alpha z)}{\alpha} \in S$ für $\alpha \in \overline{\mathbb{D}} \backslash \{0\}$*

2. *Es sei $f \in S$ und $z_0 \in \mathbb{D}$. Es sei*

$$F(z) := \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{f'(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2)}$$

Dann ist auch $F \in S$, und es ist $F''(0) = \frac{f''}{f'}(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2) - \bar{z}_0$. Mann nennt F dann die Koebe- Transformierte *von f.*

Beweis. 1. Klar, es ist $g'(z) = f'(\alpha z)$, also $g'(0) = f'(0) = 1$.

2. Da F die Verkettung der schlichten Abbildungen $z \mapsto \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$, f und $w \mapsto \frac{w-f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}$ ist, ist F schlicht in $\mathbb{D}$. Es ist $F(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)} \cdot f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) \cdot \frac{1-z_0\bar{z}_0}{(1+\bar{z}_0 z)^2} \\ &= \frac{1}{f'(z_0)\cdot(1+\bar{z}_0 z)^2} \cdot f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right), \end{aligned}$$

also $F'(0) = \dfrac{f'(z_0)}{f'(z_0)} = 1$. Weiter ist

$$\begin{aligned} F''(z) &= \frac{1}{f'(z_0)} \cdot \frac{f''\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) \cdot \frac{1-|z_0|^2}{(1+\bar{z}_0 z)^2} \cdot (1+z\bar{z}_0 z) - 2f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)\cdot(1+\bar{z}_0 z)\bar{z}_0}{(1+\bar{z}_0 z)^4} \\ &= \frac{f''\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)\cdot(1-|z_0|^2)}{f'(z_0)\cdot(1+\bar{z}_0 z)^4} - \frac{2\bar{z}_0 \cdot f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0)(1+\bar{z}_0 z)^3}, \end{aligned}$$

also $F'(0) = \dfrac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \cdot (1-|z_0|^2) - 2\bar{z}_0$.

□

Beispiel. *1. Es sei $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Dann bildet f $\mathbb{D}$ schlicht* auf RH *(*Rechte Halbebene*) ab.*

Beweis. Als Möbius- Transformation bildet f $\overline{\mathbb{C}}$ bijektiv auf $\overline{\mathbb{C}}$ ab, die (verallgemeinerte) Kreislinie $\partial\mathbb{D}$ wird durch f auf die verallgemeinerte Kreislinie durch

$$f(1) = \infty, \; f(-1) = 0 \text{ und } f(i) = \frac{1+i}{1-i} = i,$$

also auf $i\mathbb{R}$ abgebildet.

Wegen der Injektivität von f ist

$$f(\partial\mathbb{D}) \cap f(\mathbb{D}) = \emptyset, \text{ also } f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$$

Da $f(\mathbb{D})$ zusammenhängend ist, folgt $f(\mathbb{D}) \subseteq$LH oder $f(\mathbb{D}) \subset$RH. Wegen $f(0) = 1 \in$RH liegt der Fall $f(\mathbb{D}) \subset$RH vor. Analog folgt $f(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}) \subseteq$LH. Wegen $f(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$ muss daher $f(\mathbb{D}) =$ RH (und $f(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}) =$LH) gelten. □

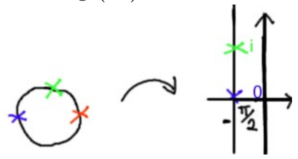
2. Es sei $g(z) := \frac{z}{1-z}$. Wegen

$$g(1) = \infty, \; g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ und } g(i) = \frac{i}{1-i} = \frac{i}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(-1+i)$$

*und $g(0) = 0$ folgt analog zu **1.**, dass $\mathbb{D}$ durch g schlicht auf die Halbebene*

$$\{w \in \mathbb{C} | \Re(w) > -\frac{1}{2}\}$$

abgebildet wird.
Es ist $g(\mathbb{D})$ konvex.



3. *Es sei $k(z) := \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$ folgt aus **1.**, dass $\mathbb{D}$ durch k schlicht auf das Schlitzgebiet $\mathbb{C}\setminus\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ abgebildet wird.*
Um 0 hat k die Entwicklung

$$k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k\dot{z}^k$$

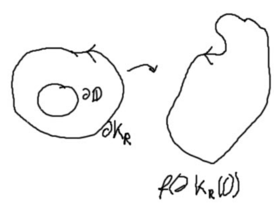
(Dies folgt aus $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ durch Ableiten)
Es ist $k \in S$, und $k(\mathbb{D})$ ist sternförmig. Es ist $k(z) = z \cdot g'(z)$.

Definition. Es sei

$$\Sigma = \left\{ f : \mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ schlicht, } f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{1}{z^k} \right\}$$

Satz 5.4. *Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \in \Sigma$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot |A_k|^2 \leq 1$*

Beweis. Es sei $R > 1$ gegeben, Es sei I_R das Innere der Jordankurve $f(\partial K_R(0))$ (*Jordanscher Kurvenvektor*). Es ist $|I_R| \geq 0$.



Aus dem Argumentsprinzip

$$\forall_{a \in I_R} \mu(f(\partial K_R(0)), a) \geq 1 \tag{5.1}$$

Mit der *Greenschen Formel* folgt mit $u := \Re f,\ v := \Im f$

$$
\begin{aligned}
0 \leq |I_R| = du\, dv &= \frac{1}{2} \int_{\partial I_R} (udu - vdv) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(u(Re^{it}) \frac{d}{dt} v(Re^{it}) - v(Re^{it}) \frac{du}{dt}(Re^{it}) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Im \left[(u - iv)(Re^{it}) \cdot \frac{d}{dt}(u + iv)(Re^{it}) \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Im \left[\bar{f}(Re^{it}) cdot f'(Re^{it}) \dot{R} e^{it} i \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Re \left[\bar{f}(Re^{it}) f'(Re^{it}) Re^{it} \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Re \left[\left(Re^{it} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_k R^{-k} e^{ikt} \right) \cdot \left(Re^{it} - \sum_{k=0}^{\infty} k A_k R^{-k} e^{-ikt} \right) \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left(R^2 - \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 R^{-2k} \right)
\end{aligned}
$$

Also ist

$$\forall_{R>1} R^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} k\, |A_k|^2 R^{-2k}$$

Hieraus (und aus dem *Abelschen Stetigkeitssatz*) folgt für $R \to 1+$

$$1 \geq \sum_{k=0}^{\infty} k\, |A_k|^2 .$$

□

01.02.08

Bemerkung. *Es sei $f \in S$. Dann liegt auch*

$$g(z) := \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$$

in S, und g ist eine ungerade Funktion.

Beweis. Es sei $h(z) := \frac{f(z)}{z}$. Dann ist h holomorph auf $\mathbb{D}$ fortsetzbar mit $h(0) = f'(0) = 1$, und wegen der Injektivität von f ist $f(a) \neq f(0) = 0$ für alle $z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$. Also ist h nullstellenfrei in $\mathbb{D}$. Daher existiert die holomorphe Wurzel $\sqrt{h(z^2)}$. Dies zeigt $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Es ist $g(0) = 0$ und $g'(0) = \sqrt{f'(0^2)} = \sqrt{1} = 1$ (wenn man den Zweig der Wurzel so wählt, dass $\sqrt{1} = 1$).
Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ mit $g(z_1) = g(z_2)$. Dann folgt:

$$f(z_1^2) = g^2(z_1) = g^2(z_2) = f(z_2^2),$$

Wegen der Injektivität von f also $z_1^2 = z_2$, das heißt $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$. Im Fall $z_1 = -z_2$ ergibt sich wieder:

$$g(z_1) = g(-z_2) = -g(z_2) = -g(z_1),\ \text{also } g(z_1) = 0,$$

denn g ist offensichtlich ungerade.
Wegen der Nullstellenfreiheit von $\sqrt{(z^2)}$ folgt $z_1 = 0$, also auch $z_2 = -z_1 = 0 = z_1$.
Dies zeigt die Injektivität von g! Also ist $g \in S$ □

Satz 5.5. Satz von Bieberbach
Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in S$$

Dann gilt $|a_2| \leq 2$, *und* $|a_2| = 2$ *genau dann, wenn* f *eine* Rotation der Koebe Funktion *ist, das heißt*

$$f(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} \quad \textit{für ein } \alpha \in \mathbb{C} \textit{ mit} |\alpha| = 1$$

Beweis. Es sei $g(z) := z \cdot \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. Um 0 besitzt g die Entwicklung

$$g(z) = z \cdot \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots} = z \cdot \left(1 + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \cdots\right) = z + \frac{a_2}{2} \cdot z^2 + \cdots$$

Es sei $F(z) := \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$. Aus $g \in S$ (siehe Bemerkung) folgt, dass F *holomorph und injektiv* in $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$.
Um 0 besitzt F die *Laurent Entwicklung*:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \cdots} = \frac{z}{1 + \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots} \\
&= z \cdot \left(1 - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \\
&= z - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \cdots
\end{aligned}$$

Es folgt $F \in \Sigma$. Aus Satz 5.4 folgt

1. $\left|\frac{a_2}{2}\right| \leq 1$, also $|a_2| \leq 2$ und
2. dass Gleichheit nur gilt, wenn $F(z) = z + \frac{\alpha}{z}$ für ein α mit $|\alpha| = 1$.

Letzteres impliziert

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z + \frac{\alpha}{z}}, \text{ also } g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} + \alpha z} = \frac{z}{1 + \alpha z^2}$$

also

$$\frac{f(z^2)}{z^2} = \frac{1}{(1 + \alpha z^2)^2}, \text{ also } f(\zeta) = \frac{\zeta}{(1 + \alpha \zeta)^2}.$$

□

5.2.1. Bieberbachsche Vermutung

Für

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in S$$

gilt

$$\forall_{n \geq 0} \, |a_n| \leq n$$

(Beweis 1984 durch Louis de Brange)

Satz 5.6. Koebesche 1/4-Satz
Es sei $f \in S$ und $w \in \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{D})$. Dann gilt $|w| \geq \frac{1}{4}$. Gleichheit gilt genau für Rotation der Koebe-Funktion [Es ist also $K_{\frac{1}{4}}(0) \subseteq f(\mathbb{D})$.]

Beweis. Es sei

$$f(z) := \frac{w\ f(z)}{w - f(z)}.$$

Dann ist F holomorph in $\mathbb{D}$ (da $f(z) \neq w$ für alle $z \in \mathbb{D}$) und injektiv. Um 0 hat F die Entwicklung (falls $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$).

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{w(z + a_2 z^2 + \cdots)}{w - z - a_2 z^2 \cdots} = \frac{z + a_2 z^2 + \cdots}{1 - \frac{z}{w} - \frac{a_2}{w} z^2 + \cdots} \\ &= \left(z + a_2 z^2 + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{w} + \cdots\right) \\ &= z + \left(\frac{1}{w} + a_2\right) z^2 + \cdots \end{aligned}$$

Es folgt $F \in S$. Aus Satz 5.5 folgt $\left|\frac{1}{w} + a_2\right| \leq 2$ *und* $|a_2| \leq 2$. Dies impliziert

$$\left|\frac{1}{w}\right| \leq 2 + |a_2| \leq 2 + 2 = 4 \text{ also } |w| \geq \frac{1}{4}$$

Hierbei ist $|w| = \frac{1}{4}$ nur für $|a_2| = 2$ möglich, nach Satz 5.5 ist f dann eine Rotation der Koebe Funktion □

Satz 5.7. Koebescher Verzerrungssatz
Es sei $f \in S$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} \frac{|z|}{(1+|z|)^2} &\leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \\ \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} &\leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \end{aligned}$$

In jeder dieser *Umgebungen gilt Gleichheit für ein $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ genau dann, wenn f eine Rotation der Koebe Funktion ist.*

Beweis. Nach Satz 5.5, angewandt auf die Koebe- Transformation von f, folgt

$$\forall_{z \in \mathbb{D}} \left|\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(z) \cdot \left(1 - |z|^2\right) - \bar{z}\right| \leq 2$$

Somit ist für gegebene $z \in \mathbb{D}$

$$\forall_{t \in [0,1]} \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'}(tz) \cdot \left(1 - t^2 |z|^2\right) - t\bar{z}\right| \leq 2$$

also

$$\forall_{t \in [0,1]} \left|z \cdot \frac{f''}{f'}(tz) - \frac{2t\,|z|}{1 - t^2 |z|^2}\right| \leq 4 \cdot \frac{|z|}{1 + t^2 |z|^2}$$

$$\text{Integration ergibt } \left|\left(\log f'(tz)+\log(1-t^2|z|^2)\right)\right|_{t=0}^{t=1} = \left|\int_0^1 \left(z\cdot\frac{f''}{f'}(tz)-\frac{2t|z|^2}{1-t^2|z|^2}\right)dt\right|$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_0^1 \left|z\cdot\frac{f''}{f'}(tz)-\frac{2t|z|^2}{1-t^2|z|^2}\right|dt \le 4\cdot\int_0^1 \frac{|z|}{1-t^2|z|^2}dt\\
&= 2\cdot\int_0^1\left(\frac{|z|}{1+t|z|}+\frac{|z|}{1-t|z|}\right)dt\\
&= 2\cdot\left(\log(1+t|z|)-\log(1-t|z|)\right)\Big|_{t=0}^{t=1}\\
&= \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\text{also } \left|\log\left[f'(z)\cdot(1-|z|^2)\right]\right| \le \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$$

$$\text{also } -\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 \le \operatorname{Re}\log\left[f'(z)\cdot(1-|z|^2)\right] \le \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$$

$$\text{also } \log\left(1-|z|\,1+|z|^2\right)-\log(1-|z|^2) \le \log|f'(z)| \le \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)-\log(1-|z|^2)$$

$$\text{also } \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

Gilt hierbei Gleichheit für ein $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$, so muss

$$\forall_{t\in[0,1]}\left|z\cdot\frac{f''(tz)}{f'(tz)}-\frac{2t|z|^2}{1-t^2|z|^2}\right| = 5\cdot\frac{|z|}{1-t^2|z|^2}$$

gelten. Also muss insbesondere $\left|z\cdot\frac{f'(0)}{f''(0)}\right| = 4\cdot|z|$, das heißt $|f'(0)|=4$ sein. Aus Satz 5.5 folgt, dass f eine Rotation der Koebe Funktion ist. Weiter ist

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\int_0^1 f'(\zeta)d\zeta+f(0)\right| = \left|\int_0^1 f'(tz)\dot{z}dt\right| \le \int_0^1 |z|\cdot|f'(tz)|\,dt\\
&\le |z|\cdot\int_0^1\frac{1+t|z|}{(1-t|z|)^3}dt = \int_0^{|z|}\frac{1+u}{(1-u)^3}du = \ldots = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}
\end{aligned}$$

Falls $|f(z)|\ge\frac{1}{4}$, so ist

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le \max_{0\le x\le 1}\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{4} \le |f(z)|\,.$$

Nun sei $|f(z)|<\frac{1}{4}$. Mit Satz 5.6 folgt dann $[0,f(z)]\subseteq K_{\frac{1}{4}}(0)\subseteq f(\mathbb{D})$. Es sei $\gamma(t) := f^{-1}\left(t\cdot|f(z)|\right)$. Dann ist γ ein Weg in $\mathbb{D}$, und es folgt

$$\begin{aligned}
|f(z)| = L(f\circ\gamma) &= \int_0^1\left|\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right|dt = \int_0^1 |f'(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\,dt\\
&\ge \int_0^1\frac{1-|\gamma(t)|}{(1+|\gamma(t)|)^3}\cdot\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\,dt\\
&= \int_0^{|z|}\frac{1-s}{(1+s)^3}ds = \ldots = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Teil II.

Funktionentheorie II

14.04.2008

Riemannsche Abildungssatz: Ω einfach zusammenhängend, $z_0 \in \Omega$, $\hat{E}\ f : \Omega \to \mathbb{D}$, holomorph und injektiv

$$\begin{aligned} f(z_0) &= 0, \\ f'(z_0) &\to 0. \\ w(z) &= e^{i\lambda}\frac{z-0}{1-\bar{a}z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |a| < 1 \\ S &= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f \text{ injektiv}, f(0) = 0 \quad f'(0) = 1\} \\ f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in S \\ &\Rightarrow |a_k| \le k,\ k \ge 1 \\ &\Rightarrow \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2},\ z \in \mathbb{D} \\ &\Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\mathcal{K} := \{f \in S :\ f(\mathbb{D}) \text{ konvex}\} \subset S.$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{z}{1-z} \in \mathcal{K}. \\ \mathbb{D} &\to \{\operatorname{Re} w \ge -\frac{1}{2}\} \\ zf_0'(z) &= \frac{z}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

Subordination

Definition. $f,\ g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Dann ist f *subordination* zu g ($f \prec g$) falls eine Funktion $w \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ existiert mit $w(0) = 0$, $|w(z)| \le 1$ in $\mathbb{D}$, so dass

$$f(z) = g(w(z)), \quad z \in \mathbb{D}$$

Bemerkung.

