

Differentialgeometrie

gelesen von Prof. Pabel

\LaTeX von Daniel Bartholomae und Maximilian Michel

22. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum	6
1.1	Grundbegriffe der Kurventheorie	6
2	Frenet-Begleitbasis, Krümmung und Torsion	11
2.1	Approximativer Kurvenverlauf	14
2.2	Krümmungskreis und Schmiegekugel (oskulierende Kugel)	14
2.3	Fundamentalsatz	16
2.4	Spezielle Kurvenklassen	19
3	Kurven im euklidischen \mathbb{R}^n ($n \geq 2$)	22
4	Lokale Flächentheorie im euklidischen Raum	25
4.1	Grundbegriffe der Flächentheorie	25
4.2	Hyperflächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n : Gaußabbildung, Ableitungsgleichungen	30
4.3	Zur inneren Geometrie der Flächen im \mathbb{R}^3	34
4.4	Geodätische Linien	36
5	Krümmungstheorie der Flächen im \mathbb{R}^3	38
5.1	Erste geometrische Bedeutungen der Krümmungsgrößen	38
5.2	Approximativer Flächenverlauf, Klassifikation der Flächenpunkte	41
6	Kurven und spezielle Parameter auf einer Fläche im \mathbb{R}^3	46
6.1	Theorie der Flächenkurve	46
6.2	Spezielle Parameter	49
7	Vertauschbarkeitsrelationen	50
7.1	Der Riemann'sche Krümmungstensor	50
7.2	Weitere kovariante Ableitungen	51
7.3	Gauß- und Codazzi-Gleichungen	52
7.4	Der Bonnetsche Fundamentalsatz	54
8	Spezielle Flächenklassen im \mathbb{R}^3	56
8.1	Minimalflächen	56
8.2	Torsen	59
8.3	Minimalflächen (Teil 2)	60

Bemerkung. An sich sind alle kartesischen Koordinatensysteme gleichberechtigt. Meist wird eine ONB als **positiv orientiert** ausgezeichnet mit $V(e_1, \dots, e_n) = \det(e_1, \dots, e_n) = +1$ (im Standardmodell \mathbb{R}^n die Standardbasis). Dann erhält der Raum eine Orientierung. In einem solchen Raum werden Eigenschaften untersucht, die invariant gegenüber Bewegungen (also Drehung und Translation) des Raumes sind. Im Standard-Modell \mathbb{R}^n beschreibt man diese durch $x \mapsto D \cdot x + t$ mit D orthogonal und $\det D = +1$.

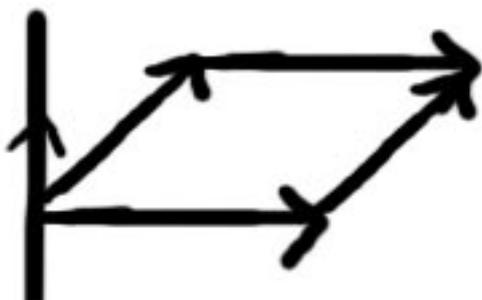


Abbildung 0.1: Vektorprodukt

Definition (Vektorprodukt). In einem orientierten euklidischen Raum gibt es zu je $n - 1$ Vektoren X_1, \dots, X_{n-1} ($n \geq 2$) gibt es genau einen Vektor Y mit den Eigenschaften:

1. $Y \perp X_1, \dots, Y \perp X_{n-1}$
2. $|Y| = a_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n-1}}$
3. $V(X_1, \dots, X_{n-1}, Y) \geq 0$

Man bezeichnet es mit

$$Y = X_1 \times \dots \times X_{n-1}$$

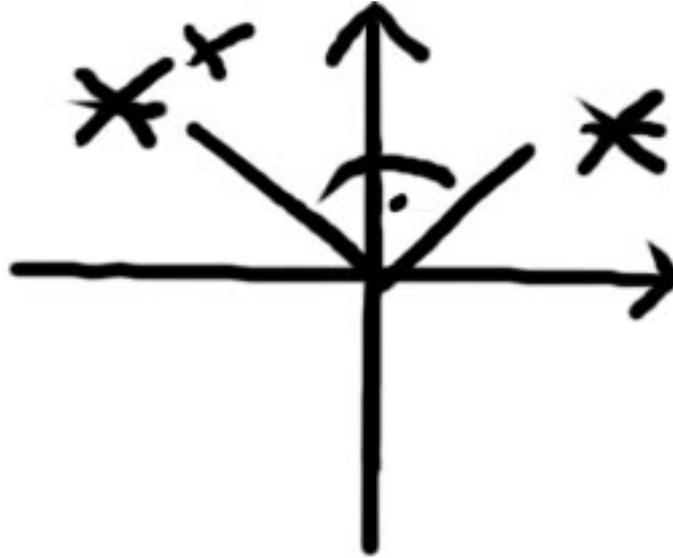
Eine explizite Formel ist

$$\begin{aligned} X_1 \times \dots \times X_{n-1} &= \sum_{i=1}^n V(X_1, \dots, X_{n-1}, e_i) e_i \\ &= \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \dots & X_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung. Mit Hilfe des Vektorprodukts ist klar: Jedes Orthonormalsystem (e_1, \dots, e_{n-1}) lässt sich durch $e_n := e_1 \times \dots \times e_{n-1}$ eindeutig zu einer positiv orientierten ONB ergänzt werden.

Beispiel. $n = 2$

$$X = X^1 e_1 + X^2 e_2 \Rightarrow X^\times = \begin{vmatrix} X^1 & e_1 \\ X^2 & e_2 \end{vmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2$$

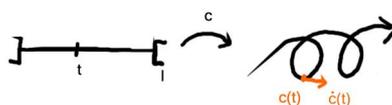
Abbildung 0.2: Vektorprodukt für $n = 2$ $n = 3$

$$\begin{aligned}
 X \times Y &= \begin{vmatrix} X^1 & Y^1 & e_1 \\ X^2 & Y^2 & e_2 \\ X^3 & Y^3 & e_3 \end{vmatrix} \\
 &= (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + (X^3 Y^1 - X^1 Y^3) e_2 + (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) e_3
 \end{aligned}$$

1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

1.1 Grundbegriffe der Kurventheorie

Wir bleiben zunächst in der affinen Differentialgeometrie.



Definition.

Abbildung 1.1: Definition eines C^r -Weges

Ein C^r -Weg oder eine parametrisierte C^r -Kurve ($r \geq 0$) im affinen \mathbb{R}^n ist eine C^r -Abbildung $C : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ eines (offenen) Intervalls in den \mathbb{R}^n . Die Variable t heißt **Parameter**, die Bildmenge $c[I] \subseteq \mathbb{R}^n$ die **Spur** des Weges.

Ein C^r -Weg ($r \geq 1$) heißt **regulär**, wenn überall der Tangentenvektor $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$ ist.

Bemerkung. Sieht man t als Zeit an, so erlaubt dies die **kineamtische Interpretation** einer Kurve: $t \mapsto c(t)$ beschreibt dann die zeitliche Bewegung eines Punktes im \mathbb{R}^n . \dot{c} ist die vektorielle Geschwindigkeit (im euklidischen \mathbb{R}^n ist $|\dot{c}|$ die skalare Geschwindigkeit).

Beispiel. 1. Die **Peano-Kurve** ist ein C^0 -Weg im \mathbb{R}^2 , dessen Spur jedem Punkt eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ enthält.

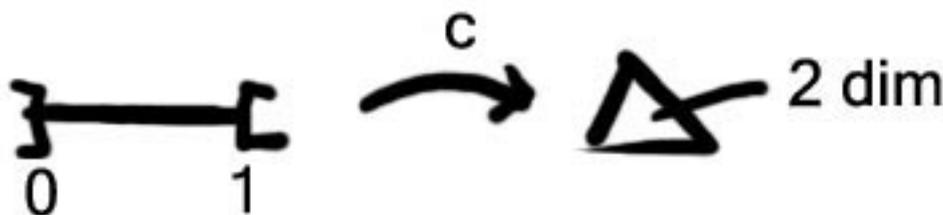


Abbildung 1.2: Peano-Kurve

2. Die Spur eines **konstanten Weges** $t \in I \mapsto c(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ besteht aus nur einem Punkt. Der Weg ist nirgends regulär.

3. Die **Neil'sche Parabel** $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist C^∞ -diffbar. Sie ist in $t = 0$ nicht regulär.

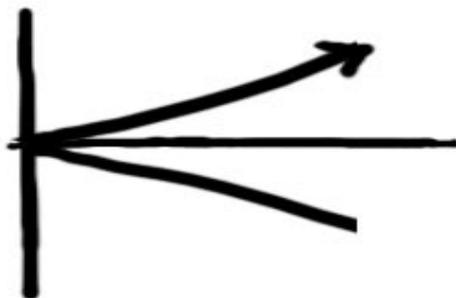


Abbildung 1.3: Neil'sche Parabel

- 4.

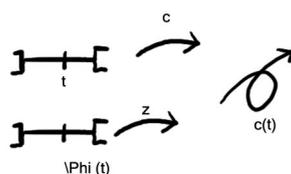


Abbildung 1.4: C^r -Äquivalenz ($c(t) = \tilde{c}(\phi(t))$)

Definition. I, \tilde{I} seien offene Intervalle. Zwei Wege $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen C^r -äquivalent ($r \geq 0$), wenn ein ordnungstreu (d.h. monoton wachsender) C^r -Diffeomorphismus $\phi : I \rightarrow \tilde{I}$ existiert mit $c = \tilde{c} \circ \phi$, d.h. $\forall t \in I c(t) = \tilde{c}(\phi(t))$.

Bemerkung. 1. ϕ ist ein C^r -Diffeomorphismus $:\Leftrightarrow \phi$ ist bijektiv und sowohl ϕ als auch ϕ^{-1} sind C^r -diffbar.

2. Ein C^r -Diffeomorphismus ($r \geq 1$) ist genau dann orientierungstreu, wenn überall $\dot{\phi}(t) > 0$ gilt.

3. Äquivalente Wege haben das gleiche Regularitätsverhalten: $\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(\phi(t)) \underbrace{\dot{\phi}(t)} > 0$.

4. Die C^r -Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Definition. Eine (orientierte, reguläre) C^r -**Kurve** ($r \geq 1$) im affinen Raum \mathbb{R}^n ist eine C^r -Äquivalenzrelation $[c]$ von regulären C^r -Wegen $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ein Repräsentant heißt eine (zulässige) **Parameterdarstellung** (oder **Parametrisierung**), eine die Äquivalenz vermittelnde Abbildung ϕ eine (zulässige) **Parametertransformation**.

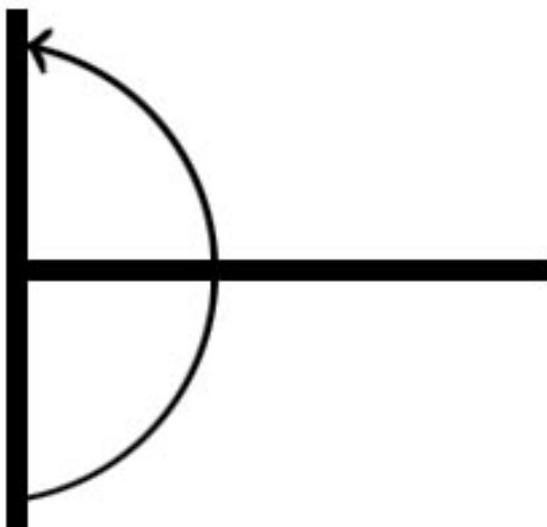


Abbildung 1.5: Kreisdarstellung

Beispiel. Für die „Kreis“-Darstellungen $t \mapsto c(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $\tilde{t} \mapsto \tilde{c}(\tilde{t}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \tilde{t}} \\ \tanh \tilde{t} \end{pmatrix}$ sind (für $|t| < \frac{1}{\pi}$) $\tilde{t} = \phi(t) = \operatorname{artanh} \sin t$ und $\dot{\phi}(t) = \frac{1}{1-\sin^2 t} \cdot \cos t = \frac{1}{\cos t} > 0$ C^∞ äquivalente Parametertransformationen.