1. $f \prec g \Rightarrow \begin{cases} f(0) & = g(0) \\ f(\mathbb{D}) & \subset g(\mathbb{D}) \end{cases}$

2. $$\begin{aligned} &f(z) = z^2,\ g(z) = z \Rightarrow f \prec g? \quad (f(z) = g(z^2)) \\ &f(z) = z,\ g(z) = z^2 \Rightarrow f \not\prec g. \end{aligned}$$

3. $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ f(0) = g(0),\ f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ *injektiv in* $\mathbb{D}$
   $\Rightarrow f \prec g.\ (f(z) = g(w(z)) \Leftrightarrow g^{-1}(f(z)) = w(z))$

Satz 5.8. Satz über das Prinzip der Subordination

$$f \prec g,\ r \in (0,1] \Rightarrow f(\mathbb{D}_r) \subset g(\mathbb{D}_r)$$
$$(\mathbb{D}_r : \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < r\})$$

Beweis.

$$z_0 \in \mathbb{D}_r \Rightarrow f(z_0) = g(w(z_0)) \in g(\mathbb{D}_r)$$

Nach dem Schwartzschen Lemma gilt:

$$|w(z_0)| \leq |z_0|$$

das heißt:

$$w(z_0) \in \mathbb{D}_r$$

□

Beispiel.

$$P := \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})\ :\ F(0) = 1,\ \operatorname{Re} F(z) > 0\ in\ \mathbb{D}\}$$
$$F_0(z) := \frac{1+z}{1-z}$$
$$\mathbb{D} \to \textit{Riemannsche Abbildungssatz, injektiv in } \mathbb{D} \Rightarrow F \qquad \prec F_0 \quad \forall_{F \in P}$$
$$F(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$
$$f(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}, \quad |w(z)| \leq |z|$$
$$\leq |F(z)| = \left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$
$$|z| \leq r$$

Bemerkung.

$$F = \frac{a}{z-z_0} + k(z),\ \textit{meromorph in } U(z_0) \text{ Pol } \textit{1. Ordnung in } z_0$$
$$\Rightarrow \operatorname{Re} F\ \textit{in } U(z_0)\ \textit{kann nicht} \geq 0\ \textit{sein.}$$

Satz 5.9. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. *Dann ist* $f \in \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ *genau dann, wenn* $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$ *in* $\mathbb{D}$.

Bemerkung.

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \Rightarrow f'(z) \neq 0\ in\ \mathbb{D}$$
$$f'(z) = A(z-z_0)^k + \ldots +,\ k \geq 1$$
$$f''(z) = A \cdot k(z-z_0)^{k-1} + \ldots$$
$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \ldots$$

Beweis.

1. $f \in \mathcal{K} \Rightarrow \frac{1}{r} f(rz) \in \mathcal{K}$ für $0 < r < 1$. Diese Funkion ist auch „schlicht“. (f bildet Kreis auf Konvexes Gebiet ab)
   Zu zeigen: $f(\mathbb{D}_r)$ konvex. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_r,\ |z_1| \leq |z_2|$, wähle $t \in [0,1]$.

$$
\begin{aligned}
g(z) :&= tf\left(\frac{z_2}{z_1} z\right) + (1-t)\cdot f(z),\ z \in \mathbb{D}. \\
g(0) &= 0 = f(0),\ g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D}), \quad f \in S \\
&\Rightarrow g \prec f \\
\Rightarrow g(\mathbb{D}_r) &\subset f(\mathbb{D}_r) \\
\Rightarrow g(z_1) &= \boxed{t \cdot f(z_2) + (1-t)\cdot f(z_1) \in f(\mathbb{D}_r)} \\
\Rightarrow f(\mathbb{D}_r) &\text{ konvex}
\end{aligned}
$$

Monotonie der Tangente

$$v(\theta) = f\left(re^{i\theta}\right)$$

konvexität

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{d\theta} \arg \frac{d}{d\theta} v(\theta) &\geq 0 \\
\frac{d}{d\theta} \arg \frac{d}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \arg \left[f'\left(re^{i\theta}\right) rie^{\theta}\right] \\
&= \frac{d}{d\theta} \operatorname{Im} \log \left[rie^{i\theta}\ f'\left(re^{i\theta}\right)\right] \\
&= \operatorname{Im} \frac{d}{d\theta} \log \left[ire^{i\theta}\ f'\left(re^{i\theta}\right)\right] \\
&= \operatorname{Im} \frac{d}{d\theta} \left[i\theta + \log f'\left(re^{i\theta}\right)\right] \\
&= \operatorname{Im} \left[1 + \frac{f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)} ire^{i\theta}\right] \\
&= 1 + \operatorname{Re}\left(re^{i\theta} \frac{f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)}\right) \\
&\Rightarrow \forall_{z \in \mathbb{D}} \qquad \underbrace{\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{\underbrace{f'(z)}_{\neq 0}}\right]}_{\text{harmonisch in } \mathbb{D}\text{, und ist eine holomorphe Funktion}} \qquad \geq 0
\end{aligned}
$$

17.04.08

2.

$$\begin{aligned}
0 < \operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right) &\text{ mit } f' \neq 0\\
&= \frac{d}{d\theta}\arg\frac{d}{d\theta}v(\theta), \qquad v(\theta) = f\left(re^{i\theta}\right), \quad z = re^{i\theta}\\
\arg \dot{v}(2\pi) = -\arg\dot{v}(0) &= \int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\arg\dot{v}(\theta)\,d\theta\\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(1+\frac{re^{i\theta}\,f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)}\right)\,d\theta}_{=1}\cdot 2\pi\\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(re^{i\theta}):\ 0 \leq \theta < 2\pi$ ist Jordankurve mit konvexen Innengebiet.

$\square$

Irgendwo um 3.9 haben wir vielleicht schon mal gezeigt, dass: $f(e^{i\theta})$ injektiv ist.
$\Rightarrow f$ ist injektiv in $\bar{\mathbb{D}}$, $f(\mathbb{D})$ ist das Innere der Randkurce $\{f(e^{i\theta}) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\begin{aligned}
\text{Windungszahl } 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{f(\partial\mathbb{D})}\frac{dw\{w-w_0}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-w_0}\\
\overset{3.6}{=} N_{w_0}(f) \text{ in } \mathbb{D}\\
w = f(z),\ z \in \partial\mathbb{D}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist bijektiv $\mathbb{D} \to$ inverses von $\{f(e^{i\theta})\}$.

Satz 5.10. *($P = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \mid f(0) = 1,\ \operatorname{Re} f(z) > 0$ in $\mathbb{D}\}$).*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in P \Rightarrow |a_k| \leq 2,\ k \geq 1.$$

Beispiel.

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + z\cdot\sum_{k=1}^{\infty} z^k\left(1+2\frac{z}{1-z}\right)$$

Beweis. $k_0 \in \mathbb{N}$ fest.

$$\begin{aligned}
F(z) :&= \frac{1}{k_0}\sum_{k=1}^{k_0} f\left(e^{2\pi i\frac{k}{k_0}}z\right)\\
F(0) &= \frac{1}{k_0}\underbrace{f(0)}_{=1} = 1
\end{aligned}$$

F ist holomorph im Einheitskreis und der Realteil von F ist auch positiv, da die Summer der Realteile, die alle Positiv sind, logischerweise auch positiv ist

$$\begin{aligned}
F &\in P \\
F(z) &= \frac{1}{k_0}\sum_{k=1}^{k_0} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{2\pi i \frac{k}{k_0} j} z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \underbrace{\left(\frac{1}{k_0}\sum_{k=1}^{k_0} e^{2\pi i \frac{k}{k_0} j}\right)}_{\begin{cases} 0 & j \text{ nicht vielfaches von } k_0 \text{ ist} \\ 1 & j \text{ vielfaches von } k_0 \text{ ist}\end{cases}} z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk_0} z^{jk0} = 1 + a_{k_0} z^{k_0} + a_{2k_0} z^{2k_0} + \ldots \in P \\
\frac{w-1}{w+1}&, \ \operatorname{Re} w \geq 0
\end{aligned}$$

$w = i\alpha$

$$\frac{i\alpha - 1}{i\alpha + 1} = -\frac{i\alpha + 1}{i\alpha + 1} = -\frac{\overline{i\alpha + 1}}{i\alpha + 1}$$

ergibt den Einheitskreis

$$\begin{aligned}
\frac{(z) - 1}{F(z) + 1} &: \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\
\frac{1 + a_{k_0} z^{k_0} + \ldots - 1}{1 + a_{k_0} z^{k_0} + \ldots + 1} &= \frac{a_{k_0} z^{k_0}(1 + \ldots)}{z(1 + \ldots)} \\
&= \frac{a_{k_0}}{2} + \ldots \\
\Rightarrow \left|\frac{a_{k_0}}{2}\right| &\leq 1
\end{aligned}$$

□

21.04.08

Satz 5.11.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{K}$$

Dann gibt es $|c_k| \leq 1, \ k \geq 1$ *mit*

$$f_0(z) = \frac{1}{1 - xz}, \qquad |x| = 1$$

Beweis.

$$g(z) := f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \qquad b_k = k \cdot c_k$$

$$\frac{z \cdot g'(z)}{g(z)} = \frac{z(f' + z \cdot f'')}{z \cdot f'(z)} = 1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'} =: h(z) \in P$$

$$\underbrace{z \cdot g'(z)} = h(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k \cdot \sum_{k=10}^{\infty} b_k z^k \qquad b_0 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} h_j b_{k-j} \right) z^k$$

$$z^k : \qquad k \cdot b_k = \sum_{j=0}^{k} h_j b_{k-j}, \quad k = 1, \ldots$$

$$= \underbrace{h_0}_{1} b_k + \sum_{j=1}^{k} h_j b_{k-j}$$

Beweis mittels vollständiger Induktion

Ind. Anfnag: $b_1 = 1$

Ind. Annahme: $|b_j| \leq j, \ j \leq k-1$

$$\Rightarrow (k-1) b_k = \sum_{j=1}^{k} h_j b_{k-j}$$

$$\Rightarrow (k-1)\,|b_k| \leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|h_j|}_{\leq 2} \cdot |b_{k-j}|$$

$$=\leq 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} |b_{k-j}|$$

$$\leq 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)$$

$$= \cancel{2} \frac{k(k-1)}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow |b_k| \leq k.$$

□

Satz 5.12. $\Omega \subset \mathbb{C}$ *konvexes Gebiet,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ *in* Ω*. Dann ist* f *in* Ω *injektiv.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
z_1, z_2 \in \Omega, \qquad f(z_2) - f(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f'(t)\,\mathrm{dt} \\
t &= (1-\tau)z_1 + \tau z_2, \qquad 0 \le t \le 1 \\
f(z_2) - f(z_1) &= \int_0^1 f'((1-\tau)z_1 + \tau \cdot z_2) \cdot (z_2 - z_1)\ d\tau \\
\Rightarrow \operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} &= \operatorname{Re} \int_0^1 f'((1-\tau)z_1 + \tau z_2)\ d\tau \\
&= \int_0^1 \underbrace{\operatorname{Re} f'(\ldots)}\ d\tau > 0 \\
\Rightarrow \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} &\neq 0 \qquad f(z_2) \neq f(z_1)
\end{aligned}
$$

□

Definition. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ heißt *fast konvex*, falls ein $g \in \mathcal{K}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} \frac{f'(z)}{g'(z)} > 0,\ z \in \mathbb{D}$$

Bemerkung.

1. $z = 0 : \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
2.
3. f *konvex* $\Rightarrow z \cdot f' =: g(z) \in C$.

$$\operatorname{Re} \frac{(z \cdot f')'}{f'} = \operatorname{Re} \frac{zf'' + f'}{f'} = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'}\right) > 0$$

Satz 5.13.

1. $f \in C \Rightarrow f$ *ist injektiv in* $\mathbb{D}$. $(C \subset S)$
2. *Für jedes*

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in C$$

gilt

$$|a_k| \le k,\ k \in \mathbb{N}$$

Beweis.

1. $\Omega = g(\mathbb{D})$ ist konvex., $g^{-1}(w) : \Omega \to \mathbb{D}$.

$$F(w) := f(g^{-1}(w)) \in \mathcal{H}(\Omega).$$

$$e^{i\alpha}F'(w) = e^{i\alpha}f'(g^{-1}(w))\frac{1}{g'(g^{-1}(w))} = e^{i\alpha}\frac{f'(z)}{g'(z)}, \; z = g^{-1}(w) \in \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} e^{i\alpha}F'(w) > 0 \text{ in } \Omega \overset{5.12}{\Rightarrow} f(w) \text{ injektiv in } \Omega.$$

$$\Rightarrow F(g(z)) = f(z) \text{ injektiv in } \mathbb{D}$$

2.

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{i\alpha}\frac{f'(z)}{g'(z)} \Rightarrow \operatorname{Re} q(z) > 0 \text{ in } \mathbb{D} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \\ q(0) &= e^{i\alpha} \\ \frac{g(z) - i\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \underbrace{\frac{q_0 - i\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{=1} + \frac{1}{\cos\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{q(z)}{\cos\alpha} - i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) > 0, \; z \in \mathbb{D}, \cos\alpha > 0$$

$$\Rightarrow \frac{|q_n|}{\cos\alpha} \leq 2 \Rightarrow |q_n| \leq 2 \cdot \cos\alpha \leq 2, \; k \in \mathbb{N}$$

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k z^k = e^{-\alpha}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k}_{q(z)} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k b_k z^k}_{g'(z)}$$

$$\ldots |k a_k| \leq k^2 \Rightarrow |a_k| \leq k$$

□

Bemerkung.

$$f \in \mathcal{K} \Rightarrow z \cdot f' \qquad\qquad \in C$$

$$v(\varphi) = f(re^{i\varphi})$$

$$0 \leq \frac{d}{d\varphi}\arg\frac{d}{d\varphi}f(re^{i\varphi}) = \frac{d}{d\varphi}\arg zf'(z) = \frac{d}{d\varphi}\arg F(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}f(re^{i\varphi}) &= f'(re^{i\varphi})re^{i\varphi} \\ &= izf'(z) \end{aligned}$$

24.04.08

Die Vermutung von Gogosinski:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \subset S^* \subset C \subset S \\ f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \prec g \in S \\ \Rightarrow |a_k| \leq k,\ k \geq 2.\end{aligned}$$

Definition. des *Hadamard Produktes*

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \\ g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in \mathcal{H}(\{0\}) \\ f(*g)(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k\end{aligned}$$

Seien $R_f,\ R_g$ die Konvergenzradien von $f,\ g$. Dann ist $R_{(f*g)} \geq R_f \cdot R_g$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{(f*g)}} &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k b_k|} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} \\ &= \frac{1}{R_f} \cdot \frac{1}{R_g}\end{aligned}$$

Beispiel. *1.* $\frac{1}{1-z} * g(z) = g(z)$

2. $\underbrace{\frac{1}{1-xz}}_{|x|\leq 1} * g(z) = g(xz)$

3. $\frac{z}{(1-z)^2} * g(z) = z \cdot g'(z)$

Definition.

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) := \|f\| \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| .$$

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{2}} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \mid f(0) = 1,\ \operatorname{Re} f(z) > \frac{1}{2},\ z \in \mathbb{D}\}$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,\ b_0 = 1.$$

$$g \in \mathcal{H},\ 0 < r < 1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(2\operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) - 1\right) \frac{d\varphi}{1-e^{-i\varphi}\frac{z}{r}}, \quad |z| < r$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0} 1\infty\ b_k r^k e^{ik\varphi} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} r^k e^{-ik\varphi} - 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-ij\varphi}\frac{zj}{r^j} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k e^{ik\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} r^k e^{-ik\varphi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-ij\varphi}\frac{z^j}{r^j} d\varphi$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-ij\varphi}\frac{z^j}{r^j} d\varphi}_{=1} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k e^{ik\varphi}\right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-ij\varphi}\frac{z^j}{r^j}\right) d\varphi}_{=\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k} + \ldots = g(z)$$

Satz 5.14.

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ g \in \mathcal{P} \Rightarrow \|f * g\| \leq \|f\|$$

Beweis.

$$f * g = f * \frac{1}{2\pi} int_0^{2\pi} \left(2\operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) = -1\right) \frac{d\varphi}{1-e^{-i\varphi}\frac{z}{r}}, \quad |z| < r < 1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(2\operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) = -1\right) \cdot \left(f * \frac{1}{1-e^{-i\varphi}\frac{z}{r}}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} g\left(re^{-i\varphi} - 1\right) \cdot f\left(e^{-i\varphi}\frac{z}{r}\right) d\varphi$$

$$\underbrace{|(f*g)(z)|}_{|z|<r} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} \pi \left|2\operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) - 1\right| \cdot \underbrace{\left|f\left(e^{-i\varphi}\frac{z}{r}\right)\right|}_{\leq \|f\|} d\varphi$$

$$\leq \|f\| \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) - 1\right) d\varphi}_{=1}$$

$$= \|f\|$$

$$\Rightarrow \|f * g\| \leq \|f\|$$

□

Betrachte

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n} z^k \in \pi_n \\ &\Rightarrow F_n \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N} \\ F_n * \underbrace{P}_{\in \pi_n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n} a_k z^k \\ &= P(z) - \frac{1}{n} z P'(z) \end{aligned}$$

Fejér Polynom

Es sei π_n ein Polynom vom Grad n.

Satz 5.15. Satz über die Bernsteinsche Ungelichung

$$P \in \pi_n \Rightarrow \|P'\| \leq n\|P\|$$

Beweis.

$$Q \in \pi_n \qquad \tilde{Q}(z) := z^n Q\left(\frac{1}{z}\right) \in \pi_n$$

$$Q(z) = \sum_{k=0} q_k z^k \qquad = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k} z^k$$

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} \left|\tilde{Q}(z)\right| &= \left\|\tilde{Q}\right\| = \left\| z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)\right\| = \|Q\| \\ \left\|\frac{1}{n} P'(z)\right\| &= \left\|\frac{z}{n} P'(z)\right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k z^k * P \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n} \widetilde{\sum_{k=0}^{n} k z^k} * P \right\| \\ &= \left\| \underbrace{\frac{1}{n} \widetilde{\sum_{k=0}^{n} k z^k}}_{=F_n(z) \in \mathcal{P}} * \tilde{P} \right\| \qquad \leq \|\tilde{P}\| \\ &\qquad\qquad = \|P\| \end{aligned}$$

$\square$

Träumen Mathematiker?