Bemerkung. Nicht jedes 1-dimensionale „Gebilde“ in \mathbb{R}^n lässt sich **global und injektiv** als Bild eines offenen Intervalles darstellen, zum Beispiel die **vollständige Kreislinie**. Objekte, die **lokal** so parametrisiert werden können, heißen 1-dimensionale **differenzierbare Mannigfaltigkeit**. Bei ihnen kann auf einen umgebenden Raum verzichtet werden. Für lokale Untersuchungen braucht man eine solche Erweiterung des Kurvenbegriffes nicht.

Die eingeführten Begriffe sind natürlich **affin-invariant** ($\tilde{c} = M \cdot c + t \Rightarrow \dot{\tilde{c}} = M \cdot \dot{c}, \dots$)

Gesucht: Invarianten, die auch nicht von der gewählten Parametrisierung abhängig sind. Ein Beispiel aus der affinen Differentialgeometrie (Skizze 03)

Satz 1.1. $t \mapsto c(t)$ sei Parameter. Darstellung einer C^1 -Kurve ($r \neq n$) im affinen Raum \mathbb{R}^n . Dann gilt:

Die Ableitungsvektoren $c_p := \frac{d^p c}{dt^p} = c^{(p)} (p = 1, \dots, n)$ sind nicht invariant gegenüber **Parametertransformation**, jedoch die (punktaler, orientierter) **Schmiegräume (oskluierende Räume, osculatinusspaces)**

$$s_p(t) := c(t) + \langle c_1(t), \dots, c_n(t), \rangle p = 1, \dots, n$$

1. Die **1.** Schmiegräume: $s_1(t) := c(t) + \langle \dot{c}(t) \rangle$ heißen **Tangenten**
2. Die **2.** Schmiegräume: $s_2(t) := c(t) + \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle$ heißen **Schmiegeebene**

Beweis. Aus $c = \tilde{c} \cdot \phi$ folgt nach der Kettenregel $\dot{c} = \phi \cdot (\dot{\tilde{c}} \cdot \phi)$, $\ddot{c} = \dot{\phi}^\alpha (\ddot{\tilde{c}} \cdot \phi) + Q_2^1(\dot{\phi}, \ddot{\phi}) \cdot (\dot{\tilde{c}} \cdot \phi)$

 Allgemein:

$$c_p = \dot{\phi}^p (\tilde{c}_p \phi) + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{Q_p^k(\dot{\phi}, \ddot{\phi}, \dots)}_{\text{Kettenregelpolynome}}$$

Also hat man die Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & & & \\ & \dot{\phi}^2 & & 0 \\ & & \dots & \\ & & & \dot{\phi}^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \cdot \phi \\ \vdots \\ \tilde{c}_p \cdot \phi \end{pmatrix}$$

mit trigonaler regulären Transformationsmatrix. Positive Determinante. Dies zeigt unter anderem

$$\langle c_1, \dots, c_p \rangle \stackrel{!}{=} \langle \tilde{c}_1 \cdot \phi, \dots, \tilde{c}_p \cdot \phi \rangle$$

□

Bemerkung. Die Regularitätsforderung $\dot{c}(t) \neq 0$ bedeutet, dass überall die Tangente als 1-dimensionaler Raum (Gerade) existiert.

Die Schmiegräume kann man dazu benutzen, festzustellen, ob eine Kurve in einem offenen Teilraum $U_P \subset \mathbb{R}^n$ liegt (in einer Geraden, Ebene, ...)

Zunächst gilt immer:

- $s_1(t) \subset \dots \subset s_p(t)$
- $\dim s_p(t) \leq p$

Satz 1.2. 1. liegt eine C^{p+1} -Kurve $[c : I \rightarrow \mathbb{R}^n]$ in einem p -dimensionaler affiner Unterraum des \mathbb{R}^n ($1 \leq p \leq n - 1$), so ist

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) < p + 1$$

d.h. der $(p + 1)$ -te Schmiegraum ist **degeneriert**.

2. Gilt umgekehrt

$$\forall_t \dim S_{p+1} = \dim S_p(t) = p$$

so liegt die Kurve in einen p -dimensionalen, aber in keinem niedrigerdimensionalen affinen Unterraum

Anwendungen:

1. Eine C^1 Kurve in \mathbb{R}^n verläuft genau dann geradlinig, wenn $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$ linear abhängig ist. Die Hinrichtung folgt nach 1, die Rückrichtung nach 2, da die Kurve **regulär** ist.

Definition. Ein (regulärer) Kurvenpunkt $c(t)$ heißt **Wendepunkt (inflection point)**, falls $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$ linear abhängig ist.

1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

2. Eine wendepunktfreie C^3 Kurve im \mathbb{R}^n verläuft genau dann in einer Ebene, wenn $\forall_t(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{c}(t))$ linear abhängig ist. Die Hinrichtung nach 1, die Rückrichtung nach 2 da $\forall_t(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$ linear unabhängig sind.

Definition. Ein Nicht-Wendepunkt $c(t)$ heißt **Henkelpunkt (handle piont)**, falls $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{c}(t))$ linear abhängig ist

Beweis. von Satz 1.2

1. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall_{t \in I} c(t) &= 0 + \sum_{k=1}^p \lambda_k(t) a_k \in U_p = 0 + \langle a_1, \dots, a_p \rangle \\ \Rightarrow \forall_{l=1}^{p+1} \forall_{t \in I} c_l(t) &= c^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^{(l)}(t) a_k \in \langle a_1, \dots, a_p \rangle \\ \Rightarrow \forall_t \dim S_{p+1}(t) &\leq p < p+1 \end{aligned}$$

2. Nach Voraussetzung ist $(c_1, \dots, c_p)(t)$ linear unabhängig, aber $(c_1, \dots, c_{p+1})(t)$ linear abhängig für alle t . Es existieren also Funktionen $t \mapsto \lambda_0(t), \dots, \lambda_{p-1}(t)$ mit $c_{p+1} = \sum_{k=1}^p \lambda_{k-1} c_k$ bzw.

$$(\dot{c})^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \dot{c}^{(k)}$$

Diese Funktionen sind stetig auf I , denn es kann nach $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ aufgelöst werden (es liegt ein lineares Gleichungssystem mit vollrangiger Matrix vor, da c_1, \dots, c_p linear unabhängig sind, außerdem sind die Einträge und die „rechte Seite“ stetig). Die Koordinaten-Funktion $t \mapsto \dot{c}^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) genügen also der linearen DGL p -ter Ordnung

$$y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k y^{(k)}$$

mit stetigen Koeffizienten. Für sie existiert ein Fundamentalsystem $y_1, \dots, y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für jede Lösung gilt: $y(t) = \sum_{k=1}^p a_k y_k(t)$, also auch

$$\dot{c}^i = \sum_{k=1}^p a_k^i y_k(t) \Rightarrow \dot{c}(t) = \sum_{k=1}^p y_k(t) \cdot a_k$$

mit konstanten Vektoren $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$. Integration liefert

$$c(t) = c(t_0) + \sum_{k=1}^p \left(\int_{t_0}^t y_k(\tau) d\tau \right) a_k \in c(t_0) + \langle a_1, \dots, a_p \rangle =: U_p$$

Es ist schließlich $\dim U_p = p$, denn aus $\dim U_p = k < p$ folgte nach (a) $\dim S_{k+1} < k+1$, also auch $\dim S_p < p$.

□

Hier beenden wir unseren Ausflug in die **affine Differentialgeometrie**. Wir benutzen ab jetzt die metrische Struktur des orientierten euklidischen Raumes \mathbb{R}^n .

2 Frenet-Begleitbasis, Krümmung und Torsion

Die **Krümmung** einer Raumkurve im BLP $s \mapsto c(s)$ soll deren Abweichung vom **geradlinigen** Verlauf messen. Diese Krümmung wird bestimmt durch die Änderung des Tangenten-Einheitsvektors $T := c'$

Satz 2.1. Für die Krümmung $s \mapsto K(s) := |T'(s)| = |c''(s)| \geq 0$ einer C^2 Kurve im BLP $s \mapsto c(s)$ im \mathbb{R}^3 gilt:

$$1. \quad K(s_0) = 0 \quad \Leftrightarrow c(s_0) \text{ Wendepunkt} \\ (\Leftrightarrow (c', c'')(s_0) \text{ Linear abhängig})$$

$$2. \quad K \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \text{Gerade}$$

Beweis. 1. $K(s_0) = 0 \Leftrightarrow T'(s_0) = 0 \stackrel{\Leftrightarrow}{=} (c'(s_0), c''(s_0)) = (T(s_0), T'(s_0))$. Für die Rückrichtung wird benötigt

$$T^2 = \langle T, T, \rangle = 1 \quad (\text{Einheitsvektor})$$

$$2 \cdot \langle T, T', \rangle = 0 \Rightarrow T' \perp T, \text{ aber } (T, T') \text{ linear abhängig} \Rightarrow T' = 0$$

2. Nach Satz 1.2, Anwendung 1, oder direkt

$$K \equiv 0 \Leftrightarrow T' = c'' \equiv 0 \Leftrightarrow c(s) = x_0 + s \cdot x$$

□

Noch ein Test, ob der Name „Krümmung“ gerechtfertigt ist: Für einen Kreis in BLP

$$s \mapsto c(s) = r \begin{pmatrix} \cos s/r \\ \sin s/r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt}$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} -\sin s/r \\ \cos s/r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |T'(s)| = K(s) \\ = \frac{1}{r} = \text{const}$$

im **Nicht-WP** bilden $T = c'$ und $\frac{T'}{|T'|} = \frac{c''}{|c''|}$ eine **Orthonormalbasis** der Schwingsebene die zu einer Begleitbasis der Kurve ergänzt werden kann:

2 Frenet-Begleitbasis, Krümmung und Torsion

Satz 2.2. Sei $s \mapsto c(s)$ BLP einer WP-freien C^2 -Kurve im euklidischen \mathbb{R}^3 . Dann bilden die Vektorfelder

$$\begin{aligned} s \mapsto T(s) &= c'(s) && \text{(Tangentenvektor)} \\ s \mapsto H(s) &= \frac{T'(s)}{|T'(s)|} && \text{(Hauptnormalenvektor)} \\ s \mapsto B(s) &= T(s) \times H(s) && \text{(Binormalenvektor)} \end{aligned}$$

eine orthonormierte, positiv orientierte C^0 -Begleitbasis der Kurve, genannt **Frenet-Begleitbasis**.

Korollar. In jedem Kurvenpunkt hat man die paarweise orthogonalen **Begleitebenen**

$$\begin{aligned} c(s) + \langle T(s), H(s) \rangle (+B(s)) &\text{(Schmiegebene)} \\ c(s) + \langle H(s), B(s) \rangle (+T(s)) &\text{(Normalebene)} \\ c(s) + \langle B(s), T(s) \rangle (+H(s)) &\text{(Rektifizierende Ebene)} \end{aligned}$$

Die **Torsion** (Windung, 2. Krümmung) einer WP-freien C^3 -Kurve ($\Rightarrow (T, H, B)$ sind diffbar) soll deren Abweichung vom ebenen Verlauf messen. Diese wird bestimmt durch die Änderung des Binormalenvektors B (der der Normalenvektor der Schmiegebene ist). Wegen

$$\begin{aligned} B^2 = 1 &\Rightarrow \langle B, B' \rangle = 0 \Leftrightarrow B' \perp B \\ B = T \times H &\Rightarrow B' \underbrace{T' \times H + T \times H'}_{=0} \Rightarrow B' \perp T \end{aligned}$$

gilt $B' = -\tau \cdot H$ mit einer C^0 -Funktion $\tau = -\langle B', H \rangle$.

Satz 2.3. Für die durch $B' = -\tau H$ definierte **Torsion** gilt wegen $\langle H, B \rangle = 0$

$$s \mapsto \tau(s) = -\langle B', H \rangle = +\langle H', B \rangle = \langle H', T \times H \rangle = \det(T, H, H')$$

Für die Torsion einer WP-freien C^3 -Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ im \mathbb{R}^3 gilt

1. $\tau(s_0) = 0 \Leftrightarrow c(s_0)$ ist ein **Henkelpunkt**.
2. $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow$ die Kurve verläuft eben.

Beweis. 1.

$$\begin{aligned} \tau(s_0) &= \det(T, H, H')(s_0) = \det \left(c', \frac{c''}{\kappa}, \left(\frac{1}{\kappa} \right)' c'' + \frac{1}{\kappa} c''' \right) (s_0) = \frac{1}{\kappa^2} \det(c', c'', c''')(s_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (c', c'', c''')(s_0) \text{ sind linear abhängig} \end{aligned}$$

□

Satz 2.4. für die Frenet-Begleitbasis $s \mapsto (T, H, B)(s)$ einer WP-freien C^3 -Kurve im \mathbb{R}^3 gelten die **Frenetschen Ableitungsgleichungen**

$$\begin{aligned} T' &= \kappa \cdot H \\ H' &= -\kappa T + \tau B \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix} \\ B' &= -\tau \cdot H \end{aligned}$$

mit der C^1 -Krümmung $s \mapsto \kappa(s) > 0$ und der C^0 -Torsion $s \mapsto \tau(s)$.

Beweis. Da $(T_1, T_2, T_3) := (T, H, B)$ ein ONB-Feld ist, gilt

$$\langle T_i, T_k \rangle = \delta_{ik} \Rightarrow \langle T'_i, T_k \rangle = -\langle T_i, T'_k \rangle$$

d.h. die Ableitungsmatrix $(\langle T'_i, T_k \rangle)_{i,k=1,2,3}$ ist **schiefssymmetrisch**. Damit kann die 2. Zeile der Ableitungsmatrix aus der 1. und der 3. Zeile bestimmt werden. \square

Problem: Wie berechnet man Begleitbasis, Krümmung und Torsion, wenn man nicht explizit den BLP kennt?

Folgerung: Bezüglich einer beliebigen Parametrisierung $t \mapsto c(t)$ einer WP-freien C^3 -Kurve gilt

$$\begin{aligned} T &= \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} & B &= \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|} & H &= B \times T = \frac{\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T}{|\dot{c} \times \ddot{c}| / |\dot{c}|} \\ \kappa &= \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} & \tau &= \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2} \end{aligned}$$

Die Basis (T, H, B) erhält man auch durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens auf die Vektoren (\dot{c}, \ddot{c}) der Schmiegeebene und anschließende Ergänzung durch $B := T \times H$.

Satz 2.5. Äquivalent zu den Frenetschen Ableitungsgleichungen ist

$$\begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}' = \omega D \times \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}$$

mit der **Gesamtkrümmung** $\omega := \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ und dem (normierten) **Darboux-Vektor** (Drehvektor)

$$D = \frac{1}{\omega}(\tau \cdot T + \kappa \cdot B)$$

Beweis. Nachrechnen. \square

T, H und B lassen sich kinematisch interpretieren: $s \mapsto c(s)$ beschreibt die Bewegung eines Massepunktes mit der Bahngeschwindigkeit $w = |c'| = 1$. Die Bewegung eines starr mit der Begleitbasis $(T_1, T_2, T_3) := (T, H, B)$ verbundenen Punktes

$$p(s) = c(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i T_i(s) = c(s) + X(s)$$

setzt sich zusammen aus einer Translation (mit der Kurve) und einer Drehung um eine momentane Drehachse. Für seine Geschwindigkeit gilt

$$p'(s) = c'(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \omega(s) D(s) \times T_i(s) = c'(s) + \omega(s) D(s) \times X(s)$$

mit der vektoriellen Vektorgeschwindigkeit $(\omega D)(s)$ des Vektors $X(s) := p(s) - c(s)$, dem Einheitsvektor der Drehachse $D(s)$ und der skalaren Winkelgeschwindigkeit $\omega(s)$.

2.1 Approximativer Kurvenverlauf

$s \mapsto c(s)$ sei BLP eine C^3 -Kurve mit $\kappa > 0$. Um den Parameterwert s_0 (o.E. $s_0 = 0$) besitzt sie die Taylorentwicklung

$$c(s) = c(0) + c'(0) \cdot s + \frac{1}{2}c''(0)s^2 + \frac{1}{3!}c'''(0)s^3 + o(s^3)$$

Wegen $c' = T$, $c'' = T' = \kappa H$ und $c''' = \kappa'H + \kappa(-\kappa T + \tau B)$ gilt:

Satz 2.6. Eine WP-freie C^3 -Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ im \mathbb{R}^3 besitzt um $s = 0$ die Taylorentwicklung

$$c(s) = x_0 + \left(s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3\right) T_0 + \left(\frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \frac{1}{6}\kappa_0' s^3\right) H_0 + \left(\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3\right) B_0 + O(s^3)$$

genannt **lokale kanonische Form** der Kurve bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $(x_0; T_0, H_0, B_0)$ in der Umgebung von $s = 0$. Berücksichtigt man nur Terme niedrigster Ordnung, so verhält sie sich wie

$$s \mapsto \left(s, \frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3\right)$$

Bemerkung. 1. Eine Kurve im \mathbb{R}^3 verläuft in 1. Näherung in ihrer Tangente, in 2. Näherung in ihrer Schmiegebene. Abweichungen sind durch Krümmung und Torsion bestimmt.

2. Ihre Orthogonalprojektion

- in die **Schmiegebene** verhält sich wie eine **quadratische Parabel**
- in die **Normalebene** verhält sich wie eine **Neil'sche Parabel**
- in die **rektifizierende Ebene** verhält sich wie eine **kubische Parabel**

3. Sie durchdringt ihre Normalebene $x_0 + \langle H_0, B_0 \rangle$ in Richtung von T_0 und ihre Schmiehebene $x_0 + \langle T_0, H_0 \rangle$ für $\tau_0 > 0$ in Richtung von B_0 (dies liefert die geometrische Bedeutung des Vorzeichens der Torsion). Sie durchdringt niemals ihre rektifizierende Ebene $x_0 + \langle B_0, T_0 \rangle$, sondern bleibt auf der Seite, in die H_0 zeigt.

2.2 Krümmungskreis und Schmiegekugel (oskulierende Kugel)

Wir bestimmen alle Kugeln $K_r(m) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - m| = r\}$, die eine vorgegebene Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ in einem Punkt $c(s_0)$ von 2. bzw. 3. Ordnung berühren. Die Berührungsbedingungen an die Abstandsfunktion

$$s \mapsto F(s) = d^2(s) = (c(s) - m)^2$$

lauten

- $F(s_0) = r^2$ für Berührung 0. Ordnung

2.2 Krümmungskreis und Schmiegekugel (oskulierende Kugel)

- zusätzlich $F'(s_0) = 0$ für Berührung 1. Ordnung
- zusätzlich $F''(s_0) = 0$ für Berührung 2. Ordnung
- zusätzlich $F'''(s_0) = 0$ für Berührung 3. Ordnung

Bemerkung. Die Berührung 1. Ordnung heißt auch manchmal „2-punktige Berührung“, da man $F(s_0) = F(s_1) = r^2$ fordert. Dann gibt es wegen dem MWS ein $\bar{s}_0 \in \overline{s_0 s_1}$ mit $F'(\bar{s}_0) = 0$. Der Grenzübergang $s_1 \rightarrow s_0$ liefert $\bar{s}_0 \rightarrow s_0$, also $F'(s_0) = 0$.

Die Berührung 2. Ordnung heißt auch „3-punktige Berührung“. Die Begründung läuft analog.

Aus den Bedingungen folgt

$$(0) \quad r^2 = F(s_0) = |c(s_0) - m|^2$$

$$(1) \quad 0 = F'(s_0) = 2 \langle c - m, T \rangle (s_0)$$

$$(2) \quad 0 = F''(s_0) = 2[1 + \kappa \langle c - m, H \rangle](s_0)$$

$$(3) \quad 0 = F'''(s_0) = 2[\kappa' \langle c - m, H \rangle + \kappa \langle c - m, \tau B - \kappa T \rangle](s_0)$$

Der Ansatz $m = c(s_0) + \alpha T(s_0) + \beta H(s_0) + \gamma B(s_0)$ liefert durch durchmultiplizieren mit $T(s_0)$, $H(s_0)$, bzw. $B(s_0)$

$$\alpha = - \langle c - m, T \rangle (s_0) \quad \beta = - \langle c - m, H \rangle (s_0) \quad \gamma = - \langle c - m, B \rangle (s_0)$$

Aus Bedingung

$$(0) \quad \text{folgt } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2.$$

$$(1) \quad \text{folgt } \alpha = 0$$

$$(2) \quad \text{folgt } \beta = 1/\kappa(s_0) =: \varrho(s_0) \quad (\text{falls } \kappa(s_0) > 0)$$

$$(3) \quad \text{folgt } (\kappa' \varrho + \kappa \tau \cdot \gamma)(s_0) = 0 \text{ also}$$

$$\gamma = - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}(s_0) = \frac{\varrho'}{\tau}(s_0)$$

Satz 2.7. 1. Bei einer C^2 -Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ existiert in einem Nicht-WP $c(s_0)$ (mit $\kappa(s_0) > 0$) genau eine 1-parametrische Kugelschar, die dort von 2. Ordnung berührt. Die Mittelpunkte m dieser Kugeln liegen auf der Geraden

$$c(s_0) + \varrho(s_0)H(s_0) + \langle B(s_0) \rangle \quad (\text{mit } \varrho = \frac{1}{\kappa})$$

genannt **Krümmungsachse** der Kurve in $c(s_0)$. Alle diese Kugeln schneiden die Schmiegebene in einem Kreis mit

Mittelpunkt $\bar{m} = c(s_0) + \varrho(s_0)H(s_0)$

Radius $\bar{r} = \varrho(s_0)$ [**Krümmungsradius**]

genannt **Krümmungskreis** der Kurve in $c(s_0)$.