Ein Traum war

$$\|P'\| = \|zP'(z)\| \left[\| \frac{z}{(1-z)^2} * P\| \leq n\|P\| \right]$$

$$\forall_{\mathcal{P}\in\pi_n}\forall_{f\in S}\ \|f * P\| \leq n\|P\|$$

Geträumt wurde dieser Traum von Sheil-Small im Jahre 1971

Beispiel.

$$P(z) = z^n$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \|f * z^n\| \leq n\|z^n\| = n$$

$$|a_n| = \|a_n z^n\|$$

28.04.08

Satz 5.16. Jack's Lemma

Bemerkung. *Jack hat in seiner Doktorarbeit 1977 dieses Lemma aufgeschrieben, leider mit falschem Beweis. An sich ist dieser Satz nicht neu (genau genommen ist er ca 50 Jahre älter), der Name hat sich aber eingeprägt. Viel allgemeiner formuliert findet man diesen Satz in der Literatur auch als* Satz von Julia Wolff.

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *mit* $f \not\equiv 0$. *Für ein* $z_0 \in \mathbb{D}$ *gelte*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad |z| \leq |z_0|$$

Außerdem sei $f(0) = 0$. *Dann gilt:*

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \geq 1$$

Beweis.

$$w(z)0\frac{f(z)}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

Für $|z| \leq |Z_0|$ gilt:

$$\begin{aligned}
|w(z)| &= \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max_{|z|=|z_0|}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = |f(z_0)|\, z_0 = |w(z_0)|\, \theta(\varphi) && = w(re^{i\varphi}) \\
\frac{d}{d\varphi} &= ire^{i\varphi}w'(re^{i\varphi}) \\
z_0 &= re^{i\varphi} \\
&= iz_0w'(z_0) \\
\Rightarrow \arg w(z_0) &= \arg z_0w'(z_0) \\
\Rightarrow \exists_{x\geq 0}\; z_0w'(z_0) &= \lambda w(z_0) \\
\Rightarrow \frac{Z_0w'(z_0)}{w(z_0)}&\lambda \geq 0 \\
\Rightarrow f(z) &= zw(z) \\
\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)} &= z_0\left(\frac{1}{z_0} + \frac{w'(z_0)}{w(z_0)}\right) \\
&= 1 + \frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)} \geq 1.
\end{aligned}$$

□

Satz 5.17. $f \in \mathcal{K}$. *Dann gilt:*

1. $\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D}$
2. $\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D}$

$$f \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0 \;\; in \;\mathbb{D}$$

Beweis. Aus der (hier fehlenden) Skizze folgt:

$$\Rightarrow (F \in \mathcal{P} \Leftrightarrow F \prec h)$$

1. zu zeigen: $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{zf'}{f} \prec \frac{1}{1-z} \\
&\Leftrightarrow \frac{zf'}{f} \prec \frac{1}{1-w(z)}, && |w(z)| \geq |z| \text{ in } \mathbb{D}
\end{aligned}$$

zu zeigen:

$|w(z)| \leq |z| \overset{2.17}{\Leftrightarrow} (|w(z)| \leq 1,\ w(o) = 0)$

zu zeigen:

$$|w(z)| \leq 1 \text{ in } \mathbb{D}$$

Annahme: diese Aussage sei falsch:

$$\Rightarrow \exists_{z_0\in\mathbb{D}} \; \begin{array}{c} |w(z)| \le |w(z_0)| = 1 \\ |z| \le |z_0| \end{array}$$

Diese Ungleichung kann man nun differentieren, man kann sie genau genommen auch *logarithmisch differentieren*:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_0} + \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} &= \frac{w'(z_0)}{1-w(z_0)} \\
1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} &= \frac{z_0 w'(z_0)}{1-w(z_0)} + \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \\
&= \frac{z_0 w'(z_0)}{1-w(z_0)} + \frac{1}{1-w(z_0)} \\
&= \underbrace{\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}}_{\kappa\ge 1} \cdot \frac{w(z_0)}{1-w(z_0)} + \frac{1}{1-w(z_0)} \\
\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right) &= \kappa \operatorname{Re} \frac{w(z_0)}{1-w(z_0)} + \underbrace{\operatorname{Re} \frac{1}{1-w(z_0)}}_{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\frac{w}{1-w} = \frac{1}{1-w} - 1}{=} -\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2} \le 0
\end{aligned}$$

Widersrpuch!

$$\Rightarrow |w(z)| \le 1, \qquad z \in \mathbb{D}$$

Es folgt die Behauptung

2. zu zeigen: $\operatorname{Re} \frac{zf'}{f} > \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)}{z} &= \frac{1}{1-w(z)} \\
-1 + \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} &= \frac{z_0 w'(z_0)}{1-w(z_0)} = \underbrace{\kappa}_{\ge 1} \frac{w(z_0)}{1-w(z_0)} \\
\cancel{-1} + \operatorname{Re} \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} &= \kappa \underbrace{\operatorname{Re} \frac{w(z_0)}{1-w(z_0)}}_{=-\frac{1}{2}} + 1 \le -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \textbf{Widersruch!}
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. *Aus (2.) in Satz 5.17 folgt:*

$$
\begin{aligned}
f \in \mathcal{K} \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} &\Leftrightarrow F = \frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z} = G \\
&\Rightarrow F(\mathbb{D}_r) \subset (G)(\mathbb{D}_r), \quad 0 < r \leq 1 \\
|z| \leq r : |F(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| &\leq \max_{|z|=r} |G(z)| = \frac{1}{1-r} \\
&\Rightarrow |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{D} \\
&|f(z)| \geq \frac{|z|}{1+|z|}, \quad z \in \mathbb{D}
\end{aligned}
$$

Hieraus kann man folgern:

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$$

Letzte Vorbereitung für den nächsten Satz und dessen Beweis: Wir erinnern uns, dass:

$$
\begin{aligned}
f \in \mathcal{K} \Leftrightarrow g = zf' \in S^* \\
&= \frac{z}{(1-z)^2} * f = \frac{z}{(1-z)^2} * \underbrace{\left(z \frac{f}{z} \right)}_{=h \in \mathcal{P}} \\
&= \frac{z}{(1-z)^2} * (zh)
\end{aligned}
$$

Komplexe Funktion in 2 Variablen:

$$
\begin{aligned}
F(z, \zeta) &= \frac{1}{1 - \zeta w(z)}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}, \\
F(z, \zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\zeta) z^k \qquad \boxed{q_k(\zeta) \in \pi_k}
\end{aligned}
$$

Entwicklung nach der Variablen z mit $|w(z)| \leq |z|$

$$
\begin{aligned}
F(0, \zeta) &= \boxed{q_0(\zeta) \equiv 1} \\
F(z, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k(0) z^k \equiv 1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \boxed{q_k(0) = 0}, \quad \boxed{k \in \mathbb{N}}$$

Entwicklung nach der Variablen ζ

$$
\begin{aligned}
F(z, \zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} w(z)^k \zeta^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^k \zeta^k \\
w(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Potenzen von ζ kommen also nur mit höheren Exponenten von k vor

05.05.08

Zusammenfassung der wichtigen Eigenschaften:

(i) Jacks Lemma 5.16: $w \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ w(0)$, für ein $z_0 \in \mathbb{D}$ gelte $|w(z)| \leq |w(z_0)|\,,\ |z| \leq |z_0|$

$$\Rightarrow \left(f \in \mathcal{K} \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2} \text{ in } \mathbb{D} \right)$$

(ii) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ h \in \mathcal{P} \Rightarrow \|f * h\| \leq \|f\| = \|g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})\|\|\ g(0) = 1,\ \operatorname{Re} g(z)) > \frac{1}{2}\}.$

$$\left(f(z) = z^k \Rightarrow \|z^k * h\| \leq 1 \Rightarrow |a_k| \leq 1,\ h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)$$

(iii) $P \in \pi_k \Rightarrow \|P'\| \leq k\|P\|$

(iv)

$$F(z,\zeta) := \frac{1}{1-\zeta w(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\zeta) z^k \Rightarrow \begin{cases} q_0 \equiv 1 \\ q_k(0) = 0,\ k \in \mathbb{N} \\ q_k \in \pi_k \\ \operatorname{Re} F(z,\zeta) \geq \frac{1}{2},\ z,\zeta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$w \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ |w(z)| \leq |z|$$

Folgerung.

- $z \mapsto f(z,\zeta) \in \mathcal{P},\ \zeta \in \mathbb{D}$
- $|q_k(\zeta)| \leq 1,\ k \in \mathbb{N},\ \zeta \in \mathbb{D}$

Satz 5.18. Satz von Rougasinski für S^*
Für alle $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ g \in S^*$ mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \textit{ und } f \prec g$$

gilt:

$$|a_k| \leq k,\ k = 2, 3, \ldots$$

Beweis.

$$f(z) = g(w(z)),\ w \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$
$$|w(z)| \leq |z| \text{ in } \mathbb{D}$$
$$g = z \cdot \underbrace{G'}_{G\in\mathcal{K}} = \frac{z}{(1-z)^2} * G = \frac{z}{(1-z)^2} * z \underbrace{h}_{\in\mathcal{P}}$$
$$\Rightarrow F(z,\zeta) := \frac{1}{1-\zeta w(z)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\zeta) z^k$$
$$\Rightarrow |q_k(\zeta)| \leq 1, \quad q_k \in \pi_k$$
$$g(\zeta) *_\zeta \frac{1}{1-\zeta w(z)} = g(\zeta w(z))$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(g(\zeta) *_\zeta q_k(\zeta)\right) z^k$$
$$= \zeta \to 1: \quad f(z) \qquad = g(w(z)$$

$$|a_k| = |g(\zeta) *_\zeta q_k(\zeta)|\big|_{\zeta=1} \leq \|g(\zeta) *_\zeta q_k(\eta)\|$$
$$= \left\|\left(\frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} *_\zeta \zeta h(\zeta) *_\zeta q_k\right)\right\| = \left\|\frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} *_\zeta (\zeta h(\zeta) *_\zeta q_k)\right\|$$
$$= \|\zeta\,(\zeta(h(\zeta)) *_\zeta q_k)'\| = \left\|\underbrace{(\zeta h(\zeta) *_\zeta q_k(\zeta))}_{\in\pi_k}\right\|$$
$$\overset{\text{Bernstein}}{\leq} k\,\|\zeta h(\zeta) *_\zeta q_k(\zeta)\| = k\left\|\zeta\left(h(\zeta) * \frac{q_k(\zeta)}{\zeta}\right)\right\| = k\left\|\underbrace{h(\zeta)}_{\in\mathcal{P}} *_\zeta \frac{q_k(\zeta)}{\zeta}\right\|$$
$$\overset{(ii)}{=} k\left\|\frac{q_k(\zeta)}{\zeta}\right\| = k\,\|q_k(\zeta)\| \leq \kappa$$

□

Definition.

(i) $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$. $\lambda = e^{i\alpha},\ w_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ z(t) = w_0 e^{-\lambda t},\ t \in \mathbb{R}$ heißt *logarithmische Spirale* bezüglich λ.

(ii) Ω Gebiet, $0 \in \Omega$ heißt *α-spiralförmig*, falls für jedes $w_0 \in \Omega$ die Spirale $z(t) = w_0 e^{-\lambda t},\ t \geq 0$ in Ω liegt.

(iii) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ heißt *α-spiralförmig*, wenn $f \in S$ und $f(\mathbb{D})$ α-spiralförmig ist.

Lemma. $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \operatorname{Re}\varphi(z) > 0$ *in* $\mathbb{D}$.
Gegeben sei das AWP

$$\dot{z}(z) = -z(t)\varphi(z(t)),\ z(0) = \zeta \in \mathbb{D},\ t \geq 0$$

Dann existiert $z(t)$ für alle $t \geq 0$, ist eindeutig bestimmt und erfüllt

$$|z(t)| \searrow 0,\ t \to \infty$$

Beweis. Existiert eine lokale Lösung (eindeutig!) folgt aus der Existenz und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche DGLn:

1. $\zeta = 0 \Rightarrow z(t) = 0,\ t \geq 0$
2. $\zeta \neq 0:$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{\mathrm{dt}} \log z(t) &= \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = -\varphi(z(t)) \\
\operatorname{Re} \frac{d}{\mathrm{dt}} \log z(t) &= \boxed{\frac{d}{\mathrm{dt}} \log |z(t)| = -\operatorname{Re} \varphi(z(t)) < 0} \\
\Rightarrow |z(t)| \swarrow & \\
|z(t)| &\leq |\zeta| \\
\operatorname{Re} \varphi(z(t)) &\geq \delta > 0 \\
|z| &\leq |\zeta| \\
\Rightarrow \frac{d}{\mathrm{dt}} \log |z(t)| &\leq -\delta,\ t \geq 0 \\
\log |z(t)| - \log |\zeta| &= \int_0^t \frac{d}{\mathrm{dt}} \log |z(t)| \,\mathrm{dt} \leq -\delta t \\
|z(t)| &\leq |\zeta| = e^{-\delta t} \to 0,\ t \to \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Definition. $f - \alpha$ spiralförmig $\Leftrightarrow f(\zeta)e^{-\lambda t} \in f(\mathbb{D}),\ t \geq 0$

Satz 5.19. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1.\quad \lambda = e^{i\alpha},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *Dann ist f α-spiralförmig, genau dann, wenn*

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} \frac{z \cdot f'}{\lambda \cdot f} > 0. \tag{5.2}$$

Beweis.

„$\Leftarrow$“ $\varphi(z) := \frac{\lambda \cdot f(z)}{z \cdot f'(z)},\ z \in \mathbb{D}$ und 5.2 diese erfüllt. Wegen $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$ folgt: $f' \neq 0$ in $\mathbb{D}$ $\Rightarrow \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t,\zeta) &= -z(t,\zeta)\varphi(z,(t,\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{D},\ t \geq 0 \\
w(t,\zeta) :&= f(z(t,\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{D},\ t \geq 0 \\
\dot{w}(t,\zeta) &= f'(z(t,\zeta)) \cdot \dot{z}(t,\zeta) \\
&= f'(z(t,\zeta)) \cdot (-z(t,\zeta)\varphi(z(t,\zeta))) \qquad z := z(t,\zeta) \\
&= f'(z)\left(-z \cdot \frac{\lambda \cdot f(z)}{z \cdot f'(z)}\right) = -\lambda f(z(t,\zeta)) = \underline{-\lambda\omega(t,\zeta)} \\
\Rightarrow \omega(t,\zeta) &= \omega(0,\zeta)e^{-\lambda t} = f(z(0,\zeta))e^{-\lambda t} = \underline{f(\zeta)e^{-\lambda t}} \in f(\mathbb{D}),\ t \geq 0
\end{aligned}$$

$f(\mathbb{D})$ ist α-spiralförmig

f injektiv:

$$
\begin{aligned}
f(\zeta_1) = f(\zeta_2) &\Rightarrow \omega(t,\zeta_1) = \omega(t,\zeta)_2,\ t \geq 0 \\
&\Rightarrow f(z(t,\zeta_1)) = f(z,(t,\zeta_2)),\ t \geq 0
\end{aligned}
$$

Für t *groß genug* gilt $z(t,\zeta_1) = z(t,\zeta_1)$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow z(0,\zeta_1 &= z(0,\zeta_2) \qquad \text{Eindeutigkeit} \\
\zeta_1 &= \zeta_2
\end{aligned}
$$

„$\Rightarrow$" $f(\mathbb{D})$, α spiralförmig.

$$
\begin{aligned}
z(t,\zeta) :&= f^{-1}(f(\zeta)e^{-\lambda t}), \zeta \in \mathbb{D},\ t \geq 0. \\
\Rightarrow \begin{matrix} |z(t,\zeta)| \leq |\zeta| \\ t \geq 0,\ \zeta \in \mathbb{D} \end{matrix} &\begin{cases} |z(t,\zeta)| \leq 1, & \zeta \in \mathbb{D},\ t \geq 0 \\ |z(t,0)| = 0 \\ z(t,\cdot) \in \mathcal{H}(\mathbb{D}). \end{cases} \\
\dot{z}(t,\zeta) &= \frac{1}{f'(z(t,\zeta))} f(\zeta)(-\lambda)e^{\lambda t} \\
\dot{z}(0,\zeta) &= \frac{1}{f'(\zeta)} f(\zeta)(-\lambda) \\
\frac{\dot{z}(0,\zeta)}{z(0,\zeta)} &= -\lambda \frac{f(\zeta)}{\zeta \cdot f'(\zeta)} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{z(t,\zeta) - z(0,\zeta)}{t - z(0,\zeta)} \\
\Rightarrow -\operatorname{Re} \lambda \frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)} &= \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{1}{t} \operatorname{Re}\left(\underbrace{\frac{z(t,\zeta}{z(0,\zeta)}}_{|\cdots| \leq 1} - 1 \right) \leq 0
\end{aligned}
$$

$\square$

6. Harmonische Funktionen

08.05.08

Erinnerung Harmonische Funktion

Definition. Eine *harmonische Funktion* sieht im Wesentlichen wie folgt aus

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Es sind *lokale Realteile* von komplexen Funktionen. Für sie gilt auch die *Mittelwerteigenschaft*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + r \cdot e^{it}\right) \mathrm{dt}$$

Weiter gelten für harmonischen Funktionen das Maximums und Minimumsprinzip. Dies sind aber letztendlich nur umformulierungen vom Offenheitsprinzip holomorpher Funktionen.