2. Bei einer C^3 -Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ existiert in einem Nicht-Henkelpunkt $c(s_0)$ (mit $\kappa(s_0) > 0$, $\tau(s_0) \neq 0$) genau eine Kugel, die dort von 3. Ordnung berührt. Sie besitzt den Mittelpunkt $m = c(s_0) + \varrho(s_0)H(s_0) + \frac{\varrho'}{\tau}B(s_0)$ und dem Radius $r = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)^2}(s_0)$ und heißt **Schmiegekugel** der Kurve in $c(s_0)$.

2.3 Fundamentalsatz

Frenet-Theorie ist grundsätzlich nur möglich für WP-freie Kurven ($\kappa > 0$). Ausreichende Differenzierungsordnungen dafür sind

c	C^3
T	C^2
H	C^1
B	C^1
κ	C^1
τ	C^0

es ist aber auch möglich, folgendes zu betrachten:

c	C^2
T	C^1
H	C^1
B	C^1
κ	C^0
τ	C^0

Schon für solche C^2 -Kurven mit C^1 -Begleitbasis (**Frenet-Kurven**) lässt sich beweisen:

Definition 2.8. BLP=Bogenlängenparametrisierung

Satz 2.9. (Fundamentalsatz der Kurventheorie im euklidischen \mathbb{R}^3)

(a) Seien $s \in I \mapsto \kappa(s) > 0$, $s \in I \mapsto \tau(s)$ beliebige C^0 Funktionen, $s_0 \in I$ linearer Parameterwert, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt

(Skizze ONB)

und (T_0, H_0, B_0) eine positiv orientierte ONB in \mathbb{R}^3 . Dann gibt es genau eine C^2 Frenet Kurve im BLP $s \mapsto c(s)$ definiert auf ganz I welche die Krümmung $\kappa(s)$ und die Torsion $\tau(s)$ besitzt sowie die Anfangsbedingung

$$c(s_0) = x_0, \quad (T, H, B)(s_0) = (T_0, B_0, H_0)$$

erfüllt.

(b) Zwei C^2 -Kurven im BLP $s \mapsto c(s)$, $s \mapsto \tilde{c}(s)$ mit C^1 Begleitbasis im \mathbb{R}^3 mit gleichmäßiger Krümmung $s \mapsto \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$ und Torsion $s \mapsto \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ stimmen überein bis auf eine Bewegung des \mathbb{R}^3 , das heißt, es gilt $\tau = D \cdot c + t$ mit einer Drehmatrix $D \in S =_3(\mathbb{R})$ in einem Translationsvektor $t \in \mathbb{R}^3$

Beweis. 2.9 **Eindeutigkeit:** Das lineare DGL-System der Frenet-Formel

$$c' = T_1, \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

bzw.:

$$T'_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} T_k$$

besitzt zu Anfangsbedingung 2.9 (bzw. hier $(T_1, T_2, T_3)(s_0) = (T_0, H_0, B_0)$) genau eine C^1 Lösung $s \mapsto (T_1, T_2, T_3)(s)$, und damit genau eine C^1 Lösung $s \mapsto c(s) = x_0 + \int_{s_0}^s T_1(\sigma) d\sigma$ definiert auf ganz I .

Existenz: Es muss noch überprüft werden, ob die Lösung $s \mapsto c(s)$ wirklich BLP- Darstellung einer Kurve ist und wirklich Krümmung κ und Torsion τ besitzt.

(α) Wir zeigen: Die Lösungsfelder

$$s \mapsto T_1(s), T_2(s), T_3(s)$$

bilden überall (nicht nur in s_0) eine positiv-orientierte ONB:

Für die Skalarprodukte $s \mapsto \langle T_i, T_k, (\cdot) s \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \langle T_i, T_k, ' \rangle &= \langle T_i', T_k \rangle + \langle T_i, T_k' \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \langle T_j, T_k \rangle + \sum_{j=1}^3 a_{kj} \langle T_i, T_j \rangle \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt zu den Anfangsbedingungen $\langle T_i, T_k, (\cdot) s_0 \rangle = \sigma_{ik}$ genau eine Lösung, und diese ist

$$\langle T_i, T_k, \equiv \rangle \sigma_{ik}$$

, denn $0 = \sigma'_{ik} = \sum_{j=1}^3 a_{ik} \sigma_{jk} + \sum_{j=1}^3 a_{kj} \sigma_{ij} = a_{ik} + a_{ki} = 0$ (Häckchen), weil die Abbildungsmatrix Schiefsymmetrisch ist. Weiter muss für $s \mapsto (T_1, T_2, T_3)(s)$ gelten:

$$\det(T_1, T_2, T_3)(s) \equiv \pm 1$$

wobei aus Stetigkeitsgründen wegen $\det(T_1, T_2, T_3)(s_0) = +1$ nur $+1$ möglich ist.

(β) Für die Lösung $s \mapsto c(s)$ gilt jetzt

$$|c'| = |T_1| = 1$$

d.h.: sie ist BLP eine Kurve in \mathbb{R}^3 . Weiter ist

$$\begin{aligned} T &= c' = T_1 \\ H &= \frac{T'}{|T'|} = \frac{T_1'}{|T_1'|} = \frac{\kappa T_2}{\kappa |T_2|} = T_2 \\ & \qquad \qquad \qquad \text{wg.pos.} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{orient.} \\ B &= T \times H = T_1 \times T_2 \stackrel{ONB}{=} T_3 \end{aligned}$$

Es gelten also die Fresnet'schen Ableitungsgleichungen für (T, H, B) , sodass κ die Krümmung und τ die Torsion von c ist.

Für höhere Dimensionen: Ableitungsbasen der ONB müssen Schiefsymmetrisch sein. Dann folgt der Rest analog.

□

Beweis. 2.9 Sei s_0 ein fester Parameterwert, sowie $x_0 = c(s_0)$

$$(T_0, H_0, B_0) := (T, H, B)(s_0)$$

$$\tilde{x}_0 = \tilde{c}(s_0), (\tilde{T}_0, \tilde{H}_0, \tilde{B}_0)(s_0)$$

Dann gibt es genau eine Drehmatrix $D \in SO_3(\mathbb{R})$ und einem Vektor t mit

$$\boxed{\tilde{x}_0 = Dx_0 + t, \tilde{T}_0 = D \cdot T_0, \tilde{H}_0 = D \cdot H_0, \tilde{B}_0 = D \cdot B_0}$$

Das lineare Gleichungssystem

$$c' = T_1 \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

hat nun die Lösungssysteme

(1) $s \mapsto c(s)$, $s \mapsto (T, H, B)(s)$ und wegen der Linearität auch

(2) $s \mapsto Dc(s) + t$, $s \mapsto (DT, DH, DB)(s)$ sowie auch

(3) $s \mapsto \tilde{c}(s)$, $s \mapsto (\tilde{T}, \tilde{H}, \tilde{B})(s)$

wobei 2.3 und 2.3 gleiche Anfangswerte besitzen, also identisch sind.

$$\tau \equiv Dc(s) + t$$

$$[\tilde{T} \equiv D \cdot t]$$

□

Ergebnis: Krümmung und Torsion einer Kurve als Funktionen der Bogenlänge bilden ein **vollständiges** System **unabhängiger** Invarianten für eine Frenet-Kurve im \mathbb{R}^3 .

Bemerkung. Das DGL-System der Frenetformeln ist nur in einfachen Fällen explizit lösbar, etwa bei ebenen Kurven als Spezialfälle von Böschungslinien.

Beispiel. Es sei vorgegeben:

$$s \mapsto \kappa(s) = \frac{1}{r} > 0, \quad s \mapsto \tau(s) = 0$$

Eine Lösung von $T' = H/r$, $H' = -T/r$, $B' = 0$ ist

$$s \mapsto T(s) = \cos \frac{s}{r} e_1 + \sin \frac{s}{r} e_2$$

also ist eine Lösungskurve gegeben durch

$$s \mapsto c(s) = r \begin{pmatrix} \sin \frac{s}{r} \\ -\cos \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Variante des Fundamentalsatzes lautet wie folgt:

Satz. *Es seien vorgegeben:*

$$\begin{aligned} t \mapsto w(t) > 0 & \qquad \qquad \qquad (\text{Geschwindigkeit}) \\ t \mapsto \kappa(t) > 0, \tau(t) & \qquad \qquad \qquad (\text{Krümmung und Torsion}) \end{aligned}$$

bestimmt eine Kurve in Parameterdarstellung $t \mapsto c(t)$ mit $|\dot{c}| = w$ eindeutig. Das System

$$\dot{c} = wT, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}$$

2.4 Spezielle Kurvenklassen

Böschungslinien

Definition. Eine **Böschungslinie** im \mathbb{R}^3 ist eine C^1 -Kurve, o.E. in BLP $s \mapsto c(s)$, deren Tangenten mit einer festen Richtung E (mit $|E| = 1$) einen festen Winkel γ einschließen. Es ist also für alle s $\langle T(s), E \rangle = \cos \gamma = \text{const}$ mit dem sogenannten **Böschungswinkel** $\gamma \in [0, \pi]$

Beispiel. 1. Ebene Kurven.

2. Gewöhnliche Schraubenlinie $t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ h \cdot t \end{pmatrix}$. Es ist für alle t $\langle T(t), e_3 \rangle = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} = \text{const}$.

Bemerkung. 1. Durch $\langle T, E \rangle = \cos \gamma$ wird nur der nichtorientierte Winkel $\gamma \in [0, \pi]$ zwischen T und E festgelegt.

2. Bei einer Frenet-Böschungslinie folgt aus $\langle T, E \rangle = \text{const}$ sofort $\kappa \langle H, E \rangle = 0$, so dass E in der rektifizierenden Ebene $c + \langle T, B \rangle$ liegt. Der Böschungswinkel γ kann dann eindeutig so orientiert werden, dass

$$E = \cos \gamma T + \sin \gamma B \quad (\text{Drehformel}) \quad (2.1)$$

mit $-\pi < \gamma \leq \pi$. Durch Übergang $E \rightarrow -E$ bei Bedarf kann erreicht werden, dass $\sin \gamma = \langle E, B \rangle \geq 0$, also $0 \leq \gamma \leq \pi$. Leitet man (2.1) noch einmal ab, so folgt $0 = (\kappa \cos \gamma - \tau \sin \gamma)H$, also $\sin \gamma \neq 0$ (denn sonst ist auch $\kappa = 0$) so dass nur $0 < \gamma < \pi$ möglich ist.

Satz 2.10. *Für eine Frenet-Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ sind äquivalent*

1. Die Kurve ist Böschungslinie.
2. Die **konische Krümmung** $\tau/\kappa = \rho \cdot \tau$ ist konstant.
3. Der **Darbouxvektor** $D = (\tau T + \kappa B)/\omega$ ist konstant (und o.E. gleich der festen Richtung).

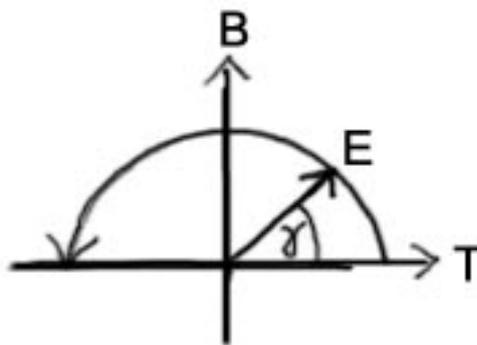


Abbildung 2.1: Böschungswinkel

4. Der Winkel zwischen Tangenten- und Darboux-Richtung ist konstant: $\langle T, D \rangle = \text{const}$ (und o.E. gleich dem Böschungswinkel).

Beweis. 1. \Rightarrow (b): Nach Bemerkung 2 ist $\kappa \cos \gamma - \tau \sin \gamma = 0$, also $\tau/\kappa = \cot \gamma = \text{const}$.

2. \Rightarrow (c):

$$\begin{aligned} \lambda &:= \frac{\tau}{\kappa} = \text{const} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\omega} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \text{const} \\ \frac{\kappa}{\omega} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \text{const} \end{array} \right\} \\ \Rightarrow D' &= \left(\frac{\tau}{\omega} T + \frac{\kappa}{\omega} B \right)' = \left(\frac{\tau}{\omega} \kappa - \frac{\kappa}{\omega} \tau \right) H = 0 \\ \Rightarrow D &= \text{const} \end{aligned}$$

3. \Rightarrow (d):

$$\begin{aligned} D = \frac{\tau}{\omega} T + \frac{\kappa}{\omega} B = \text{const} &\Rightarrow \langle T, D \rangle' = \kappa \langle H, D \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle T, D \rangle &= \text{const} \end{aligned}$$

4. \Rightarrow (a):

$$\begin{aligned} \langle T, D \rangle = \frac{\tau}{\omega} = \text{const} &\Rightarrow \dots \frac{\tau}{\omega}, \frac{\kappa}{\omega} \text{ beide konstant} \\ \Rightarrow D' = 0 &\Rightarrow D = \text{const} \end{aligned}$$

Die Kurve ist also Böschungslinie mit fester Richtung $E := D$ und den durch $\cos \gamma = \frac{\tau}{\omega}$, $\sin \gamma = \frac{\kappa}{\omega}$ bestimmten orientierten Böschungswinkel.

□

Sphärische Kurven

Satz 2.11. 1. Eine WP-freie C^3 -Kurve in BLP $s \mapsto c(s)$ ist genau dann **sphärisch**, wenn eine C^1 -Funktion $s \mapsto a(s)$ existiert mit

$$\varrho' = a \cdot \tau \qquad a' = -\varrho\tau$$

Für MP m und Radius r der Kugel gilt dann

$$m = c + \varrho H + aB \qquad r = \sqrt{\varrho^2 + a^2}$$

2. Äquivalent dazu ist: Es existiert eine C^1 -Funktion $s \mapsto \lambda(s)$ mit $|\lambda| < \pi/2$ und eine Zahl $r > 0$ mit

$$\varrho = r \cos \lambda$$

Beweis. 1. „ \Rightarrow “

$$\forall_s |c(s) - m|^2 = r^2 \Rightarrow \forall_s \langle c(s) - m, T(s) \rangle = 0$$

also $c = m - bH - aB$ mit C^1 -Funktionen a und b . Wegen

$$T = -b'H - b(-\kappa T + \tau B) - a'B + a\tau H$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$1 = b \cdot \kappa, \quad b' = a\tau, \quad a' = -b\tau$$

„ \Leftarrow “ Aus $\varrho' = a\tau, a' = -\varrho\tau$ folgt für $m = c + \varrho H + aB$ nach kurzer Rechnung, dass $m' = 0$, also $m = \text{const}$, und für $r^2 := |c - m|^2 = \sqrt{\varrho^2 + a^2}^2 = \varrho^2 + a^2$ gilt

$$(r^2)' = 2\varrho\varrho' + 2aa' = 2\varrho a\tau - 2a\varrho\tau = 0$$

□

Bemerkung. 1. Henkelpunktfreie sphärische C^4 -Kurven sind durch $(\varrho'/\tau)' + \varrho\tau = 0$ gekennzeichnet.

2. Äquivalent dazu ist, wenn zusätzlich $\forall_s \varrho'(s) \neq 0$ gilt, die Bedingung

$$\left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)^2 + \varrho^2 = \text{const}(= r^2)$$

Die Kugel, auf der die Kurve ferläuft, ist ihre **Schmiegekugel**.

3 Kurven im euklidischen \mathbb{R}^n ($n \geq 2$)

Hier ist Frenet-Theorie möglich mit C^n -Kurven, o.E. in BLP $s \mapsto c(s)$, deren Schmieghyperebenen

$$S_{n-1} = c + \langle c_1, \dots, c_{n-1} \rangle \quad (\text{mit } c_p := \frac{d^p c}{ds^p})$$

nirgends degenerieren, also überall (c_1, \dots, c_{n-1}) linear unabhängig sind.

Begleitbasis: Anwendung des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Basis (c_1, \dots, c_{n-1}) der Schmieghyperebene liefert eine ON-Basis (T_1, \dots, T_{n-1}) , die durch $T_n := T_1 \times \dots \times T_{n-1}$ zu einer positiv orthonormalen Begleitbasis der Kurve ergänzt werden kann.

Ableitungsgleichungen Aus $\langle T_i, T_k \rangle = \delta_{ik}$ folgt $\langle T'_i, T_k \rangle = -\langle T_i, T'_k \rangle$ und damit die Schiefsymmetrie der Ableitungsmatrix $(\langle T'_i, T_k \rangle)_{i,k=1,\dots,n}$.

Wegen $T_p \in \langle c_1, \dots, c_p \rangle$ ist $T'_p \in \langle c_1, \dots, c_{p+1} \rangle = \langle T_1, \dots, T_{p+1} \rangle$ folgt weiter: Für alle $q > p + 1$ gilt $\langle T'_p, T_q \rangle = 0$. Zusammen erhalten wir:

Satz 3.1. Sei $s \in I \mapsto c(s) \in \mathbb{R}^n$ BLP einer C^n -Kurve mit $\forall_s (c_1, \dots, c_{n-1})(s)$ linear unabhängig. Dann genügt die durch

$$\begin{aligned} T_1 &= c' \\ \forall_{p=1}^{n-2} T_{p+1} &= \frac{c_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle c_{p+1}, T_k \rangle T_k}{|\dots\dots\dots|} \\ &= \frac{[c_{p+1}]_{\perp}}{|[c_{p+1}]_{\perp}|} \\ T_n &= T_1 \times \dots \times T_{n-1} \end{aligned}$$

rekursiv definierte Frenet-Begleitbasis $s \mapsto (T_1, \dots, T_n)(s)$ den Ableitungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \tau \\ 0 & \dots & \dots & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$$

mit den $n - 2$ **Krümmungen**

$$s \mapsto \kappa_p(s) = \langle T'_p, T_{p+1} \rangle(s) \quad p = 1, \dots, n - 2$$

und der **Torsion**

$$s \mapsto \tau(s) = \langle T'_{n-1}, T_n \rangle(s)$$

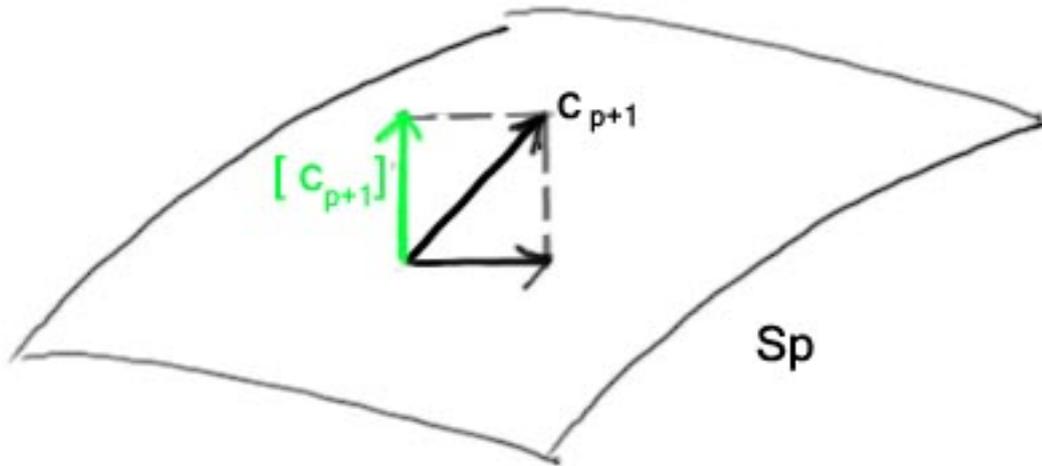


Abbildung 3.1: Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens

Bemerkung. Es gilt

$$\kappa_p = |[T'_p]_\perp| = \left| T'_p - \sum_{k=1}^p \langle T'_p, T_k \rangle T_k \right| > 0$$

Beweis. 1. Es ist $T_p = 2 \cdot (c_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k c_k) = \lambda [c_p]_\perp$ mit $\lambda = 1/|[c_p]_\perp| > 0$, also $T'_p = \lambda c_{p+1} + \sum_{k=1}^p \tilde{\lambda}_k c_k \Rightarrow [T'_p]_\perp = \lambda [c_{p+1}]_\perp$. Ebenso ist $T_{p+1} = \mu [c_{p+1}]_\perp$ mit $\mu = 1/|[c_{p+1}]_\perp| > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \kappa_p &= \langle T'_p, T_{p+1} \rangle = \langle [T'_p]_\perp, T_{p+1} \rangle = \lambda \cdot \mu |[c_{p+1}]_\perp|^2 \\ &= \frac{|[c_{p+1}]_\perp|}{|[c_p]_\perp|} \end{aligned}$$

2.

$$\tau = \langle T_n, T'_{n-1} \rangle = \langle T_1 \times \cdots \times T_{n-1}, T'_{n-1} \rangle = \det(T_1, \dots, T_{n-1}, T'_{n-1})$$

□

Folgerungen: Bezüglich einer beliebigen Parametrisierung einer Kurve im \mathbb{R}^n gilt mit $c_\varrho := \frac{d^\varrho c}{dt^\varrho}$, ($\varrho = 1, \dots, n$) für die Begleitbasis

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \\ \forall_{\varrho=1}^{n-2} T_{\varrho+1} &= \frac{c_{\varrho+1} - \sum_{k=1}^{\varrho} \langle c_{\varrho+1}, T_k \rangle T_k}{\sqrt{\dots}} = \frac{[c_{\varrho+1}]_\perp}{|[c_{\varrho+1}]_\perp|} \end{aligned}$$

sowie mit

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_\varrho &= a_\varrho(c_1, \dots, c_\varrho) = \sqrt{\det(\langle c_i, c_k \rangle)_{i,k=1, \dots, \varrho}} > 0 \quad (\varrho = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

3 Kurven im euklidischen \mathbb{R}^n ($n \geq 2$)

(ϱ -dimensionaler Flächeninhalt des von c_1, \dots, c_ϱ aufgespannten ϱ -dimensionalen Parallelogramms)

$$V_n = \det(c_1, \dots, c_n)$$

(n -dimensional orientiertes Volumen des von c_1, \dots, c_n aufgespannten Parallelotops)

$$\begin{aligned} \forall_{\varrho=1}^{n-2} \quad \kappa_\varrho &= \frac{1}{|\dot{c}|} \cdot \frac{A_{\varrho+1}}{A_\varrho} / \frac{A_\varrho}{A_{\varrho-1}} > 0 \\ \tau &= \frac{1}{|\dot{c}|} \cdot \frac{V_n}{A_{n-1}} / \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} \end{aligned}$$

Insbesondere gelten folgende Spezialfälle:

$n = 2$:

$$\begin{aligned} \tau = \kappa &= \frac{1}{|\dot{c}|} \cdot \frac{V_2}{A_1} / \frac{A_1}{A_0} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{|\dot{c}|^3} \\ [A_0 &= 1; A_1 = |\dot{c}|, V_2 = \det(\dot{c}, \ddot{c})] \end{aligned}$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{|\dot{c}|} \cdot \frac{A_2}{A_1} / \frac{A_1}{A_0} = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \\ [A_2 &= a_p(\dot{c}, \ddot{c}) = |\dot{c} \times \ddot{c}|] \\ \tau &= \frac{1}{|\dot{c}|} \cdot \frac{V_3}{A_2} / \frac{A_2}{A_1} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2} \end{aligned}$$

Beweisskizze:

1. Darstellung von T_1, \dots, T_n Wahr, da das Schmidtsche ON-Verfahren von der der Basiswahl unabhängig ist, solange nur $\langle c_1, \dots, c_\varrho \rangle = \langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\varrho \rangle$.
2. Wegen $\dot{T}_\varrho = T'_\varrho \cdot \dot{s} = T'_\varrho \cdot |\dot{c}|$ folgt

$$\kappa_\varrho = |[T'_\varrho]_\perp| = \frac{1}{|\dot{c}|} \cdot |[\dot{T}_\varrho]_\perp| = \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{|[c_{\varrho+1}]_\perp|}{|[c_\varrho]_\perp|}$$

Weiter gilt nach der Formel „Volumen = Grundfläche · Höhe“

$$a_{\varrho+1}(c_1, \dots, c_{\varrho+1}) = a_\varrho(c_1, \dots, c_\varrho) \cdot |[c_{\varrho+1}]_\perp|$$

Analog für die Torsion.