6.1. Die Greensche Funktion

Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *subharmonisch*, falls u steig ist und zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert , so das ($K_\varepsilon(z_0) \subseteq \Omega$ und)

$$\forall_{r \in]0,\varepsilon[} \quad u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{dt}$$

Bemerkung. *Falls $u \in C^2(\Omega)$, so gilt:*

$$u \quad \textit{subharmonisch} \Leftrightarrow \Delta u \geq 0$$

Beweis. (evtl in den Übungen) □

Bemerkung. *Sind $\Omega_1,\ \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorph nund $u : \Omega_2 \to \Omega\mathbb{R}$ holomorph, so ist*

$$u \circ f : \Omega_1 \to \mathbb{R} \qquad \textit{harmonisch}$$

Beweis. Es sei ein $z_0 \in \Omega_1$ gegeben. Es sei $w_0 := f(z_0) \in \Omega_2$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq \Omega_2$ von w_0 und eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$, sodass $u|_U = RF$. Es ist dann $f^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von z_0 mit $(u \circ f)(z) = \mathrm{Re}(F \circ f)(z)$ für alle $z \in f^{-1}(U)$, und $F \circ f$ ist holomrph auf $f^{-1}(U)$. Daher ist $u \circ f$ harmonisch in $f^{-1}(U)$. Da dies für alle $z_0 \in \Omega_1$ gilt, ist $u \circ f$ harmonisch in Ω_1 □

Definition. Es sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine *Greensche Funktion* für Ω ist eine Funktion

$$g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit folgenden Eigenschaften

1. Für alle $z_0 \in \Omega$ ist $z \mapsto g(z, z_0)$ paarweise harmonisch in $\Omega \backslash \{z_0\}$
2. Für alle $z_0 \in \Omega$ ist $z \mapsto g(z, z_0) + \log |z - z_0|$ harmonisch in Ω
3. Für alle $\zeta \in \partial\Omega$ und alle $z_0 \in \Omega$ gilt:

$$\lim_{z \to \zeta} g(z, z_0) = 0$$

Eigenschaften.

1. *Jede Gebiet hat* höchstens eine *Greensche Funktion*
2. *Ist g eine Greensche Funktion für Ω, so ist $g(z, z_0) > 0$ für alle $z_0 \in \Omega$ und alle $z_0 \in \Omega \backslash \{z_0\}$*
3. *Ist g eine Greensche Funktion für Ω, so gilt:*

$$\forall_{z, z_0 \in \Omega} \quad g(z, z_0) = g(z_0)$$

Beweis.

1. Es seien g_1, g_2 Greensche Funktionen für Ω. Dann ist für festes Ω

$$\begin{aligned} v(z_0) &= g_1(z, z_0) - g_2(z, z_0) \\ &= (g_1(z, z_0) + \log |z - z_0|) - (g_2(z, z_0) + \log |z - z_0|) \end{aligned}$$

harmonisch in Ω mit

$$\forall_{\zeta \in \Omega} \quad \lim_{z \to \zeta} v(z) = 0$$

Nach dem Maximums- und Minimumsprinzip für harmonische Funktionen folgt:

$$\forall_{z \in \Omega} \quad v(z) = 0$$

das heißt $g_1(z, z_0) = g_2(z, z_0)$ für alle $z \in \Omega$ und alle $z_0 \in \Omega$

also ist $g_1 \equiv g_2$

2. Es sei ein $z_0 \in \Omega$ gegeben. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall_{z \in K_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\}} \quad g(z, z_0) > 0,$$

denn $\log |z - z_0| \xrightarrow{z \to z_0} -\infty$ und $z \mapsto g(z, z_0) + \log |z - z_0|$ ist stetig in z_0. Hieraus und aus

$$\forall_{\zeta \in \partial\Omega} \quad \lim_{z \to \zeta} g(z, z_0) = 0$$

folgt mit dem Minimumsprinzip, dass $g(z, z_0) > 0$ für alle $z \in \Omega \backslash K_\varepsilon(z_0)$ insgesamt also für alle $z_0 \in \Omega$

3. Übungsblatt 5

$\square$

Satz 6.1. Satz über das Lindelöff-Prinzip
Es seien Ω_1, Ω_2 Gebiete mit Greenschen Funktionen g_1, g_2. Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorph. Dann gilt:

$$\forall_{z,z_0\in\Omega} \quad g_2(f(z), f(z_0)) \geq g_1(z, z_0)$$

Beweis.

Es sei ein $z_0 \in \Omega_1$ gegeben. Es sei

$$v(z) := g_2(f(z), f(z_0)) - g_1(z, z_0)$$

Es sei

$$\begin{aligned} h(z) &:= v(z) + \log\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \\ &= (g_2(f(z), f(z_0)) + \log|f(z) - f(z_0)|) - (g_1(z, z_0) + \log|z - z_0|) \end{aligned}$$

Dann ist h harmonisch on Ω_1

Es sei

$$A := \{z \in \Omega_1 \mid f(z) = f(z_0)\}$$

In $\Omega_1\backslash A$ ist v harmonisch. Ist $\tilde{z} \in A\backslash\{z_0\}$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(\tilde{z}) \subseteq \Omega_1$ und $v(z) > 0$ für alle $z_0 \in K_\varepsilon(\tilde{z})$, denn

$$h(z) = v(z) + \log|f(z) - f(z_0)| - \log|z - z_0|$$

und

$$\log|f(z) - f(z_0)| \xrightarrow{z\to\tilde{z}} -\infty$$

Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ zu einer in $(\Omega_1\backslash A) \cup \{z_0\}$ holomorphen nullstellenfreien Funktion forsetzbar, sodass

$$u(z) = h(z) - \log\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|$$

in einer Umgebung von z_0 harmonisch ist.

Ist $f'(z_0) = 0$, so gilt $\log\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \xrightarrow{z\to z_0} -\infty$, also $v(z) \xrightarrow{z\to z_0} +\infty$. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$, sodass $K_\varepsilon(z_0) \subseteq \Omega_1$ und $v(z) > 0$ für alle $z \in K_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$. Weiter ist

$$\forall_{\zeta\in\partial\Omega} \quad \liminf_{z\to\zeta} \; v(z) = \underbrace{\liminf_{z\to\zeta} \; g_2(f(z), f(z_0))}_{\geq 0} - \underbrace{\lim_{z\to\zeta} g_1(z, z_0)}_{=0} \geq 0$$

mit dem Minimumsprinzip folgt $v(z) > 0$ für alle $z \in \Omega\backslash A$ und damit $v(z) \geq 0$ für alle $z \in \Omega_1$.

$\square$

15.05.08

Beispiele.

1. *Ω einfach zusammenhängendes Gebiet mit der konformen Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{D}$*

$$\Rightarrow g(z, z_0) = -\log\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)}\right|$$

ist Greensche Funktion von Ω. Es gilt:

   a) $g(z, z_0) = \operatorname{Re}\log\left(\frac{f(z)\dots}{\dots}\right)$, $z \neq z_0$ *ist harmonisch.*

   b) $g(z, z_0) + \log|z - z_0| = -\log\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| + \log\left|1 - \overline{f(z_0)} f(z)\right|$
   $\to f'(z_0) \neq 0$

   c) $\lim_{z\to\partial\Omega} g(z, z_0) = 0$

2. $\Omega = \mathbb{D}$

$$g(z, z_0) = -\log\left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right|$$

Anwendung. $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{D}$.

Lindelöff:
$$-\log\left|\frac{F(z_1) - F(z_2)}{1 - \overline{F(z_2)} F(z_1)}\right| \geq -\log\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 - z_1}\right|, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$
$$\Rightarrow \left|\frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)} F(z)}\right| \leq \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right|, \qquad z, z_0 \in \mathbb{D}$$

Definition. Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, stetig. Eine in Ω harmonische Funktion u mit $u \in C^\circ(\overline{\Omega})$ heißt *Lösung des Dirichlet-Problems* (D) bezüglich Ω und f, falls $u|_{\partial\Omega} = f$

Bemerkung. *Sei für Ω das Dirichlet-Problem lösbar (das heißt für beliebiges f). Dann hat Ω eine Greensche Funktion.*
$z_0 \in \Omega$, sei $v(z, z_0)$ Lösung von Dirichlet-Problem für $f(z) = \log|z - z_0|$, $z \in \partial\Omega$. Dann ist $g(z, z_0) = v(z, z_0) - \log|z - z_0|$ Greensche Funktionen für Ω

Betrachten wir eine punktierte Kreisscheibe

$$\Omega = \mathbb{D}\backslash\{0\}$$
$$f := \begin{cases} 0, & |z| = 1 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

Hier hat das Dirichlet-Problem *keine* Lösung. Nimmt man statt eines einzelnen Punktes eine Kreisscheibe heraus, dann funktioniert es wieder.

Satz 6.2. Poisson-Integral
Sei $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$u(z) : = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \mathrm{dt}, & z \in \mathbb{D} \\ f(z), & z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

die *Lösung vom Dirchichlet-Problems für $\mathbb{D}$ und f.*

$$\tilde{u}(z) := \begin{cases} u(z), & z \in \mathbb{D} \\ f(z), & z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

Vorbereitung für den Beweis

1. $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{dt}$ ist holomorph in $\mathbb{D}$
   $\Rightarrow u(z) = \operatorname{Re} g(z)$ ist bezüglich $\mathbb{D}$ harmonisch in $\mathbb{D}$.

2. $$\begin{aligned} \underbrace{\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}}_{\textit{Poisson-Kern}, \text{ positiv}} &= \operatorname{Re}\frac{(e^{it}+z)(e^{it}-z)}{|e^{it}-z|^2} \\ &= \operatorname{Re}\frac{1+ze^{it}-\bar{z}e^{it}-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} > 0 \end{aligned}$$

19.05.08

3. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{dt} = 1$
   Stimmt das?

   Nebenrechnung

   $$\frac{1+ze^{-it}}{1-ze{-}it} = 1 + \left(\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right) = 1 + \frac{2ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(ze^{-it})$$

   Nebenrechnung Ende

   $$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(ze^{-it})^k\right)\mathrm{dt}\right] = 1$$

4. $n > 0$

   $$I_\eta(z) : = \int_{|t-t_0|>\eta} \operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{dt} \overset{z\to e^{it_0}}{\longrightarrow} 0$$

Wir integrieren also nicht über den gesammten Kreis, sonderm wir lassen den Bogen zwischen $e^{it_0+\eta}$ und $e^{it_0+\eta}$ weg.

$$\begin{aligned} I_\eta(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|>\eta} \frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,\mathrm{dt} \\ &\le \frac{2\pi-2\eta}{2\pi}\max_{|t-t_0|>\eta}\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2} \longrightarrow 0 \qquad\qquad \forall_{\eta>0} \end{aligned}$$

5. e^{it_0} beliebig aber fest gewählt.

$$\begin{aligned} \left|u(z)-f(e^{it})\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(e^{it})-f(e^{it_0})\right)\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,\mathrm{dt}\right| \\ &\le \underbrace{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|>\eta}\left(f(e^{it})-f(e^{it_0})\right)\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,\mathrm{dt}\right|}_{\le \underbrace{\max_{|t-t_0|>\eta}\left|f(e^{it})-f(e^{it_0})\right|}_{\underbrace{2M}_{M:=\max_t\left|f(e^{it})\right|}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|>\eta}\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,\mathrm{dt}}_{\underbrace{I_\eta}_{<\varepsilon \text{ für kleine } \left|z-e^{it_0}\right|}}} \\ &\quad + \underbrace{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|\le\eta}\left(f(e^{it})-f(e^{it_0})\right)\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,\mathrm{dt}\right|}_{\underbrace{\le\varepsilon\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|\le\eta}\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,\mathrm{dt}}_{\le 1}}_{\varepsilon}} \\ &\le (\varepsilon+2M\varepsilon) = \varepsilon(1+2M) \\ &\Rightarrow \lim_{\substack{z\to e^{it_0}\\ z\in\mathbb{D}}} u(z) \to f(e^{it_0}). \end{aligned}$$

Bemerkung.

1. u harmonsich in $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}, \qquad\qquad z\in\mathbb{D}.$$

$$f(z)\in\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}}), \qquad\qquad f(z)=u(z)+iv(z)$$

wobei u und v harmonisch in $\overline{\mathbb{D}}$ *sind*

es folgt daraus:

$$\mathrm{Re}\,f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(e^{it})\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{dt}$$

und

$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{dt}\right)$$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{dt} + ib \qquad b \in \mathbb{R}.$$

2. u harmonisch in Ω, $\overline{K_R(a)} \subset \Omega$.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it}+a)\operatorname{Re}\frac{Re^{it}+z-a}{Re^{it}-z+a}, \qquad z \in K_R(a)$$

Satz 6.3. *Ω ist Gebiet, u_K sind harmonisch in Ω mit $u_K(z) \to u(z)$ lokal gleichmäßig in Ω. Dann ist u auch harmonisch in Ω.*

Beweis. Wir betrachten ein Gebiet Ω mit einem Kreis mit Radius R um den inneren Punkt a

$$z \in K_R(a)$$

$$\left.\underbrace{\overset{u(z)}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it}+a)\operatorname{Re} Re^{it}+z-aRe^{it}-z+a\,\mathrm{dt}}}_{\text{harmonisch nach Satz 6.2}}\right\} \leftarrow u_K(z) = \int_0^{2\pi} u_K(Re^{it}+a)\operatorname{Re}\frac{Re^{it}+z-a}{Re^{it}-z+a}\,\mathrm{dt}$$

□

Satz 6.4. Satz der Harnackschen Ungleichung
Sei Ω wieder ein Gebiet. In diesem Gebiet liegt eine Kreisscheibe um den Punkt a mit Rand der Form $\overline{K_{2R}(a)}$. Außerdem haben wir eine Funktion u mit $u \geq 0$ die harmonische in Ω ist. Dann gilt:

$$\frac{1}{3}u(a) \leq u(z) \leq 3u(a), \qquad z \in \overline{K_R(a)}.$$

Beweis. $a = 0$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{u(2Re^{it})}_{\geq 0}\underbrace{\operatorname{Re}\frac{2Re^{it}+z}{2Re^{it}-z}}_{\geq 0}$$
$$\leq \max_{t\in[0,2\pi]}\underbrace{\left(\operatorname{Re}\frac{2Re^{it}+z}{2Re^{it}-z}\right)}_{\underbrace{\frac{(2R)^2-|z|^2}{|2Re^{it}-z|^2}}_{\frac{(2R)^2-R^2}{2Re^{it}-Re^{it}}\leq\frac{3R^2}{R^2}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(2Re^{it})\,\mathrm{dt}}_{u(0)} \leq 3u(0)$$
$$\geq \min_{t\in[0,2\pi]}\underbrace{\left(\operatorname{Re}\frac{2Re^{it}+z}{2Re^{it}-z}\right)}_{\underbrace{\frac{(2R)^2-|z|^2}{|2Re^{it}-z|^2}}_{\frac{(2R)^2-R^2}{2Re^{it}+Re^{it}}\leq\frac{3R^2}{qR^2}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(2Re^{it})\,\mathrm{dt}}_{u(0)} \geq \frac{1}{3}u(0)$$

□

Satz 6.5. Satz über der Harnacksche Prinzip
Ω ist ein Gebiet. Darin liegt eine harmonische Funktion u_K, $u_K(z)$ ist wachsend (Kurz: $u_K(z)\uparrow$) wobei die Werte von z in Ω liegen.. Für ein (beliebiges) z_0 gelte: $u_K(z_0)\le M$ mit $K\in\mathbb{N}$. Dann konvergeiert $\{u_K\}$ lokal gleichmäßig im Gebiet Ω gegen eine harmonische Grenzfunktion u.

Beweis.

1. $u_K(z_0)$ ist konvergent

2.

$$\begin{aligned}
h_{m,n}(z) :=& u_m(z)-u_n(z), && m\ge n\ge 1\\
&\ge 0 \text{ in } \Omega,\ \text{harmonisch in } \Omega\\
h_{m,n} &\overset{n\to\infty}{\to} 0.\\
\varepsilon>0 \Rightarrow& \exists_{n_0(\varepsilon)}\ h_{m,n}(z_0)<\varepsilon && m\ge n\ge n_0\\
\Rightarrow 0\le h_{m,n}(z) \le& 3\cdot h_{m,n}(z_0)<3\varepsilon && m\ge n\ge n_0(\varepsilon)\\
z\in\overline{K_R(z_0)} \Rightarrow& u_m(z) \text{ konvergiert in } \overline{K_R(z_0)} \text{ gleichmäßig}
\end{aligned}$$

Man erhält also sukkzesive Kreisscheiben, die das ganze Gebiet Ω überdecken und in denen $u(z_0)$ gleichmäßig konvergiert. Die Anzahl der Kreisscheiben ist abzähbar. □

26.05.08

Definition. $\Omega\subset\mathbb{C}$ ist ein Gebiet und $u:\Omega\to\mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung. Diese Abbildung heißt *subharmonisch*, wenn

$$\forall_{t_0\in\Omega}\forall_{\substack{r>0\\ \text{(klein)}}}\ u(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+r\cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\,\varphi \tag{6.1}$$

Definition. *Maximumsprinzip*:

(i) Sei u subharmonisch in Ω. Falls für ein $z_0\in\Omega$ $u(z_0)\ge u(z)$, $z\in\Omega$, dann ist $u(z)\equiv u(z_0)$.

(ii) $\limsup_{z\to\partial\Omega}u(z)\le 0\Rightarrow u(z)<0$ oder $u(z)\equiv 0$, $z\in\Omega$.

Satz 6.6. Carlemann Prinzip von der harmonischen Majorisierung
Sei Ω ein beschränktes Gebiet (um komplikationen zu vermeiden). u sei eine subharmonische Abbildung in Ω, v ist eine harmonische Abbildung und es gelte auch:

$$\limsup_{z\to\partial\Omega}u(z)-v(z)\le 0$$

Dann gilt

$$u(z)\le v(z),\qquad z\in\Omega$$

Beweis. $u - v$ ist subharmonisch in Ω, da für u die Formel (6.1) gilt, bei v gilt sogar das Gleichheitsszeichen. Formel sieht es wie folgt aus:

$$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

u subharmonisch in Ω

$$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} \qquad (= f)$$

v ist harmonisch in Ω

$$\begin{aligned} &\limsup_{z\to\partial\Omega}(u - v) \leq 0 \\ &\Rightarrow u(z) \leq v(z), \qquad z \in \Omega \end{aligned}$$

□

Satz 6.7. *Ω ist ein beschränktees Gebiet, $N = \{a_k\} \subset \partial\Omega$. $M > 0$ und u ist subharmonisch im Gebiet Ω. Es gelte dann:*

$$\limsup_{z\to\partial\Omega\setminus N} u(z) \leq M \tag{6.2}$$

$$\limsup_{z\to N} u(z) < \infty \tag{6.3}$$

Aus 6.2 und 6.3 folgt:

$$u(z) \leq M \text{ in } \Omega$$

Beweis.

$$\begin{aligned} D &= \operatorname{diam}(\Omega) < \infty \\ V(z) :&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underbrace{\log\frac{D}{|z - a_k|}}_{\text{harm. in } \Omega}, \qquad z \in \Omega. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{K} \subset \Omega$ kompakt; $d_{\mathcal{K}} = \operatorname{dist}(\mathcal{K}, \partial\Omega) > 0$.

$$z \in \log\frac{D}{|z - a_k|} \leq \log\frac{D}{d_{\mathcal{K}}} < \infty$$

Majorantenkriterium: Σ konvergiert gleichmäßig in $\mathcal{K}$. Jetzt ist auch V harmonisch in Ω.

$$\begin{aligned} &\frac{D}{|z - a_k|} \leq 1, \qquad z \in \mathcal{K},\ k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow &\log\frac{D}{|z - a_k|} \\ &\Rightarrow V(z) \geq 0 \text{ in } \Omega. \\ &\lim_{z\to a_k} V(z) = \infty, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Es existiert ein $\varepsilon > 0$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega}(u(z)-\varepsilon V(z)) \leq \begin{Bmatrix} \leq M, & \zeta\in\partial\Omega\backslash N \\ -\infty, & \zeta \in N \end{Bmatrix} \leq M, && \zeta\in\Omega. \\
\overset{6.6}{\Rightarrow} u(z) \leq \varepsilon V(z) + M, && z\in\Omega. \\
\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} u(z) \leq M, && z\in\Omega.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Wir kennen ein Beispiel, dass dieser Satz unter gewissen Randbedingung falsch ist:*

$$\begin{aligned}
u(z) := \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}, && \Omega = \mathbb{D} \\
\limsup_{z\to\partial\mathbb{D}\backslash\{1\}} u(z) = 0 \\
\limsup_{z\to 1} u(z) = \infty
\end{aligned}$$

Es reicht also ein einziger Ausnahmepunkt um zu zeigen, dass hier diese Aussage falsch ist.

Satz 6.8. Satz von Perron
Ω ist wieder ein beschränktes Gebiet. und $f : \Omega \to [-M, M]$ eine Abbildung vom Rand von Ω auf das beschränkte Intervall $[-M, M]$. Weiter gilt:

$$\mathcal{F} := \left\{ u \text{ subharmonisch in } \Omega \;\middle|\; \limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega} u(z) \leq f(\zeta) \right\}$$

Dann gilt:

$$v(z) := \sup_{u\in\mathcal{F}} u(z), \qquad z\in\Omega.$$

ist harmonisch in Ω.

Beweis. folgt später und wird an dieser Stelle ergänzt... □

Definition. Ω ist beschränktes Gebiet. Ω heißt *zulässig*, falls für jedes $\zeta_0 \in \partial\Omega$ eine harmonische Funktion $w(z, \zeta_0)$ existiert mit

(i) $w(z, \zeta_0)$ harmonisch in Ω,

(ii) $\lim_{\substack{z\in\Omega \\ z\to\zeta_0}} w(z, \zeta_0) = 0$

(iii) Für jedes $\eta > 0$ existiert ein $A_\eta > 0$ mit

$$\forall_{\substack{|z-\eta_o|>\eta \\ z\in\Omega\backslash K_\zeta}} w(z, \zeta_0) \geq A_\eta.$$

Beispiel. *Das Gebiet Ω ist zulässig, falls es zu jedem $\zeta_0 \in \Omega\mathbb{C}\backslash\Omega$ existiert mit $[\zeta_0, \zeta] \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$.*

(i) $w(z,\zeta_0) := \operatorname{Re} \underbrace{\left(\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right)^{\frac{1}{4}}}_{\in\mathcal{H}(\Omega)}$ *ist harmonisch im Gebiet* Ω

(ii) *erfüllt.*

(iii) $w(z,\zeta_0) > A_\eta,\ z \in \Omega\backslash K_\eta(\zeta_0)$ *ist auch erfüllt.*

Ergänzungen vom 05.06.08

Satz 6.9. *Sei* Ω *ein* zulässiges *Gebiet und* f *eine Abbildung mit* $f : \partial\Omega \to [-M, M]$*. Sei weiter* f *stetig im Punkt* $\zeta_0 \in \partial\Omega$*. Dann existiert eine in* Ω *harmonische Funktion* $v \in \mathcal{F}$ *mit*

$$\lim_{\substack{z\in\Omega\\ z\to\zeta_0}} v(z) = f(\zeta_0).$$

Beweis. $\varepsilon > 0$.

$$\exists_{\eta>0}\forall_{\substack{z\in\partial\Omega\\ |z-\zeta_0|\le\eta}} \quad |f(z) - f(\zeta_0)| < \varepsilon.$$

$$F_1(z) := f(\zeta_0) + \varepsilon\frac{w(z,\zeta_0)}{A_\eta}(M - f(\zeta_0))$$

ist harmonisch in Ω.

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\Omega}} F_1(z) = f(\zeta_0) + \varepsilon$$

$$\liminf_{\substack{z\to\zeta_0\in\Gamma_1\\ z\in\Omega}} F_1(z) \ge f(\zeta_0) + \varepsilon + M - f(\zeta_0) \qquad = M + \varepsilon \ge f(\zeta)$$

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\in\Gamma_2\\ z\in\Omega}} F_1(z) \ge f(\zeta_0) + \varepsilon \ge f(\zeta)$$

aus den letzten beiden Zeilen folgt:

$$\liminf_{z\to\zeta\in\partial\Omega} F_1(z) \ge f(\zeta)$$

$$F_2(z) := f(\zeta_0) - \varepsilon - \frac{w(z,\zeta_0)}{A_\eta}(M + f(\zeta_0))$$

$$\lim_{z\to\zeta_0} F_2(z) = f(\zeta_0) - \varepsilon$$

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta\in\Gamma_1\\ z\in\Omega}} F_2(z) \le f(\zeta_0) - \varepsilon - (M + f(\zeta_0)) \qquad = -M - \varepsilon \le f(\zeta)$$

$$\limsup_{z\to\zeta\in\Gamma_2} F(z) \le f(\eta_0) - \varepsilon \le f(\zeta)$$

aus den letzten beiden Zeilen folgt hier

$$\limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega} F_2(z) \le f(\zeta).$$

Insgesammt folgt also

$$F_2 \in \mathcal{F} \overset{\text{Perm.}}{\Longrightarrow} \underbrace{F(z) \le v(z)}_{z\in\Omega}, \qquad \limsup_{z\to\partial\Omega}(\underbrace{u(z)}_{\in\mathcal{F}} - F_1(z)) \le 0$$

$$\Rightarrow u(z) \le F_1(z),\ z \in \Omega.$$

$$\Rightarrow F_2(z) \le v(z) \le F_1(z) \qquad \Rightarrow v(z) \le F_1(z)$$

$$f(\zeta_0) - \varepsilon = \lim_{z\to\zeta_0} F_2(z) = \liminf_{z\to\zeta_0} F_2(z) \qquad \le \liminf_{z\to\zeta_0} v(z) \le \limsup_{z\to\zeta_0} v(z)$$

$$\le \limsup_{z\to\zeta_0} F_1(z) = \underline{f(\zeta_0)+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow f(\zeta_0) \le \liminf v(z) \le \limsup v(z) = f(\zeta_0)$$

□

Lemma 6.10. *Sei $\overline{\Omega}$ ein beschränktes Gebiet und u subharmonisch in Ω, außerdem ist eine Kreisscheibe $\overline{K_R(z_0)} \subset \Omega$ um den Punkt z_0 mit Radius R gegeben. Sei $q(z)$ die in $\overline{K_R(z_0)}$ stetig und in $K_R(z_0)$ harmonische Funktion mit $q|_{\partial K_R(z_0)} = u|_{\partial K_R(z_0)}$. Dann gilt:*

$$h := \begin{cases} u(z), & z \in \Omega \backslash K_R(z_0) \\ q(z), & z \in K_R(z_0) \end{cases}$$

Beweis. Zu zeigen ist, wenn r genügend klein ist:

$$h(z) \le \frac{1}{2pi}\int_0^{2\pi} h(z+re^{it})\,\mathrm{dt}, \qquad z \in \Omega.$$

$$z \in \partial K_R(z_0): \qquad h(z) = u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(+re^{it})\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} h(z+re^{it})\,\mathrm{dt} + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2} \underbrace{u(z+re^{it})}_{\le q(z+re^{it}) = h(z+re^{it})}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z+re^{it})\,\mathrm{dt}\,.$$

□

Beweis von Satz von Perron

Beweis. von Satz 6.8

1. $\mathcal{F} \ne \emptyset$ $[u(z) \equiv -M$ liegt in $\mathcal{F}]$
2. $u \in \mathcal{F} \Rightarrow u(z) \le M,\ z \in \Omega, \left[\limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega}(u(z) - M) \le 0\right]$
3. $z_0 \in \Omega, \Rightarrow \exists_{\{u_K\}\subset\mathcal{F}}\ u_k(z_0) \to v(z_0)\ (k \to \infty)$

$$g_n(z) := \max_{k\le n} u_K(z), \qquad z \in \Omega.$$

$\Rightarrow g_n \in \mathcal{F}$

a) g_n subharmonisch:

$$u_K(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_k(z+re^{it})\,\mathrm{dt} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(z \in re^{i})\,\mathrm{dt}$$

$1 \leq k \leq n$ und r genügend klein, außerdem ist u gleichmäßig in $k = 1, \ldots, n$.

$$\Rightarrow g_n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(z+re^{it})\,\mathrm{dt}$$
$$\limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega} g_n(z) \leq \max_{k=1,\ldots,n} \underbrace{\limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega} u_k(z)}_{\leq f(\zeta)} \leq \max_{1,\ldots,n} f(\zeta) = f(\zeta)$$

Bemerkung. *Wir suchen jetzt wiederholt eine harmonische Funktion in einer Umgebung von z_0. Sie soll in z_0 den gleichen Wert annehmen wie v und sich am Rand so verhalten, wie die Funktionen aus der Familie $\mathcal{F}$.*

$$u_n(z_0) \leq g_n(z_0) \leq v(z_0) \qquad\qquad \Rightarrow g_n(z_0) \to v(z_0)$$

Sei $q_n(z)$ Lösung vom Dirichlet-Problem für $K_R(z_0)$ und $g_n|_{\partial K_R(z_0)}$

$$h_n := \begin{cases} g_n(z), & z \in \Omega \backslash K_R(z_0) \\ q_n(z), & z \in K_R(z_0) \end{cases}$$

aus dem Lemma 6.10 folgt, dass $h_n(z)$ subharmonisch in Ω ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &\limsup_{z\to\zeta\in\partial\Omega} h_n(z) \leq f(\zeta) \\ &\qquad\qquad \Rightarrow h_n \in \mathcal{F}. \\ &z \in \partial K_R(z_0) \\ &\qquad h_n(z) = g_n(z) \leq g_{n+1}(z) = h_{n+1}(z) \end{aligned}$$

wobei h_n im inneren des Kreises subharmonsich und g_n im inneren des Kreises ist harmonisch

$$\Rightarrow z \in K_R(z_0)$$

Nach dem Prinzip von Carlemann (Satz 6.6) gilt

$$\begin{aligned} g_n &\leq h_n(z) \\ \Rightarrow g_n(z_0) &\leq h_k(z_0) \leq v(z_0) \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_n(z_0) &= v(z_0) \\ \Rightarrow h_n(z) &\leq h_{n+1}, && z \in \partial K_R(z_0) \\ \xRightarrow{\text{Carlem.}} h_n &\leq h_{n+1}(z) && z \in K_R(z_0). \\ \xRightarrow{\text{Harnack P.}} h_n(z) &\to h(z) \end{aligned}$$

harmonisch in $K_R(z_0)$

konvergiert lokal gleichmäßig in $K_R(z_0)$

Unsere Konstruktion liefert eine in $K_R(z_0)$ harmonische Funktion mit

$$\left| \begin{matrix} h(z) \leq v(z) & \text{in } K_R(z_0) \\ h(z_0) = v(z_0) & \end{matrix} \right|$$

09.06.08

Um den Punkt z_0 liegt ein Kreis Mit Radius $R/2$ und ein weiterer darin mit Radius $R/4$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
z_1 \subset \overline{K_{R/4}(z_0)} \subset \overline{K_{R/2}(z_1)} \subset \overline{K_R(z_0)} \subset \Omega. \\
z_1, \overline{K_{R/2}(z_1)},\ \{\tilde{u}_n\} \subset \mathcal{F},\ \tilde{u}_n(z_1) \to v(z_1) \\
\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \{\tilde{h}_n\} \subset \mathcal{F},\ \tilde{h}_n \overset{\text{lok. glm.}}{\longrightarrow} \tilde{h} \text{ harmonisch in } K_{R/2}(z_1) \\
\tilde{h}(z_1) = v(z_1),\ \tilde{h}(z) \leq v(z),\ z \in K_{R/2}(z_1). \\
z_1,\ \overline{K_{R/2}(z_1)}, \\
\underbrace{u_n^*}_{\in \mathcal{F}} := \max\{h_n(z),\ \tilde{h}_n(z)\},\ z \in \Omega \\
\tilde{h}_n(z) \leq u_n^*(z_1) \leq v(z_1) \Rightarrow u_n^*(z_1) \to v(z_1) \\
h_n(z-0) \leq u_n^*(z_0) \leq v(z_0) \Rightarrow u_n^*(z_0) \to v(z_0). \\
\{u_n^*\} \to \{q_n^*\} \to \underbrace{\{h_n^*\}}_{\in \mathcal{F}} \\
h_n^* \overset{\text{lokal glm.}}{\longrightarrow} h^* \text{ in } K_{R/2}(z_1),\ h^* \text{ harmonisch} \\
u_n^*(z_1) \leq h_n^*(z_1) \leq h^*(z_1) = v(z_1) \\
u_n^*(z_0) \leq h_n^*(z_0) \leq h^*(z_0) = v(z_0)
\end{aligned}$$

$$z \in K_{R/2} : \quad \left.\begin{matrix} h_n^* & \geq h_n(z) \to h(z) \\ \downarrow & \\ h^*(z) & \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} h(z) \leq h^*(z), & k \leq K_{R/2}(z_1) \\ h(z_0) = v(z_0) = h^*(z_0) & \end{matrix}\right.$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{Max.}}{\Rightarrow} h(z) = h^*(z),\ z \in K_{R/2}(z_1) \\
h(z_1) = h^*(z_1) = v(z_1) \\
\Rightarrow h(z) = v(z),\ z = z_0,\ z_1 \in K_{R/4}(z_0) \subset K_R(z_0)
\end{aligned}$$

wobei $h(z)$ harmonisch und $v(z)$ harmonisch in $K_{R/4}(z_0)$ ist und z_0 beliebig in Ω liegt

$\Rightarrow v(z)$ ist harmonisch in Ω.

Es wurden also nur das Maximumsprinzip, das Harnacksche Prinzip und das Prinzip von Carleymann verwendet. $\square$

7. Holomorphe Fortsetzung

29.05.08

7.1. Der Monodromiesatz

Beispiel.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

hat den Konvergenzradius $R = 1$*, und ist also in* $\mathbb{D}$ *holomorph. Es ist*

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

und mit $f(z) = \frac{1}{1-z}$ *ist* f *auf* $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ *holomorph fortsetzbar.*

Definition. 1. Es seien Ω_1, Ω_2 zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ mit $\Omega_1 \cup \Omega_2 \neq \emptyset$. Für $j = 1, 2$ sei $f_j : \Omega_j \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei

$$\forall_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \; f_1(z) = f_2(z)$$

Dann heißt f_2 die *direkte holomorphe (analytische) Fortsetzung* von f_1 nach Ω_2 Durch

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z), & \text{für } z \in \Omega_1 \\ f_2(z), & \text{für } z \in \Omega_2 \end{cases}$$

ist dann eine auf $\Omega_1 \cup \Omega_2$ holomorphe Funktion F definiert.