4 Lokale Flächentheorie im euklidischen Raum

4.1 Grundbegriffe der Flächentheorie

p -Flächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n

Sei $1 < p < n$ festgewählt (in Anwendungen meist $p = 2$, $n = 3$).

Definition. Eine **parametrisierte C^r - p -Fläche** im affinen \mathbb{R}^n ($r \geq 0$) ist eine C^r -Abbildung

$$x : G \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u = (u^1, \dots, u^p) \mapsto x(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u))^T$$

mit **Parametern** u^1, \dots, u^p und **Parameterlinien**

$$u^\varrho \mapsto x(u_0^1, \dots, u_0^\varrho, \dots, u_0^p) \quad (\varrho = 1, \dots, p)$$

Die **Spur** ist $M = x[G] \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Fläche heißt **regulär**, wenn die partiellen Ableitungen $x_\varrho := \partial_\varrho x$ (die Tangentenvektoren an die Parameterlinien) überall linear unabhängig sind. Solche Punkte, an denen dies nicht der Fall ist, heißen **Singularitäten**.

Bemerkung. 1. Regularität bedeutet: die partiellen Ableitungen x_ϱ ($\varrho = 1, \dots, p$) spannen überall einen p -dimensionalen **Tangentialraum** auf, es gibt also keine Grate oder schlimmeres.

2. Reguläre parametrisierte p -Flächen sind **lokal injektiv**. Die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix)

$$Dx = \begin{pmatrix} \partial(x^1, \dots, x^n) \\ \partial(u^1, \dots, u^p) \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_p)$$

besitzt überall den Höchstgrad p . Die Aussage folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Bei lokalen Untersuchungen kann man also stets annehmen, dass $x : G \mapsto M := x[G]$ bijektiv ist, also keine Selbstdurchdringungen auftreten.

Definition. Zwei C^r - p -Flächen $x : u \in G \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{x} : \tilde{u} \in \tilde{G} \mapsto \tilde{x}(\tilde{u}) \in \mathbb{R}^n$ heißen **C^r -äquivalent**, wenn ein orientierungstreuer C^r -Diffeomorphismus $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$ existiert mit $x = \tilde{x} \circ \phi$, d.h. $\forall_{u \in G} x(u) = \tilde{x}(\phi(u))$.

Bemerkung. 1. Für $r \geq 1$ bestimmt die Funktionalmatrix $D\phi = \left(\frac{\partial \tilde{u}^\sigma}{\partial u^\rho} \right)_{\rho, \sigma} = 1, \dots, p$ den Übergang zwischen den Tangentialvektoren x_1, \dots, x_p und $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p$ bzgl. verschiedener Parametrisierungen

$$\begin{aligned} x_\rho(u) &= \sum_{\sigma=1}^p \tilde{x}_\sigma(\phi(u)) \frac{\partial \tilde{u}^\sigma}{\partial u^\rho}(u) \\ &= \sum_{\sigma=1}^p \tilde{u}_\rho^\sigma(u) \tilde{x}_\sigma(\phi(u)) \end{aligned}$$

Dies ist die **Basistransformationsformel** im Tangentialraum.

2. ϕ ist (für $r \geq 1$) orientierungstreu genau dann, wenn $\det D\phi = \det(\tilde{u}_\rho^\sigma) > 0$.

3. Äquivalente p -Flächen besitzen wegen $\det D\phi \neq 0$ das gleiche Regularitätsverhalten.

Definition. Eine (orientierte, reguläre) C^r - p -**Fläche** im affinen IR^n ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten C^r -Flächen $x : G \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ein Repräsentant x heißt eine **zulässige Parameterdarstellung** der C^r - p -Fläche, die zugehörige Transformationsabbildung ϕ heißt **Parametertransformationsfunktion**.

Bemerkung. Eine **Hyperfläche** ($(n-1)$ -Fläche) ist genau dann regulär, wenn $\forall_n x_1 \times \dots \times x_{n-1}(u) \neq 0$ ist, d.h. wenn überall der **Normaleneinheitsvektor** $N := (x_1 \times \dots \times x_{n-1}) / |x_1 \times \dots \times x_{n-1}|$ existiert.

Beispiel. Die Abbildung $(u, v) \in]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\mapsto x(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$ ist

wegen $|x_1 \times x_2|(u, v) = \dots = \cos v > 0$ eine reguläre Parametrisierung der 2-Sphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die aber einen Meridian (samt Polen) auslässt. Es gibt keine globalen und injektiven Parametrisierungen der Kugelfläche (aus topologischen Gründen). Die „ganze Fläche“ wird als „Mannigfaltigkeit“ in der Differentialtopologie betrachtet.

Bemerkung. In der Flächentheorie gibt es keine ausgezeichnete Parametrisierung ähnlich der BLP in der Kurventheorie. Deshalb muss versucht werden, Definitionen möglichst parameterunabhängig anzugeben. Eine Größe $u \mapsto c(u)$, bezüglich einer festen Parametrisierung $u \mapsto x(u)$ berechnet, ist parameterunabhängig, wenn bei einer Transformation $x = \tilde{x} \circ \phi$, d.h. $x(u) = \tilde{x}(\phi(u)) = \tilde{x}(\tilde{u})$ für diese ebenfalls gilt $c = \tilde{c} \circ \phi$, d.h. $c(u) = \tilde{c}(\phi(u)) = \tilde{c}(\tilde{u})$, wenn $\tilde{u} \mapsto \tilde{c}(\tilde{u})$ die bezüglich der Parameter $\tilde{u} \mapsto \tilde{x}(\tilde{u})$ berechnete Größe ist.

Beispiel. Die Tangentialräume (bei $p = 2$ Tangentialebenen)

$$T_u x := \langle x_1(u), \dots, x_p(u) \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

einer C^1 - p -Fläche sind parameterunabhängig: (es gilt $T_u x = T_{\tilde{u}} \tilde{x} = \langle \tilde{x}_1(\tilde{u}), \dots, \tilde{x}_p(\tilde{u}) \rangle$), nicht aber die Basisvektoren x_ρ bzw. \tilde{x}_σ . Die Tangentialvektoren $X \in T_u x = T_{\tilde{u}} \tilde{x}$ (invariant) besitzendann verschiedene Basisdarstellungen

$$X = \sum_{\rho} X^\rho x_\rho(u) = \sum_{\sigma} \tilde{X}^\sigma \tilde{x}_\sigma(\tilde{u})$$

und aus der Basistransformationsformel $x_\rho = \sum_\sigma \tilde{u}_\rho^\sigma \tilde{x}_\sigma$ folgt die (kontragradiente) Koordinatentransformation

$$\tilde{X}^\sigma = \sum_\rho \tilde{u}_\rho^\sigma X^\rho$$

Rechnet man „in Koordinaten“, müssen diese auf das „richtige“ Transformationsverhalten hin überprüft werden (\rightarrow „Tensorkalkül“). Am besten verwendet man nur parameterunabhängige Größen und operiert etwa abstrakt mit Vektoren X , ohne zu parameterabhängigen Koordinaten überzugehen (\rightarrow „invarianter Kalkül“).

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwendet man im Tensorkalkül oft (wir nicht immer, aber immer öfter), die **Einsteinsche Summationskonvention**: In einem Term wird über Indizes, die einmal oben, einmal unten vorkommen, generell summiert.

Beispiel.

$$\sum_\rho X^\rho x_\rho \qquad \sum_\mu a^{\rho\mu} b_{\mu\sigma} = c^\rho_\sigma \qquad \sum_\rho b^\rho_\rho \text{ (Spur)}$$

$$\sum_{\rho,\sigma} X^\rho \gamma^\mu_{\rho\sigma} Y^\sigma \qquad \sum_\rho X^\rho \frac{\partial \tilde{u}^\sigma}{\partial u^\rho} = \sum_\rho X^\rho \partial_\rho \tilde{u}^\sigma$$

aber $X^\rho Y^\rho \neq \sum_\rho X^\rho Y^\rho$.

Die euklidische Struktur des \mathbb{R}^n induziert in den p -dimensionalen Punkttraum punktale Skalarprodukte.

Satz 4.1. In jedem Punkt $x(u)$ einer C^1 - p -Fläche im euklidischen \mathbb{R}^n wird durch

$$I_u : T_u x \times T_u x \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto I_u(X, Y) := \langle X, Y \rangle$$

ein (von der Parametrisierung unabhängiges) Skalarprodukt definiert. Das Feld $u \mapsto I_u$ dieser (punktalen) Bilinearformen heißt **1. Grundform** (1. Fundamentalform, **Maßtensor**) der p -Fläche. Die (parameterabhängige) Koordinatenfunktion $u \mapsto g_{\rho\sigma}(u) := I_u(x_\rho(u), x_\sigma(u)) = \langle x_\rho(u), x_\sigma(u) \rangle$ bilden überall eine symmetrische, positiv definite Matrix ($g_{\rho\sigma}(u)$) mit Determinante $g(u) := \det(g_{\rho\sigma}(u)) = a_\rho^2(x_1, \dots, x_p)(u) > 0$ und für Tangentialvektoren $X = \sum X^\rho x_\rho(u)$, $Y = \sum Y^\sigma x_\sigma(u)$ gilt dann $I_u(X, Y) = \sum g_{\rho\sigma}(u) X^\rho Y^\sigma$.

Beweis. In ist die Einschränkung des Skalarprodukts des \mathbb{R}^n auf den UR $T_u x \times \subseteq \mathbb{R}^n$ und ($g_{\rho\sigma}$). □

Mit Hilfe der 1. Grundform lassen sich bei tangentialen Objekten flächenintern berechnen berechnen

- die Länge eines Tangentialvektors $X = \sum X^\rho x_\rho(u) \in T_u x$: $|X| = \sqrt{\sum g_{\rho\sigma} X^\rho X^\sigma}$ (analog der Winkel)
- p -dimensionaler Flächeninhalt eines von Tangentialvektoren $X_1, \dots, X_p \in T_u x$ aufgespannten p -Parallelogramms $a_p(X_1, \dots, X_p) = \sqrt{\det(\langle X_\rho, X_\sigma \rangle)} = \sqrt{g(u)} |\det(X_\beta^\alpha)|$ (denn $X_\rho = \sum X_\rho^\mu x_\mu \Rightarrow \langle X_\rho, X_\sigma \rangle = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(u) X_\rho^\mu X_\sigma^\nu$ also $\det \langle X_\rho, X_\sigma \rangle = \det(g_{\mu\nu}(u)) (\det(X_\rho^\mu))^2$).