2. Es sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ein (stetiger) Weg in $\mathbb{C}$. Es sei f_0 holomorph in einem Gebiet Ω_0 mit $\gamma(0) \in \Omega_0$. Es gebe eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$$

von $[0; 1]$ und Gebiete Ω mit $\gamma([t_{j-1}; t_j]) \subseteq \Omega_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und holomorphe Funktionen $f_j : \Omega_i \to \mathbb{C}$ $(j = 1, \ldots, n)$ mit

$$\forall_{z \in \Omega j - i \cap \Omega_j} \forall_{j=1,\ldots,n} \; f_{j-1}(z) = f_j(z)$$

Dann heißt f_n die *holomorphe(analytische) Fortsetzung* von f_0 längs des Weges γ bezüglich der Kette $(t_j, \Omega_j, f_j)_{i=1,\ldots,n}$.

Bemerkung. *Definition 2. sieht bildlich so aus, dass man um ein x_0 herum überlappende Kreisscheiben bildet, die x_0 aber nicht beinhalten.*

Bemerkung. 1. *Falls f_0 längs des Weges γ holomorph fortsetzbar ist, so darf man ohne Einschränkung annehmen, dass alle Ω, offene Kreisscheiben mit Mittelpunkten auf $T(\gamma)$ sind.*
(Man spricht deshalb vom Kreiskettenverfahren*)*

2. *Die holomorphe Funktion längs* eines *gegebenen Weges ist eindeutig, das heißt unabhängig von der speziellen Wahl der* Kette (t_j, Ω_j, f_j)

Beweis. 1. mit obigen Bezeichnungen sei für festes $j \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$r := \operatorname{dist}(\mathbb{C}\backslash\Omega_j \mid \gamma([t_{j-1}, t_j])) > 0$$

Für alle $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ist dann $K_r(\gamma(t)) \subseteq \Omega_j$, und es ist

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq \bigcup_{t_{j-1} \leq t \leq t_j} K_r(\gamma(z)).$$

da $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ kompakt ist, gibt es $\tau_1, \dots, \tau_p \in [t_{j-1}, t_j]$

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} K_r(\gamma(\tau_k)).$$

Es ist $K_r(\gamma(\tau_k)), \dots, K_r(\gamma(\tau_p))$ ersetzt (und f_j durch die Restriktionen von f_j auf $K_r(\gamma(\tau_k)))$

2. folgt aus dem Identitätsprinzip. Details siehe Aufgabe 8.4.

□

Satz 7.1. Monodromiesatz
Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ und f_0 in a holomorph. Längs eines jeden Weges *von a nach $b \in \Omega$ sei f_0 holomorph fortsetzbar. Dann hängt das Ergebnis der Fortsetzung nur von der Homotopieklasse des Weges bezüglich Ω ab.*

Beweis. Es seien $\gamma, \gamma^* : [0,1] \to \Omega$ zwei homotope Wege in Ω von a nach b. Es sei $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ eine zugehörige Homotopie, das heißt:

$$\forall_{s,t \in [0,1]}\ H(0,t) = \gamma(t), \quad H(1,t) = \gamma^*(t), \quad (s,0) = a, \quad H(s,1) = b$$

und H sei stetig.
Es sei $\gamma_s(t) := H(s,t)$. Für jedes $s \in [0,1]$ sie $(t_j^{(s)}, \omega^{(s)}, f_j^{(s)})_{j=1,\dots m_s}$ eine zur Fortsetzung von f_0 längs γ_s gehörige Kette. Es sei $s \in [0,1]$ gegeben. Dann ist

$$\varepsilon_s := \frac{1}{2} \min_{j=1,\dots,m_s} \operatorname{dist}(\gamma_s([t_{j-1}^{(s)}, t_j^{(s)}]; \mathbb{C}\backslash\Omega_j^{(s)}) > 0$$

Da H auf $[0,1] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta_s > 0$, sodass

$$\forall_{w,t \in [0,1]} \text{mit } |w - s| < \delta_s \ |\gamma_w(t) - \gamma_s(t)| = |H(w,t) - H(s,t)| < \varepsilon_s$$

Es sei außerdem:

$$I_s := \{w \in [0,1] \mid S\,|w - s| < \delta_s\}$$

Dann gilt für alle $w \in I_s$

$$T(\gamma_w) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_s} \Omega_j^{(s)}$$

für gegebenes $t \in [0,1]$ ist nämlich $t \in [t_{j-1}^{(s)}, t_j^{(s)}]$ für ein $j \in \{1, \ldots, m_s\}$ und somit $\gamma_w(t) \in K_{\varepsilon_s}(\gamma_s(t)) \subseteq \Omega_j$.

Für alle $w \in I_S$ vermittelt die Kette $(t_j^{(s)}, \Omega_j^{(s)}, f_j^{(s)})_{j=1,\ldots,m_s}$ also auch die Fortsetzung von f_0 längs γ_w. Aufgrund Bemerkung *2.* folgt $f_{m_w}^{(w)}(z) = f_{m_s}^{(s)}$ für alle z in einer Umgebung von b und alle $w \in I_s$ ist.

Nun sei

$$A := \left\{ s \in [0,1] \;\middle|\; \text{Es gibt eine Umgebung } U \text{ von } b \text{ mit } f_{m_s}^{(s)}\big|_U = f_{m_0}^{(0)}\big|_U \right\}.$$

Dann ist $0 \in A$. Die obige Betrachtung zeigt, dass a und $[0,1] \backslash A$ offen (in der Relativtopologie bezüglich $[0,1]$) sind. Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt $A = [0,1]$, insbesondere gilt: $1 \in A$. Also führen die Fortsetzungen von f_0 längs $\gamma_0 = \gamma$ und längs $\gamma_1 = \gamma^*$ zum gleichen Ergebnis. Dies zeigt die Behauptung. □

Eine Weitere formulierung des *Monodromiesatz*es ist:

Korollar. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und f_0 sei holomorph in z_0. Längs eines jeden von z_0 ausgehenden Weges in Ω sei f_0 holomorph fortsezbar. Dann bildet die Gesamtheit dieser Fortsetzungen eine in Ω holomorphe Funktion.*

Beweis. Es sei ein $w \in \Omega$ gegeben. Dann wählt man einen Weg γ in Ω von z_0 nach w und definiert $f(z)$ als den Wert der (nach Vorraussatzung existierende) holomorphen Fortsetzung von f_0 längs γ im Punkt w. Ist auch $\tilde{\gamma}$ ein Weg in Ω von z_0 nach w, dann sind (nach der Definition des einfachen Zusammenhanges) homotop, denn Ω ist einfach zusammenhängend.
Nach Satz 7.1 stimmen die Fortsetzungen von f_0 längs γ und längs $\tilde{\gamma}$ also in w überein. Also ist hierdurch die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ wohldefiniert. Diese ist holomorph in Ω, da sie lokal duch holomorphe Fortsetzung erklärt ist und es ist $f|U = f_0|_U$ in einer Umgebung U von z_0. □

7.2. Das schwarzsche Spiegelungsprinzip

02.06.08

Bemerkung. *Wir betrachten ein Gebiet Ω_+, welches teilweise (nicht nötigerweise Zusammenhängend) durch die relle Achse begrenzt wird. Die Spiegelung an der reellen Achse bezeichnen wir mit Ω_-*

Satz 7.2. Kleines Schwarzsches Spiegelungsprinzip
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine zur reellen Achse Symmetrisches Gebiet (das heißt, für alle $z \in \Omega$ sei auch $\bar{z} \in \Omega$). Es sei weiter

$$\begin{aligned}\Omega_+ &:= \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im}(z) > 0\},\\ \Omega_- &:= \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im}(z) < 0\},\\ L &= \Omega \cap \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es sei $f : \Omega_+ \to \mathbb{C}$ holomorph, und f sei auf $\Omega_+ \cup L$ stetig fortsetzbar mit $f(L) \subseteq \mathbb{R}$

Dann ist durch

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{für } z \in \Omega_+ \cup L \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{für } z \in \Omega_- \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f auf Ω definiert.

Beweis. Dass f in Ω_+ holomorph ist, ist klar. Es sei ein $z_0 \in \Omega_-$ gegeben. Dann ist $\bar{z} \in \Omega_+$, sodass f um $\bar{z}_0$ eine Potenzreihendarstellung.

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w - \bar{z}_0)^k$$

besitzt. Es ist also

$$\forall_{z \in U(z_0)}\ f(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k$$

Es ist dann

$$\forall_{z \in U(z_0)} F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k} \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k (z - z_0)^k$$

Somit ist F in z_0 holomorph. Also ist F in $\Omega_0 \cup \Omega_- = \Omega \setminus L$ holomorph.

In $\Omega \setminus L$ ist die Stetigkeit von F klar.

Es sei ein $z_0 \in L$ gegeben, und es sei $(z_n)_n$ eine Folge in Ω mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Ohne Einschränkung darf man annehmen, dass $(z_n)_n \subseteq \Omega_+ \cup L$ oder $(z_n)_n \subseteq \Omega_-$. Falls $(z_n)_n \subseteq \Omega_+ \cup L$ ist, so liefert die Stetigkeit von f auf $\Omega_+ \cup L$ sofort

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0) = F(z_0).$$

Nun sei $(z_n)_n \subseteq \Omega_-$. Dann ist $(\bar{z}_n)_n$ eine Folge in Ω_+ mit $\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \bar{z}_0$. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{z}_n) = f(\bar{z}_0)$$

aufgrund der Stetigkeit von f. Damit und mit $z_0 \in \mathbb{R},\ f(z_0) \in \mathbb{R}$ ergibt sich die Existenz von

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{f(\bar{z}_n)} &= \overline{\lim_{n\to\infty} f(\bar{z}_n)} \\ &= \overline{f(\bar{z}_0)} = \overline{f(z_0)} \\ &= f(z_0) = F(z_0).\end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit von F in z_0.

Insgesamt ist F also in Ω Stetig und holomorph in $\Omega \backslash L$. Mit dem Satz von Morera (vergl. Aufgabe 8.3) folgt, dass f in ganz Ω holomorph ist. □

Bemerkung. *Eine etwas abgeschwächte Version (mit weniger Voraussetzungen) dieses Satzes ist:*

Satz 7.3. *Es seien Ω, Ω_+, Ω_- und L wie in Satz 7.2. Es sei $f : \Omega_+ \to \mathbb{C}$ holomorph und für jedes $c \in L$ existiere*

$$\lim_{\substack{z\to c\\ z\in\Omega_+}} f(z) \in \mathbb{R}.$$

Dann ist durch:

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{für } z \in \Omega_+ \\ \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \zeta\in\Omega_+}} f(\zeta), & \text{für } z \in L \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{für } z \in \Omega_- \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f auf Ω gegeben.

Beweis. Es sei $w := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$. Dann sind u und v harmonisch in Ω_+. Es sei

$$w(z) := \begin{cases} v(z), & \text{für } z \in \Omega_+ \\ 0, & \text{für } z \in L \\ -v(z), & \text{für } z \in \Omega_- \end{cases}$$

In Ω_+ ist w harmonisch, das $w|_{\Omega_+} = v$. Für alle $z \in \Omega_-$ ist $w(z) = \operatorname{Im} \overline{f(\bar{z})}$, und $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ ist holomorph in Ω_- (vrgl. Beweis von Satz 7.2) Daher ist w auch in Ω_- harmonisch. Insbesondere hat w in $\Omega_+ \cup \Omega_-$ lokal die *Mittelwerteigenschaft*

Es sei ein $z_0 \in L$ gegeben, und es sei $r > 0$ so gewählt, dass $K_r(z_0) \subseteq \Omega$. Für alle $\varepsilon \in]0,1[$ ist dann:

$$\begin{aligned}
w(z_0) = 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt} - \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt} - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} v(z_0 + \varepsilon e^{-it})\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt} - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} v\left(\overline{z_0 + \varepsilon e^{it}}\right)\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt} - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{it})\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Also hat w in Ω die Mittelwerteigenschaft. Aus Aufgabe 9.3 folgt (unter Berücksichtigung der Stetigkeit von w), dass w harmonisch in Ω ist. Es sei ein $z_0 \in L$ gegeben, und es sei $r > 0$ so gewählt, dass $K_r(z_0) \subseteq \Omega$. Dann besitzt w in $K_r(Z_0)$ eine konjugiert harmonische Funktion $-\tilde{u}$. Dann sind $w - i\tilde{u}$ und $g := \tilde{u} + iw$ holomorph in $K_r(z_0)$. Für alle $z \in \Omega_+ \cap K_r(z_0)$ ist dann

$$\begin{aligned}
g(z) - f(z) &= \tilde{u}(z) + iw(z) - u(z) - iv(z) \\
&= \tilde{u}(z) - u(z) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aus dem Offenheitsprinzip folgt, dass $g - f := c$ konstant ist. Somit ist $g - c$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf $K_r(z_0)$.

Dies gilt für alle $z_0 \in L$. Insbesondere ist f stetig auf $\Omega_+ \cup L$ fortsetzbar. Aus Satz 7.2 folgt die Behauptung. □

Satz 7.4. *Es sei* $\Gamma \subseteq \partial\mathbb{D}$ *ein* offener Bogen *(das heißt* $\Gamma = \{e^{it} \mid a < t < b\}$ *für geeignete* a, b*). Es sei* f *holomorph in* $\mathbb{D}$ *und stetig auf* $\mathbb{D} \cup \Gamma$ *mit* $f(z) \in \mathbb{R}$ *für alle* $z \in \Gamma$*. Dann hat* f *eine holomorphe Fortsetzung* $F : \mathbb{D} \cup \Gamma \operatorname{sup}(\mathbb{C} \backslash \bar{\mathbb{D}}) \to \mathbb{C}$*. Diese ist gegeben durch*

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \textit{für } z \in \mathbb{D} \cup \Gamma \\ \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, & \textit{für } |z| > 1 \end{cases}$$

Beweis. Analog zu Satz 7.2 □

Definition. Ein Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, falls es eine in einer Umgebung U vom $[0,1]$ holomorphe, lokal injektive Abbildung g gibt, sodass $\gamma = g|_{[0,1]}$ ist.

Satz 7.5. Spiegelungen an analytischen Randbögen
Es seien Ω_1, Ω_2 Gebiete in $\mathbb{C}$ und es seien L_1, L_2 analytische Randbögen (das heißt $L_j = T(\gamma_j)$ für geeignete analytische Wege γ_j). Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorph und f sei auf $\Omega_1 \cup L_1$ stetig fortsetzbar mit $f(L_1) \subseteq L_2$. Dann besitzt f eine holomorphe Fortsetzung auf eine offene Umgebung von $\Omega_1 \cup L_1$.

Beweis. Comway II, *Theorem* 13.4.8. □

Bemerkung. *In der Vorlesung vom 05.06.08 und zu Begin des 09.06.08 wurde Kapitel 6 ergänzt.*

05.06.08

Definition. Ein *Holomoprhiegebiet* ist ein Gebiet, über dessen Rand eine Funktion nicht holomorph fortsetzbar ist.

Beispiel.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$$

ist eine in $\mathbb{D}$ definiert und hat $\mathbb{D}$ als Holomoprhiegebiet den Einheitskreis mit Konvergenzradius $R = 1$

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{2\pi i \frac{n}{m}} \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < r < 1 \\ n, m &\in \mathbb{N} \\ f\left(e^{2\pi i \frac{n}{m}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{k!} e^{2\pi i \frac{n}{m} k!} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} r^{k!} \cdot e^{2\pi i \frac{n}{m} \; k!} + \sum_{k=m}^{\infty} r^{k!} \underbrace{e^{2\pi i \frac{n}{m} k!}}_{\to 1} \to \infty \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

- *f ist nicht holomorph in z_0.*
- *f ist nicht holomorph in $z = e^{2\pi i \frac{n}{m}}$, $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $z = e^{2\pi i \frac{n}{m}}$ dicht auf $\partial\mathbb{D}$ liegt.*

Satz 7.6. Hadamardsche Lückensatz
Gegeben sei ein $\lambda > 1$. Sei weiter $\{u_k\} \in \mathbb{N}$ mit $\frac{u_{k+1}}{u_k} > \lambda$, und außerdem hat

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$$

den Konvergenzradius $= 1$. Dann ist $\mathbb{D}$ Holomorphiegebiet von f.

Beweis. Für den Beweis nutzen wir einen kleinen Trick, wir suchen uns eine Zahl p mit der Eigenschaft: $\frac{p+1}{p} < \lambda$, $p \in \mathbb{N}$.

$$w \in \mathbb{D} \Rightarrow |z(w)| \leq \frac{1}{2}\left(|w|^p + |w|^{p+1}\right) \leq 1$$

„=“ nur für $\arg w^p = \arg w^{p+1} = \arg w^p + \arg w$

$$\Leftrightarrow w > 0$$

$\Rightarrow F(w) := f(z(w))$ ist holomorph in $|z| \leq R_1$ für ein $R_1 > 1$.

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{2^{n_k}} (w^p + w^{p+1})^{n_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^{n_k}} \sum_{j=0}^{n_k} \binom{n_k}{j} \underbrace{w^{(p+1)j} w^{p(n_k-j)}}_{w^{pn_k - j}}$$

$$pn_k < p_n + 1 < \ldots < pn_k + n_k = (p+1)n_k < \lambda pn_k < pn_{k+1} + 0$$

Wähle R_0 mit $1 < R_0 < R_1$

$$F(R_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{R_0^p + R_1^{p+1}}{2} \right)^{n_k} < \infty \qquad \textbf{Widerspruch!}$$

Warum kann diese Potenzreihe nicht konvergieren? Es kann nicht konvergieren, da der Konvergenzradius $= 1$ ist.