Die explizite Kenntnis der räumlichen Basisvektoren $x_\rho \in \mathbb{R}^n$ ist jeweils unnötig!

Gerichtete Objekte innerhalb der Fläche

- die Länge eines Kurvenstücks

$$t \in [a, b] \xrightarrow{u} u(t) \in G \xrightarrow{x} c(t) = x(u(t)) \in M \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{g_{\rho\sigma}(u(t))}$$

- der p -dimensionale Flächeninhalt eines Bereichs:

$$\begin{aligned} A_p(x[K]) &= \int_K a_p(x_1(u), \dots, x_p(u)) du^1 \cdots du^p \\ &= \int_K \sqrt{g(u)} du^1 \cdots du^p \end{aligned}$$

(Länge und Flächeninhalt sind parameterunabhängig, dem Transformationssatz für Einfach- und Mehrfachintegrale.)

Man braucht nur die Kurve bzw. den Bereich in der Parameterebene (p -dimensional) zu kennen!

1. Grundform

$$I(X, Y) : (X, Y)$$

Darstellungsmatrix:

$$g_{\rho\sigma} := \langle x_\rho, x_\sigma \rangle$$

Früher übliche Bezeichnung für $p=2$:

$$g_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Man kann mit ihr **flächenartig Messen**

(Umgekehrt lässt sich durch solche Messungen die Metrik selbst bestimmen)

Die Beispiele zeigen:

Lassen sich zwei (im Raum eventuell völlig verschiedene) Flächen M, \widetilde{M} so auf gleiche Parameter beziehen, dass sie die gleiche **1-Grundform-Matrix** besitzen, erhält man gleiche Ergebnisse bei **Längen-, Winkel- und Flächenmessungen**. Durch solche Messungen kann man nicht entscheiden, ob man sich auf der Fläche M oder \widetilde{M} befindet.

Definition 4.2. 1. Zwei C^1 -Flächen heißen **isometrisch**, wenn Parametrisierungen

$$\begin{aligned} u \in G &\mapsto x(u) \in M \\ u \in G &\mapsto \bar{x}(u) \in \widetilde{M} \end{aligned}$$

existiert mit

$$\forall_u (g_{\rho\sigma}(u)) = (\bar{g}_{\rho\sigma}(u))$$

2. Zwei isometrische C^1 - p -Flächen $x : g \rightarrow M, \bar{x} : g \rightarrow \widetilde{M}$ heißen ineinander **verbiegbar (abwickelbar)**, wenn eine stetige Schar isometrischer Flächen mit Darstellung

$$\alpha \in [a, b] \mapsto ({}^\alpha x : G \mapsto M_\alpha)$$

existiert, sodass ${}^a x = x, {}^b x = \bar{x}$

Bemerkung. 1. Flächengrößen, die sich allein aus der 1.Grundform bestimmen lassen, also für alle isometrischen Flächen dieselben sind, heißen **innengeometrische Größen**

2. Isometrische Flächen brauchen nicht ineinander verbiegbar zu sein (es gibt allerdings nur komplizierte Gegenbeispiele)

Beispiel. 1. Der Kreiszyylinder

$$(u, v) \in]-\pi, +\pi[\times \mathbb{R} \mapsto (u, v) = \begin{pmatrix} hv \\ r \cdot \sin u \\ r(1 - \cos u) \end{pmatrix}$$

ist die Ebene verbiegbar:

Eine stetige **Verbiegungsschar** ist:

$${}^\alpha x(u, v) = \begin{pmatrix} h \cdot v \\ r \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha u) \\ r \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(\alpha u)) \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in]0, 1]$$

$${}^0 x(u, v) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} {}^\alpha x(u, v) = \begin{pmatrix} h \cdot v \\ r \cdot u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ebenenstück})$$

Stimmt die Metrik?

1. Ableitung \rightarrow Gram'sche Matrix

$${}^\alpha x_u(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos \alpha u \\ r \sin \alpha u \end{pmatrix}$$

$${}^\alpha x_v(u, v) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ({}^\alpha g_{\rho\sigma}(u, v)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in [0, 1]$

2. Die **Tangentialfläche** $(s, v) \in I \times \mathbb{R} \mapsto x(s, v) = c(s) + vT(s) \in \mathbb{R}^3$ einer beliebigen WP-freien Raumkurve $s \in I \mapsto c(s) \in \mathbb{R}^3$ ist in die Ebene verbiegbar: Es gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(s, v) = T(s) + v\kappa(s)H(s) \\ x_2(s, v) = T(s) \end{array} \right\} \Rightarrow (g_{\rho\sigma}(s, v)) = \begin{pmatrix} 1 + v^2\kappa^2(s) & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Torsion τ der Kurve taucht nicht auf. Nach dem Fundamentalsatz der Kurventheorie kann man eine von einem Parameter $\alpha \in [0, 1]$ **stetig** abhängende Kurvenschar $\alpha \mapsto {}^\alpha c$ konstruieren durch Vorgabe von $s \mapsto {}^\alpha \kappa(s) := \kappa(s)$ und $s \mapsto {}^\alpha \tau(s) := \alpha \cdot \tau(s)$ sowie Anfangsbedingungen wie bei der Ausgangskurve. Die zugehörigen Tangentialflächen $(s, v) \mapsto {}^\alpha x(s, v) = {}^\alpha c(s) + vT(s)$ bilden eine stetige Verbiegungsschar zwischen einem Ebenenstück (der Tangentialfläche einer ebenen Kurve für $\alpha = 0$) und der Ausgangsfläche ($\alpha = 1$).

Bemerkung. Wir werden später zeigen, dass die allgemeinen Zylinder, allgemeinen Kegel und die Tangentenflächen von Raumkurven (zusammen als **Torsen** bezeichnet) im wesentlichen die einzigen Flächen sind, die in die Ebene verbiegbar sind.

4.2 Hyperflächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n : Gaußabbildung, Ableitungsgleichungen

Im folgenden sei $p = n - 1$.

Satz 4.3. Ist $u \in G \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer C^1 -Hyperfläche, so bilden

- die tangentialen Vektorfelder x_1, \dots, x_{n-1}
- der Normalen(einheits)vektor $N = (x_1 \times \dots \times x_{n-1}) / |x_1 \times \dots \times x_{n-1}|$

eine parameterabhängige positiv orientierte Begleitbasis mit den Eigenschaften

$$\forall_\varrho \quad \langle x_\varrho, N \rangle = 0, \quad |N| = 1, \quad \det(x_1, \dots, x_{n-1}, N) = |x_1 \times \dots \times x_{n-1}| = \sqrt{g} > 0$$

Das Vektorfeld $N : G \rightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist invariant gegenüber (zulässigen) Parametertransformationen und heißt **sphärisches Bild**, **Normalenabbildung** oder **Gaußabbildung** der Hyperfläche.

Bemerkung. In jedem Punkt $x(u)$ existiert eine eindeutige parameterunabhängige orthogonale Zerlegung $\mathbb{R}^n = T_u \times \bigoplus \langle N(u) \rangle$ in Tangentialraum und (1-dimensionaler) Normalraum.

Satz 4.4. Für die Begleitbasis $u \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, N)$ einer parametrisierten C^2 -Hyperfläche gelten parameterabhängige Ableitungsgleichungen der Form

$$\forall_{\varrho, \sigma} \quad x_{\varrho\sigma} := \partial_\sigma x_\varrho = \sum_\mu \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma x_\mu + b_{\varrho\sigma} \cdot N$$

genannt **Gaußsche Ableitungsgleichungen** und

$$\forall_\sigma \quad N_\sigma := - \sum_\mu b^\mu{}_\sigma x_\mu (+0 \cdot N)$$

genannt **Weingartensche Ableitungsgleichungen**. Dabei berechnen sich

1. mit den **Christoffelsymbolen** 1. Art $\gamma_{\varrho\nu\sigma} = \langle x_{\varrho\sigma}, x_\nu \rangle = \sum_\mu \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu}$. die Christoffelsymbole 2. Art $\gamma_\varrho^\mu{}_\sigma = \sum_\nu g^{\mu\nu} \gamma_{\varrho\nu\sigma}$ wenn $(g^{\mu\nu})$ die zu $(g_{\varrho\sigma})$ inverse Matrix bezeichnet (also $\sum_\nu g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma$).
2. die übrigen Koeffizienten durch

$$b_{\varrho\sigma} = \langle x_{\varrho\sigma}, N \rangle = - \langle x_\varrho, N_\sigma \rangle = + \sum_\mu b^\mu{}_\sigma g_{\mu\varrho}$$

4.2 Hyperflächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n : Gaußabbildung, Ableitungsgleichungen

Bemerkung. 1. Mit den Matrizen $(g_{\varrho\sigma})$, bzw. $(g^{\varrho\sigma}) = (g_{\varrho\sigma})^{-1}$ lassen sich im Tensorkalkül Inzies „nach unten bzw. nach oben ziehen“.

2. $(\gamma_{\varrho\nu\sigma}), (\gamma_{\varrho}^{\mu\sigma}), (b_{\varrho\sigma})$ sind in den Indexpaaren (ϱ, σ) **symmetrisch**. $(b^{\mu}_{\sigma}) = (g^{\mu\nu}) \cdot (b_{\varrho\sigma})$ ist i.a. nicht symmetrisch, obwohl Produkt symmetrischer Matrizen.

3. Bei $p = 2$ denke man an $N = \frac{1}{\sqrt{g}}x_1 \times x_2$

Man könnte sich folgende Fragen stellen:

1. Welche geometrische bzw. algebraische Bedeutung haben die Koeffizienten?
2. Wie ändern sie sich bei einer Parametertransformation?
3. Kann man die Ableitungsgleichungen parameterunabhängig formulieren?