Also ist f nicht über dem Konvergenzradius $= 1$ fortsetzbar! □

Satz. Fabri Lückensatz

$$\limsup \frac{n_k}{n} = \infty$$

Bemerkung. *Alle Hadamard-Lücken sind auch Fabry-Lücken!*

8. Satz von Picard

11.06.08

Beweis von Picard

Bemerkung. *In diesem Kapitel geht es nicht darum, den Satz von Picard einfach „nur“ zu Beweisen, vielmehr geht es darum drei von den wichtigsten Beweisen vorzustellen, da diese einen tieferen Einblick in diesen Satz ermöglichen. Allerdings kann es vorkommen, dass diese Beweise „häßlich“ sind, sodass es vorkommen kann, dass man nicht mehr genau weiß, was man gerade tut.*

Bemerkung. *Es existiert eine in der oberen Halbebene H holomorphe Funktion als Umkehrfunktion einer in $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ beliebig fortsetzbaren Funktion κ*

Definition. Dabei heißt *beliebig fortsetzbar*, dass ich einen *beliebigen Weg* wählen kann. Dieser Weg führt zu einem Bild, welches in der oberen Halbebene liegt. Vielmehr füllen die Bilder sämtlicher Wege, die nicht 0, und 1 enthalten zu ausfüllung der kompletten oberen Halbebene.

Beweis. f ist ganz, $f \neq 0; 1$.

$$\begin{aligned} g(z) &= \kappa(f(z)), \\ \kappa(f(0)) &= w_0 \end{aligned}$$

Es ist also $g(z)$ nach ganz $\mathbb{C}$ (ausgehend von $z = 0$) längs jeden Weges holomorph fortsetzbar, und es gilt:

$$\operatorname{Im} g(z) > 0$$

Damit ist der Satz von Picard bewiesen, denn $\mathbb{C}$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. f ist nach dem Monodromiesatz holomorph fortsetzbar längs *jeden* Weges, damit ist dann f auch in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Damit ist sie eine *ganze Funktion*. Es folgt, dass $g \equiv \text{const}$, und damit muss f eine Konstante sein, da $\kappa(f(z))$ sonst keine Konstante liefert. □

Satz 8.1. Satz von Bloch
Gegeben ist die holomorphe Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Sei weiter $|f'(0)| \geq 1$. Dann existiert ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{D}$ mit f injektiv in Ω mit

$$f(\Omega) = K_{\frac{1}{24}}(w_0)$$

für ein $w_0 \in \mathbb{C}$

Bemerkung. *Die anschätzung der Ableitung der Nullstelle führt nur zur Verifizierung der Konstante der Kreisscheibe. Wäre stattdessen $|f'(0)| \geq c$, dann würde die Kreisscheibe ebenfalls irgendwie von c abhängen.*

Beweis. von Srt 8.1 Sei obdA $f \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{D}})$, wobei $\bar{\mathbb{D}}$ den abgeschlossenen Einheitskreis beschreibt.. Dann gibt es ein $M(r)$ mit:

$$\begin{aligned} M(r) &:= \max_{|z|=r} |f'(z)|, \\ \varphi(r) &:= (1-r) \cdot M(r), \qquad 0 \leq r \leq 1 \end{aligned}$$

trägt man das φ graphisch gegen ? auf, so sieht man, dass ab r_0 das $\varphi < 1$ bleibt.

$$\begin{aligned} r_0 : \quad \varphi(r_0) &= 1 \\ \varphi(r) &<, \qquad r_0 < r \leq 1. \\ |f'(z_0)| = M(r_0) &= \frac{\varphi(r_0)}{1-r_0} = \frac{1}{1-r_0} =: \frac{1}{2\varrho} \end{aligned}$$

wähle z_0 mit $|z_0| = r_0$

$$\begin{aligned} z &\in K_\varrho(z_0) \\ |f'(z) - f'(z_0)| &\leq M(r_0) + |f'(z)| \qquad \leq M(r_0) + M(r_0 + \varrho) \\ &= \frac{1}{2\varrho} + \frac{\varphi(r_0+\varrho)}{1-(r_0+\varrho)} \\ < \frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{(1-r_0)-\varrho} \\ &= \frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{\varrho} = \frac{3}{2\varrho} \\ \Rightarrow z &\in K_\varrho(z_0) \\ \left| \frac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0} \right| &\overset{\text{Max.}}{\leq} \frac{3}{2\varrho^2} \end{aligned}$$

wählen wir nun einen kleineren Kreis

$$\begin{aligned} z &\in K_{\frac{\varrho}{3}}(z_0) \\ |f'(z) - f'(z_0)| &\leq \frac{3}{2\varrho^2} \underbrace{|z - z_0|}_{\leq \frac{\varrho}{3}} \\ &\leq \frac{1}{2\varrho} \overset{\text{nach Vorr.}}{=} |f'(z_0)| \\ \Rightarrow \left| \frac{f'(z)}{d'(z_0)} - 1 \right| &\leq 1 \\ \Rightarrow \forall_{z \in K_{\frac{\varrho}{3}}(z_0)} \ \mathrm{Re}\, \frac{f'(z)}{f'(z_0)} &> 0 \end{aligned}$$

$\overset{5.12}{\Rightarrow} f$ ist injektiv in $K_{\frac{\varrho}{3}}(z_0)$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{f(z_0 + \varrho/3z) - f(z_0)}{\frac{\varrho}{3} f'(z_0)} \in \mathcal{S}.$$

$$\overset{\frac{1}{4}\text{-Satz}}{\Longrightarrow} F(\mathbb{D}) \supset K_{\frac{1}{4}}(0)$$

$$\Rightarrow f\left(z_0 + \frac{\varrho}{3}\mathbb{D}\right) - f(z_0) \supset K_{\frac{1}{4}\frac{\varrho}{3}|f'(z_0)|}(0)$$

$$\Rightarrow f\left(z_0 + \frac{\varrho}{3}\mathbb{D}\right) \supset K_{\frac{1}{24}}(f(z_0))$$

Wir suchen nun für die holomorphe Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ den Radius B_f des größten von $f(\mathbb{D})$ schlicht überdeckten Kreises. Für B gilt:

$$B := \inf\{B_f \mid f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ |f'(0)| \geq 1\} \quad \textit{Blochse Konstante}\text{Bloch} : \quad B \geq \frac{1}{24}$$

$$\text{Ahlfohrs}: \quad B \geq \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433\ldots \qquad (1936)$$

$$\text{Bonk}: \quad B \geq \frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-12} \qquad (1987)$$

$$\text{Ahlfons-Grunski}: \quad B \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{8}} \pi^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} \sim 0,47\ldots \qquad (1936)$$

□

16.06.08

Fassen wir also kurz Zusammen, was wir haben:

1. Die *Blochsche Konstante*

$$B := \inf\{B_f \mid f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ |f'(0)| \geq 1\} \geq \frac{1}{24}$$

2. Die *Bloch-Funktion*

$$\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \mid B_f \leq 1\}$$

Bemerkung. ***(i)***

$$\sup_{g \in \mathcal{B}} |g'(0)| = \frac{1}{N}$$

mit

$$g \in \mathcal{B},\ F(z) := Bg$$

Annahme:

$$|F'(0)| > 1 \Rightarrow B_F > B$$

$$\Rightarrow |g'(0)| \leq \frac{1}{B}.\ B_g > 1$$

außerdem gilt

$$\exists\ f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ B_{f_n} \to B,\ |f_n'| \to 1$$
$$\Rightarrow g_n(z) := \frac{f_n(z)}{B_{f_n},}\ \ |g_n'(0)| \to \frac{1}{B} B_{g_n} = 1 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(ii)

$$g \in \mathcal{B} : (1-|z|^2)\cdot|g'(z)| \leq \frac{1}{B}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$
$$f(w) := g\left(\frac{z+w}{1+\bar{z}w}\right), \qquad w \in \mathbb{D}$$
$$(B_f = B_g)$$
$$\Rightarrow f \in \mathcal{B}$$
$$|f'(0)| = |g'(z)| \left.\frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}w)^2}\right|_{w=0}$$
$$= |g'(z)|\cdot(1-|z|^2) \leq \frac{1}{B}$$

(iii)

$$g \in \mathcal{B} :$$
$$|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{1}{2B}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$
$$|g(z)-g(0)| = \left|\int_0^z g'(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\overset{t=\tau z}{=} \left|\int_0^1 g'(\tau z) z\,\mathrm{d}\,\tau\right|$$
$$\leq |z|\int_0^1 \underline{|g'(\tau z)|}\,\mathrm{d}\,\tau$$
$$\leq \frac{|z|}{B}\int_0^1 \frac{1}{1-|\tau z|^2}\,\mathrm{d}\,\tau$$
$$= \frac{1}{2B}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Lemma 8.2. Satz von Schotky
Für alle $M \geq \frac{1}{2}$ gib es ein γ von M, sodass

$$\forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq M,\ f \neq 0,1 \in \mathbb{D}.$$

Dann existiert ein $F \in \mathcal{B}$ mit $|F(0)| \leq \gamma(M)$ und außerdem:

$$f(z) = -e^{i\pi\cosh(2F(z))}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

Beweis. 1.

$$f \neq 0 \Rightarrow \exists_{\substack{h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \\ |\operatorname{Im} 2\pi i h(0)| \leq \pi}} f(z) = e^{2\pi i h(z)},$$

$$\Rightarrow h \neq 0, 1 \in \mathbb{D}.$$

$$u(z) := \sqrt{h(z)},\ v(z) := \sqrt{h(z) - 1},\ u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

$$\Rightarrow u^2(z) - v^2(z) = h(z) - (h(z) - 1) \equiv 1 \equiv (u(z) + v(z)) \cdot (u(z) - v(z))$$

und da $u(z)$ und $v(z)$ holomorph in $\mathbb{D}$ liegen, dann ist $u(z) - v(z) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists_{\substack{F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \\ |\operatorname{Im} F(0) \leq \pi|}} u(z) - v(z) = e^{F(z)}$$

$$u + v = \frac{1}{u - v} = e^{-F(z)}$$

$$\Rightarrow u(z) = \frac{1}{2}\left(e^{F(z)} + e^{-F(z)}\right) = \cosh F(z)$$

$$\Rightarrow g(z) = u^2(z) = \frac{1}{2}(\cosh 2F(z) + 1) \qquad \Rightarrow f(z) = e^{i\pi(\cosh(2F(z))+}$$

2.

$$\begin{aligned}
|F(0)| &\leq |\operatorname{Re} F(0)| + \underbrace{|\operatorname{Im} F(0)|}_{\leq \pi} \\
&\leq |\operatorname{Re} \log(u(0) - v(0)) - v(0)| + \pi \\
&= |\log |u(0) - v(0)|| + \pi
\end{aligned}$$

Hier ist noch keine Anwendung der Dreiecksungleichung möglich, deswegen betrachten wir das Maximum

$$\begin{aligned}
&= \max\left\{\log|u(z) - v(z)|,\ \log\frac{1}{|u(0) - v(0)|}\right\} + \pi \\
&= \max\{\log|u(0) - v(0)|,\ \log|u(0) + v(0)|\} \\
&\leq \log(|u(0)| + |v(0)|) + \pi
\end{aligned}$$

Weiter gilt auch:

$$\begin{aligned}
|1\pi i h(0)| &\leq |\operatorname{Re} 2\pi i h(0)| + \underbrace{|\operatorname{Im} 2\pi i h(0)|}_{\leq \pi} \\
&\leq |\log|f(0)|| + \pi \\
&\leq \max\{\log 2,\ \log M\} + \pi =: \gamma_1(M) \\
|u(0)| + |v(0)| &\leq \sqrt{|h(0)|} + \sqrt{|h(0)| + 1} \leq \gamma_2(M) \\
\Rightarrow |F(0)| &\leq \log \gamma_2(M) + \pi =: \gamma(M)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
q_{m,n} &:= \pm \log\left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}\right) + \frac{i\pi n}{2}, & m \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}. \\
i\pi \cosh(2q_{m,n}) &= i\pi \frac{1}{2}\left(e^{2q_{m,n}} + e^{-2q_{m,n}}\right) \\
&\frac{i\pi}{2}\left(e^{\pm \log(\dots)^2 + i\pi n} + e^{\mp \log(\dots)^2 - i\pi n}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2}\left(\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)^{\pm 2} e^{i\pi n} + \left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)^{\mp 2} e^{-i\pi n}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2} e^{i\pi n}\left(\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)^{2} + \left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)^{-2}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2} e^{i\pi n}\left(\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)^{2} + \left(\sqrt{m}-\sqrt{m+1}\right)^{2}\right)
\end{aligned}$$

denn es ist (Nebenrechnung):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m+1}} &= \frac{\sqrt{m}-\sqrt{m+1}}{\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)\cdot\left(\sqrt{m}-\sqrt{m+1}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{m}-\sqrt{m+1}}{m-(m+1)} = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}
\end{aligned}$$

Damit folgt also weiter:

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\pi}{2} e^{i\pi n}(4m+2) \\
&= i\pi e^{i\pi n}(2m+1) \\
\Rightarrow -e^{i\pi \cosh(2q_{m,n})} &= -\underbrace{e^{i\pi\left(e^{i\pi n}(2m+1)\right)}}_{=-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Trägt man diese erhaltenen Werte in einem Gitternetz auf, so erhält man ein Gitter mit den Realteilen $\log(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})$ für $m \in \mathbb{Z}$ und auf der immaginären Achse die Netzpunkte $\frac{i\pi n}{2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Man kann also einen Kreis zwischen einem Punkt und einem weiteren, diagonal um jeweils eine Einheit verschobenen Punkt ziehen. Den Abstand bezeichnen wir mit d.

$$d^2 = \underbrace{\log(\sqrt{2}+1)^2}_{<1} + \underbrace{\frac{\pi^2}{4}}_{<3} < 4 \Rightarrow d < 2$$

$F(\mathbb{D})$ enthält keinen Kreis mit einem Durchmesser ≥ 2 (Radius ≥ 1). Das heißt also, $F \in \mathcal{B}$ □

19.06.08

Satz 8.3. Satz von Ahlfons
Für die Blochsche Konstante B *gilt* $B \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Bemerkung. *Bonk (1990) hat gezeigt:*

$$B \geq \frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-4}$$

Definition. Es sei

$$B_0 := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \mid \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)\cdot |f'(z)| \leq 1 \right\}$$

Lemma. *Es sei*

$$\tilde{B} := \inf\left\{B_f \mid f \in B_0,\ f'(0)=1\right\}$$

Dann gilt $\tilde{B} = B$.

Beweis. Klar ist, dass $B \leq \tilde{B}$.
Es sei ein $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mt $|f'(0)| \geq 1$ gegeben. Es sei $r \in \,]0,1[$ und

$$f_r(z) := \frac{1}{r}\cdot f(r\cdot z)$$

Dan ist $f_r \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{D}})$. Es existiert daher

$$M := \max_{z\in\bar{\mathbb{D}}} (1-|z|^2)\cdot |f_r'(z)|\,.$$

Es ist $M_r = (1-|z_0|^2)\cdot|f_r'(z_0)|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$, und es ist

$$M_r \geq |f_r'(0)| = |f'(0)| \geq 1.$$

Es sei

$$g(z) := \frac{f_r(w(z)) - f_r(z_0)}{(1-|z_0|^2)\cdot f_r'(z_0)}, \qquad \text{mit } w(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$$

die Koebe-transformierte von f_r bezüglich z_0. Dann ist $g(0)=0$, $g'(0)=1$ und

$$\begin{aligned}
|g'(z)| &= \frac{|f_r'(w(z))|\cdot|w'(z)|}{(a-|z_0|^2)\cdot|f_r'(z_0)|}\\
&\leq \frac{|f_r'(w(z))|\cdot\left(1-|w(z)|^2\right)}{(1-|z_0|^2)\cdot|f_r'(z_0)|\cdot(1-|z|^2)}\\
&\leq \frac{M_r}{M_r\cdot(1-|z|^2)}\\
&= \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \text{für alle } z\in\mathbb{D}
\end{aligned}$$

Aufgrund des Lemmas von Schnwarz Pick und der Definition von M_r. Dies zeigt $g \in B_0$

Es folgt der Blochgradius

$$\begin{aligned}
B(g) &= \frac{B(f_r)}{(1-|z_0|^2)\cdot|f_r'(z_0)|}\\
&= \frac{B(f_r)}{M_r} \leq B(f_r)\\
&\leq \frac{1}{r}B(f),
\end{aligned}$$

also

$$B_f \geq r \cdot B_g$$

Dies gilt für alle $r \in]0,1[$, sodass $B - f \geq B_g \geq \tilde{B}$.

Da dies für alle $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $|f'(0)| \geq 1$ gilt, ist $b \geq \tilde{B}$,insgesamt also $B = \tilde{B}$. $\square$

Lemma. Satz von Bonk
Es sei $f \in B_0$ mit $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$, dann gilt:

$$\operatorname{Re} f'(z) \geq \frac{1-\sqrt{3}}{\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}}\right)^3}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Beweis. Definieren wir zuerst zwei Funktionen, damit das rechnen leichter wird:

Es sei also

$$F(w) := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-w}{1-\frac{w}{3}},$$

und

$$G(w) := \frac{9}{4} w \left(1 - \frac{w}{3}\right)^2$$

Es ist

$$F(w) = \frac{w-1}{\frac{w}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}},$$

also

$$F^{-1}(w) = \frac{-\sqrt{3}w + 1}{-\frac{w}{\sqrt{3}+1}} = \frac{1-\sqrt{3}w}{1-\frac{w}{\sqrt{3}}}$$

und somit

$$\begin{aligned}
G(F^{-1}(w)) &= \frac{9}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{3}w}{1-\frac{w}{\sqrt{3}}} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}w-1+\sqrt{3}w}{3-\sqrt{3}w}\right)^2 \\
&= \frac{9}{4} \cdot \frac{4(1-\sqrt{3}w)}{9 \cdot \left(1-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^3} \\
&= \frac{1-\sqrt{3}w}{\left(1-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^3}
\end{aligned}$$

und für alle $w \in \partial\mathbb{D}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|G(w)| \cdot \left(1 - |F(w)|^2\right) &= \frac{9}{4}\left|1 - \frac{w}{3}\right|^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\left|\frac{1-w}{1-\frac{w}{3}}\right|^2\right) \\
&= \frac{9}{4}\left(\left|1 - \frac{w}{2}\right|^2 - \frac{1}{3}\left|1-w\right|^2\right) \\
&= \frac{9}{4}\left(1 + \frac{|w|^2}{9} - \frac{2}{3}\operatorname{Re}(w) - \frac{1}{3}\left(1 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(w)\right)\right) \\
&= \frac{9}{4}\left(1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Es folgt $|F(w)| < 1$ für alle $w \in \partial\mathbb{D}$ und nachn dem Maximumsprinzip somit $|F(w)| < 1$ für alle $w \in \bar{\mathbb{D}}$. Weiter gilt für alle $w \in \bar{\mathbb{D}}$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f'(F(w))}{G(w)}\right| &= \frac{|f'(F(w))| \cdot (1 - |F(w)|^2)}{|G(w)| \cdot \left(1 - |F(w)|^2\right)} \\
&= |f'(F(w))| \cdot (1 - |F(w)|^2) \\
&\leq 1, && \text{da } f \in B_0
\end{aligned}
$$

Es sei

$$
H(w) := \frac{w}{(1-w)^2} \cdot \left(\frac{f'(F(w))}{G(w)} - 1\right).
$$

Dann ist H holomorph in $\bar{\mathbb{D}}\backslash\{0\}$. Es ist

□

Beweis. von Satz 8.4 Wegen des 1. Lemmas genügt es $f \in B_0$ mit $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ zu betrachten. Nach dem 2. Lemma ist für alle $z \in K_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(0)$:

$$
\operatorname{Re} f'(z) > 0
$$

aus dem *Satz von Wolf Noshius* 5.12 folgt, dass$f$ in $K_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(0)$ schlicht ist. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{3}}\right) &= f(0) + \int_{\left[0;\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{3}}\right]} f'(\zeta)d\zeta \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f'(t \cdot e^{i\varphi})e^{i\varphi}\,\mathrm{dt},
\end{aligned}
$$

also

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{3}}\right)\right| &\geq \operatorname{Re}\left[e^{i\varphi} f\left(\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \operatorname{Re} f'(t \cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{dt} \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-\sqrt{3}t}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3}\,\mathrm{dt} \\
&= \text{mit Mathematika folgt} \qquad = \frac{\sqrt{3}}{4},
\end{aligned}$$

sodass f fie Kreisscheibe $K_{\frac{\sqrt{3}}{4}}(0)$ überdeckt - und zwar schlicht. □

23.06.08

Satz 8.4. Satz von Schottky
Für $M > 0$ existiert ein $S(M; |z|),\ z \in \mathbb{D}$,so dass für $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ |f(0)| \leq M,\ f \neq 0, 1$ gilt

$$|f(z)| \leq S(M, |z|), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Bemerkung. *Aus dieser gleichhet leitet sich die Beschränktheit ab.*

Beweis. 1.

$$\begin{aligned}
|f(0)| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(z) &= -e^{i\pi \cosh 2F(z)}, \qquad\qquad f \in \mathcal{B} \\
\Rightarrow |f(z)| &= e^{\operatorname{Re}[i\pi \cosh 2F(z)]} \\
&\leq e^{\pi|\cosh 2F(z)|} \\
&\leq e^{\pi e^{2|F(z)|}} \\
&\leq e^{\pi e^{2\left(|F(0)|+\frac{1}{2B}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)}} \\
&\leq \underbrace{e^{\pi e^{2\left(\gamma(M)+\frac{1}{2B}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)}}}_{S_1(M,|z|)}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&|f(0)| < \frac{1}{2}, \\
&g(z) := 1 - f(z) \\
&\left.\begin{array}{ll}
\quad |g(0)| & \leq |1-f(0)| \leq 1+M \\
\Rightarrow |g(0)| \geq 1 - |f(0)| \geq \frac{1}{2} & \\
\quad g \neq 0, 1 &
\end{array}\right\} \\
&\Rightarrow |g(z)| \leq S_1(M+1, |z|) \\
&\Rightarrow |f(z)| \leq 1 + |g(z)| \leq 1 + S_1(M+1, |z|) =: S_2(M, |z|) \\
&\Rightarrow |f(z)| \leq \max\{S_1(M, |z|), S_2(M, |z|)\} =: S(M, |z|)
\end{aligned}$$

□

Satz 8.5. „kleiner" Satz von Picard,
Sei f ganz transzendent. Dann nimmmt f jede komplexe Zahl mit höchstens eine Ausnahme als Wert an.

Beweis. $R > 0$ beliebig, $f \neq a, b \in \mathbb{C},\ a \neq b$.

$$g(z) := \frac{f(Rz) - a}{b - a} \qquad \text{ganz transzendent}$$
$$g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$
$$|g(0)| = \left|\frac{f(0) - a}{b - a}\right| =: M$$
$$g \neq 0, 1 \text{ in } \mathbb{D}.$$
$$\overset{8.4}{\Rightarrow} |z| = \frac{1}{2}:$$
$$|g(z)| \leq S\left(M, \frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow |z| \leq \frac{1}{2} : \ldots$$
$$\Rightarrow \underbrace{|f(Rz)|}_{R=0} \leq |a| + |b - a| \cdot \underbrace{S\left(M, \frac{1}{2}\right)}_{|z| \leq \frac{1}{2}} =: C (= \text{const})$$
$$\Rightarrow \forall_{w \in \mathbb{C}} \ |f(w)| \leq C$$

Das steht im **Widerspruch** dazu, dass f ganz transzendent sein soll. □

Satz 8.6. „große" Satz von Picard,
f sei in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ holomorph, f habe eine wesentliche Singularität in $z = 0$. Dann nimmt f jede komplexe Zahl mit hächtens einer Ausnahme in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ an.

Beweis. ObdA nehmen wir an, dass $f \neq 0, 1$ in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$. Der Satz von Casorati Weierstraß sagt aus, dass

$$\exists_{\{a_j\}} \ e^{-4\pi} > |a_1| > |a_2| > \ldots,$$

Wobei gilt:

$$a_j \to 0, (f(a_j) \to 0) \qquad |f(a_j)| \leq 1,\ j \in \mathbb{N}$$
$$n_n := \log a_n = \log |a_n| + i \arg a_n \text{ mit } |\operatorname{Im} b_n| \leq \pi.$$
$$g(w) := f(e^w)$$
$$\Rightarrow g \in \mathcal{H}(\text{„linke Halbebene"}).$$

Wir definieren uns eine weitere Funktion $h(\zeta)$

$$h(\zeta := g(b_n + 4\pi\zeta), qquadzeta \in \mathbb{D}. \Rightarrow h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$
$$\begin{cases} |h(0)| & = |g(b_n)| = \left|f(e^{b_n})\right| = |f(a_n)| \leq 1 \\ h \neq 0, 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |h(\zeta)| \leq S\left(1, \frac{1}{2}\right), \qquad |\zeta| \leq 12$$
$$\Rightarrow |g(b_n + 2\pi z)| \leq S\left(1, \frac{1}{2}\right), \qquad |z| \leq 1.$$

Wir betrachten die strecke, die im Reellen durch $\operatorname{Re} b_n$ und im immaginären zwischen $+i\pi$ und $-i\pi$ verläuft. Diese loegt komplett im kleineren Kreis mit Radius 2π

$$\Rightarrow |g(\operatorname{Re} b_n + i\alpha)| \leq S\left(\frac{1}{,}\frac{1}{2}\right), \qquad |\alpha| \leq \pi,$$

$$\Rightarrow \left|f\left(e^{log|a_n|+i\alpha}\right)\right| \leq< S\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\Rightarrow \left|f\left(|a_n|\, e^{i\alpha}\right)\right| \leq S\left(1, \frac{1}{2}\right), |\alpha| \leq \pi, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Man kann jeden Punkt in dem großen Kreis „einfangen“ mit hineinbeschriebenen Kreisscheiben.

$$\Rightarrow |f(z)| \leq S\left(1, \frac{1}{2}\right), \qquad 0 < |z| \leq |a_1|$$

f hat in $z = 0$ also eine hebbare Nullstelle. Dies steht im Widersruch zur wesentlichkeit der Nullstelle $z = 0$ □

Ahlfons Lemma

30.06.08

Definition. 1. Sei Ω ein Gebiet, $\varphi : \Omega \mapsto (0, \infty)$, sowie $\varphi \in C^2(\Omega)$. Daraus folgt: φ ist eine *Metrik*

2. Falls $\varphi : \Omega \mapsto [0, \infty)$ und außerdem $\varphi \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega_\varphi)$ mit

$$\Omega_\varphi = \{z \in \Omega \mid \varphi(z) \neq 0\},$$

dann heißt φ eine *Pseudometrik*.

3. $\mathcal{X}(z, \varphi) := -\frac{\Delta \log \varphi(z)}{\varphi(z)}$, mit $z \in \Omega_\varphi$ heißt *Gaußsche Krümmung*

Beispiel. *1.* $\Omega = \mathbb{D}$, $\varphi := \lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ *ist die* hyperbolische Metrik

2. $\Omega = \mathbb{C}$: $\varphi \equiv 1$ *ist die* euklidische Metrik.

3. $\Omega = C^2 :\ \sigma = \frac{2}{1+|z|^2}$, *ist die* sphärische Metrik

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(z, \lambda_{\mathbb{D}}) &= -\frac{\Delta \log \frac{2}{1-absz^2}}{\frac{4}{(1-|z|^2)^2}} = \frac{(1-|z|^2)^2 \Delta \log(1-|z|^2)}{4} \\
&= (1-|z|^2)^{2(\log(1-z\bar{z}))}_{z\bar{z}} \\
&= (1-|z|^2)\left(\frac{-\bar{z}}{1-z\bar{z}}\right)_{\bar{z}} \\
&= (1-|z|^2)^2\left(\frac{-(1-\cancel{z\bar{z}}) - \cancel{z\bar{z}}}{(1-z\bar{z})^2}\right) \\
&= -1. \\
\mathcal{X}(z, \varphi) &\equiv 0 \qquad\qquad (\varphi \text{ euklidisch}) \\
\mathcal{X}(z, \sigma) &\equiv 1.
\end{aligned}$$

Definition. Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine holomorphe Funnktion und φ *pseudometrisch* auf Ω_2. Dann ist

$$f^*(\varphi)(z) := \varphi(f(z)) \cdot |f'(z)|$$

eine pseudometrik auf Ω_1.

Satz 8.7.

$$\mathcal{X}(z, f^*(\varphi)) = \mathcal{X}(f(z).\varphi) \qquad\qquad z \in \Omega.$$

Beweis. 1.

$$\begin{aligned}
\Delta \log \varphi(f)(z) &= 4(\log(\varphi \circ f)(z))_{z\bar{z}} \\
&= 4 \left(\frac{(\varphi \circ f)_z}{\varphi \circ f} \right)_{\bar{z}} \\
&= 4 \frac{(\varphi \circ f)_{z\bar{z}}(\varphi \circ f) - (\varphi \circ f)_{\bar{z}}(f \circ f)_z}{(\varphi \circ f)^2} \\
&= 4 \frac{((\varphi_w \circ f)f') + \cancel{(\varphi_{\bar{w}} \circ f)}\bar{f}_z + (\cancel{(\varphi \circ f)}_{\bar{z}} + (\varphi_{\bar{w}} \circ f)\bar{f}_{\bar{z}})(\varphi_w \circ f)f'}{(\varphi \circ f)^2} \\
&= \frac{4}{(\varphi \circ f)^2} \left[(\varphi_{w\bar{w}} \circ f)\bar{f}\bar{z}f'(\varphi \circ f) - (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ f)\overline{f'}f' \right] \\
&= \frac{4}{(\varphi \circ f)^2} \left[\varphi_{w\bar{w}}(\varphi \circ f) - (\varphi_{\bar{w}} \circ f) \cdot (\varphi_w \circ f) \right] |f(z)|^2 \\
&= \left[\left(\frac{4}{\varphi^2} \left[\varphi_{w\bar{w}}\varphi - \varphi_{\bar{w}}\varphi_w \right] \right) \right] \cdot |f'(z)|^2 \\
\mathcal{X}(z, f^*(\varphi)) &= \frac{-\Delta \left[\log \left[(\varphi \circ f) \cdot |f'(z)|^2 \right] \right]}{\left(\varphi(f) \cdot |f'(z)|^2 \right)^2} \\
&= \frac{-\Delta \log(\varphi \circ f) - \cancel{\Delta \log |f'(z)|}}{(\varphi(f))^2 \cdot |f'(z)|^2} \\
\mathcal{X}(f(z), \varphi) &= \frac{-\Delta \log \varphi}{\varphi^2} \circ f \\
&= \frac{-\Delta \log(\varphi \circ f)}{(\varphi \circ f)^2} \cdot \frac{1}{|f'(z)|^2} \\
&= \mathcal{X}(z, f^*(\varphi))
\end{aligned}$$

□

Beispiel.

$$f^*(\sigma) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \qquad\qquad (f : \Omega \to \mathbb{C})$$

$$z \in \Omega.$$

Definition. Sei Ω ein Gebiet udn λ_Ω eine pseudometrik in Ω.. Dann heißt λ_Ω *hyperbolisch* (in Ω) falls eine $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ existiert mit

$$f' * (\lambda_\Omega) = \lambda_{\mathbb{D}}.$$

Bemerkung. *Sei* λ hyperbolisch, *so gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z, \lambda_\Omega) &= \mathcal{X}(f(w), \lambda(\Omega)) \\ &= \mathcal{X}(w, f^*(\lambda_\Omega)) \\ &= \mathcal{X}(w, \lambda_\mathbb{D}) \equiv -1 \\ z &= f(w)\end{aligned}$$

Beispiel. $a \in \mathbb{C},\ R > 0:\ \lambda_{k_R(a)}(z) := \frac{2R}{R^2 - |z-a|^2}$

$$\begin{aligned}f(z) &= a + Rz\ \ : \qquad \mathbb{D} \to K_R(a) \\ f^*(\lambda_{K_R(a)})(z) &= \lambda_{K_R(a)}(f(z)) \cdot |f'(z)| \\ &= \frac{2R}{R^2 - |Rz|^2} \\ &= \frac{2}{1 - |z|^2} \\ &= \lambda_\mathbb{D}(z).\end{aligned}$$

Satz 8.8. Ahlfons Lemma
Es sei $n\varphi$ *eine pseudometrik in* $\mathbb{D}$, *und außerdem sei* $\mathcal{X}(z, \varphi \leq -1$. *Dann gilt:*

$$\varphi(z) \leq \lambda_\mathbb{D}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Beweis. Es genügt $\varphi(z) \leq \lambda_{K_R(0)}(z),\ |z| < R$; zu zeigen ist:

$$(\varphi(z) =\leq \frac{2R}{R^2\,|z|^2}(\lambda_\mathbb{D}(z) \text{ für } R \to 1).).$$

Setze:

$$v(z) = \frac{\varphi(z)}{\lambda_{K_R(0)}(z)} \qquad\qquad (\geq 0, \text{ nicht } \equiv 0)$$

$v(z)$ ist stetig in $|z| < R$

$$\lim_{|z| \to R} v(z) = 0.$$

Es existiert also ein a aus dem Kreis $K_r(0)$ mit

$$v(z) = v(a) \neq 0 \qquad\qquad z \in K_R(0)$$

v ist also 2 mal stetig diffbar on $z = a$. Auch $\log v$ hat ein globales Maximum in a. Daraus folgt.

$$
\begin{aligned}
(\log v(a))_{xx} &\leq 0, \\
(\log v_a)_{yy} &\leq 0. \\
\Rightarrow 0 \geq \Delta \log v(a) &= \Delta \log \varphi(a) - \Delta \log \lambda_{K_R(0)}(a). \\
&= \underbrace{-\mathcal{X}(a, \varphi)}_{\geq 1} \varphi^2(a) + \underbrace{\mathcal{X}(a\lambda_{K_R(0)})}_{=-1} \lambda^2_{K_R(0)}(a) \\
&\geq \varphi^2(a) - \lambda^2_{K_R(0)}(a) \\
\Rightarrow \lambda_{K_R(0)}(a) &\geq a \\
\Rightarrow \frac{\varphi(a)}{\lambda_{K_R(0)}(a)} &\leq 1 \\
\Rightarrow v(a) &\leq 1 \\
\Rightarrow v(z) &\leq 1, && |z| < R \\
\Rightarrow \varphi(z) &\leq \lambda_{\mathbb{D}}(z), && z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

□

Anm: Wer Fehler findet, bitte an Maximilian.Michel@physik.uni-wuerzburg.de mailen! (Kapitelangabe und letztes Schlagwort nicht vergessen)

Aktuellstes Skript unter www.uni.jock2.de

Index