Statt die parameterabhängigen Vektorfelder x_{ϱ} (bzw. N) zu verwenden, leiten wir in Richtung von Parameterlinien ab (nach u^{σ}). Wir berechnen die Ableitung eines beliebigen (tangentialen oder normalen) Vektorfeldes $u \mapsto \xi(u)$ in Richtung eines beliebigen Tangentialvektorfeldes $u \mapsto Y(u)$. Diese Richtungsableitung $d_Y \xi = \sum (\partial_{\sigma} \xi) \cdot Y^{\sigma}$ (mit $Y = \sum Y^{\sigma} x_{\sigma}$) ist parameterunabhängig. Aus $x = \tilde{x} \circ \phi$, $\xi = \tilde{\xi} \circ \phi$, $Y = \tilde{y} \circ \phi$ folgt

$$\begin{aligned} d_Y \xi(u) &= \sum_{\sigma} \partial_{\sigma} (\tilde{\xi}(\phi(u))) Y^{\sigma}(u) = \sum_{\mu, \sigma} \partial_{\mu} \tilde{\xi}(\phi(u)) \underbrace{\tilde{y}_{\sigma}^{\mu}(u) Y^{\sigma}(u)}_{=\tilde{y}^{\mu}(\phi(u))} \\ &= \sum_{\mu} \partial_{\mu} \tilde{x}(\phi(u)) \tilde{Y}^{\mu}(\phi(u)) \\ &= d_{\tilde{Y}} \tilde{\xi}(\phi(u)) \end{aligned}$$

Interpretation der Richtungsableitung (oder eigentlich Definition): Sei $t \mapsto c(t) = x(u(t))$ eine C^1 -Flächenkurve mit $c(0) = x(\dot{u})$, also $u(0) = \dot{u}$, $\dot{c}(0) = Y$, also $Y^{\mu} = \dot{u}^{\mu}(0)$. dann gilt für das Vektorfeld $t \mapsto \xi(u(t))$ längs der Kurve

$$\frac{d}{dt} [\xi(u(t))]_{t=0} = \sum_{\sigma} \partial_{\sigma} \xi(u(t)) \dot{u}^{\sigma}(t) \Big|_{t=0} = \sum_{\sigma} \partial_{\sigma} \xi(\dot{u}) Y^{\sigma} = d_Y \xi(\dot{u})$$

Eigenschaften des linearen Differentialoperators

$$d : (\xi, Y) \mapsto d_Y \xi$$

der einem C^1 -Vektorfeld ξ und einem tangentialen Vektorfeld Y das Vektorfeld $d_Y \xi$ zuordnet:

1. Additivität in ξ : $d_Y(\xi_1 + \xi_2) = d_Y \xi_1 + d_Y \xi_2$
2. Derivativität in ξ : $d_Y(f \cdot \xi) = (d_Y f) \xi + f(d_Y \xi)$ für jede C^1 -Funktion f .
3. Linearität in Y : $d_{(f_1 Y_1 + f_2 Y_2)} \xi = f_1 d_{Y_1} \xi + f_2 d_{Y_2} \xi$ für alle Funktionen f_1, f_2 .

Da auch die Zerlegung von $u \mapsto d_Y \xi$ in Tangential- und Normalanteil parameterunabhängig ist, erhält man folgende invariante Darstellung:

4 Lokale Flächentheorie im euklidischen Raum

1.

$$\begin{aligned}
 d_Y X &= \sum \partial_\sigma (\sum X^\rho x_\rho) Y^\sigma = \sum [(\partial_\sigma X^\mu) Y^\sigma x_\mu + X^\rho x_{\rho\sigma} Y^\sigma] \\
 &= \underbrace{\sum (\partial_\sigma X^\mu + X^\rho \gamma_{\rho\sigma}^\mu)}_{=d_Y X|_T =: \nabla_Y X} \cdot Y^\sigma \cdot x_\mu + \underbrace{\left(\sum b_{\rho\sigma} X^\rho Y^\sigma \right)}_{= \langle d_Y X, N \rangle = - \langle X, d_Y N \rangle =: II(X, Y)} \cdot N \\
 &= \nabla_Y X + II(X, Y) \cdot N
 \end{aligned}$$

2. Für $\xi := N$ ist

$$\begin{aligned}
 d_Y N &= \sum_\sigma (\partial_\sigma N) Y^\sigma = - \sum b^\mu_\sigma Y^\sigma x_\mu (+0 \cdot N) \\
 &= -A(Y)
 \end{aligned}$$

Satz 4.5. Auf einer C^2 -Hyperfläche in Parameterdarstellung $u \mapsto x(u)$ erfüllen die Tangential- C^1 -Felder $u \mapsto X(u)$ und das C^1 -Normalenfeld $u \mapsto N(u)$ die (parameterunabhängige) Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 d_Y X &= \nabla_Y X + II(X, Y) \cdot N && \text{(Gaußsche Ableitungsgleichung)} \\
 D_Y N &= -A(Y) && \text{(Weingartensche Ableitungsgleichung)}
 \end{aligned}$$

in Richtung des tangentialen Vektorfeldes $u \mapsto Y(u)$. Dabei gilt

1. Durch $(X, Y) \mapsto \nabla_Y X := d_Y X|_T$ wird ein linearer Differentialoperator definiert, der je zwei tangentialvektorfeldern ein Tangentialvektorfeld zuordnet, genannt **kovariante Ableitung** von X in Richtung Y . (Man sagt auch, ∇ definiert einen inearen Zusammenhang [linear connection] für Tangentialvektoren).
2. Durch $(X, Y) \mapsto II(X, Y) = \langle d_Y X, N \rangle = - \langle X, d_Y N \rangle = -I(X, d_Y N)$ wird ein Feld symmetrischer Bilinearformen

$$II_u : T_u x \times T_u x \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto II_u(X, Y) = \sum b_{\rho\sigma} X^\rho Y^\sigma$$

definiert, genannt **2. Grundform (2. Fundamentalform)** der Hyperfläche.

3. Durch $Y \mapsto A(Y) := -d_Y N$ wird ein Feld linearer Abbildungen

$$A_u : T_u x \rightarrow T_u x, \quad Y \mapsto A_u(Y) = \sum b^\mu_\sigma Y^\sigma x_\mu$$

definiert, genannt **Weingartenendomorphismus (Shape-Operator)** der Hyperfläche.

Bemerkung (Interpretation von $\gamma_{\rho\sigma}^\mu, b_{\rho\sigma}, b^\mu_\sigma$). Bezüglich einer festen Parametrisierung $u \mapsto x(u)$ einer Hyperfläche hat man die Basisdarstellungen ($X := x_\rho, Y := x_\sigma$)

$$\begin{aligned}
 \nabla_\sigma x_\rho &:= \nabla_{x_\sigma} x_\rho = \sum_\mu \gamma_{\rho\sigma}^\mu x_\mu \\
 II(x_\rho, x_\sigma) &= b_{\rho\sigma}, \quad A(x_\sigma) = \sum_\mu b^\mu_\sigma x_\mu
 \end{aligned}$$

4.2 Hyperflächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n : Gaußabbildung, Ableitungsgleichungen

Die Christoffelsymbole $\gamma_{\rho}^{\mu\sigma}$ sind also die Zusammenhangskoeffizienten des durch die kovarianten Ableitungsgleichungen definierten linearen Zusammenhangs, die symmetrische Matrix $(b_{\rho\sigma})$ ist die Darstellungsmatrix der 2. Form und die (i.a. nicht symmetrische) Matrix (b^{μ}_{σ}) die Darstellungsmatrix des Weingartenendomorphismus A , jeweils bezüglich der Basisfelder $u \mapsto x_1(u), \dots, x_{n-1}(u)$. Früher waren noch übliche Bezeichnung für $p = 2$:

$$(b_{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

$$d_Y X = \nabla_Y X + II(X, Y) \cdot N$$

$$d_Y N = -A(Y)$$

Grundlegende Eigenschaften von ∇, II, A (bzw. $\gamma_{\rho}^{\mu\sigma}$)

- (1) Die kovariante Ableitung ∇ bzw. ihre Koeffizienten $\gamma_{\rho}^{\mu\sigma}$ sind **innergeometrische Größen**

Satz 4.6. Die Christoffelsymbole 1. und 2. Art einer C^2 -Hyperfläche lassen sich allein aus den Komponenten der 1. Grundform bestimmen und zwar gilt

$$\gamma_{\rho\nu\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} g_{\rho\sigma} + \partial_{\sigma} g_{\nu\rho})$$

$$\gamma_{\rho}^{\mu\sigma} = \sum g^{\mu}_{\rho}{}^{\nu} \cdot \gamma_{\rho\nu\sigma}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} g_{\nu\rho} &= \partial_{\rho} \langle x_{\nu}, x_{\sigma} \rangle = \langle x_{\nu\rho}, x_{\sigma} \rangle + \langle x_{\nu}, x_{\sigma\rho} \rangle = \gamma_{\nu\sigma\rho} + \gamma_{\sigma\nu\rho} + \\ \partial_{\nu} g_{\rho\sigma} &= \dots \& = \dots = \gamma_{\nu\sigma\rho} + \gamma_{\sigma\rho\nu} - \\ \partial_{\sigma} g_{\rho\nu} &= \dots \& = \dots = \gamma_{\rho\nu\sigma} + \gamma_{\nu\rho\sigma} + \end{aligned}$$

und aus der Symmetrie folgt die Behauptung □

- (2) Die **Weingartenmatrizen** (b^{μ}_{σ}) bzgl. verschiedener Parametrisierungen sind **ähnlich** zueinander (als Darstellungsmatrizen des selben Endomorphismus A) (Parameterunabhängige) **Invarianten** sind also ihre elementarsymmetrischen Funktionen (=Koeffizienten des Charakteristischen Polynoms) insbesondere Spur und Determinante.

Definition 4.7. Bei einer C^2 Hyperfläche im \mathbb{R}^n heißt

$$H := \frac{1}{n-1} \text{Tr } A = \frac{1}{m-1} \sum_{\rho} b^{\rho}_{\rho}$$

die **Mittlere Krümmung** und

$$K := \det A = \det(b^{\mu}_{\sigma\rho})$$

die **Gauß'sche Krümmung** bzw die **Gauß-Kronecker-Krümmung**

Bemerkung. Aus $(b^{\mu}_{\sigma})_{\delta} = (g^{\mu\alpha}) \cdot (b_{\rho\sigma})$ folgt:

$$k = \frac{b}{g} = \frac{\det b_{\rho\sigma}}{\det g_{\rho\sigma}}$$

(3) Für tangentielle Vektorflächen X, Y folgt aus $\langle X, Y, \rangle = 0$

$$\begin{aligned} d_Y [\langle X, N \rangle] &= \langle d_Y X, N \rangle + \langle X, d_Y N \rangle \\ &= II(X, Y) - \langle X, A(Y) \rangle \\ &= II(X, Y) - I(X, A(Y)) = 0 \end{aligned}$$

(in Komposition : $b_{\rho, \sigma} = \sum_{\mu} g_{\rho\mu} b^{\mu}_{\sigma}$)

$\langle f(x), y \rangle \langle x, f(y) \rangle =$ Selbstdjungierter Endomorphismus, d.h. Reelle Eigenwerte
Der Weingartenhomomorphismus ist selbsadjungiert.

Die Symmetrie von II liefert:

Satz 4.8. Die Weingartenabbildung $A_u : T_u x \rightarrow T_u x$ einer C^2 -Hyperfläche im \mathbb{R}^n ist in jedem Punkt $x(u)$ **selbstdjungiert** bezüglich des Skalarproduktes I_u auf $T_u x$, d.h. es gilt überall

$$I(X, A(Y)) = I(A(X), Y)$$

Sie besitzt demnach nur reelle Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Definition. In einem Punkt $x(u)$ einer Hyperfläche im \mathbb{R}^n heißen die (reellen) Eigenwerte $\kappa_1(u), \dots, \kappa_{n-1}(u)$ der Weingartenabbildung $A_u : T_u x \rightarrow T_u x$ die **Hauptkrümmungen**, zugehörige (orthonormierte) Eigenvektoren $Y_1(u), \dots, Y_{n-1}(u)$ **Hauptkrümmungsrichtungen** (HKR) $A(Y_\varrho) = \kappa_\varrho Y_\varrho$ ($\varrho = 1, \dots, n-1$) (Diese Größen sind offensichtlich ebenfalls Invarianten).

Korollar. Es gilt $H = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1})$ (deswegen **Mittlere Krümmung**) $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_{n-1}$. Zur geometrischen Bedeutung der Krümmungsgrößen (siehe Kapitel II.3) **Vorgriff:** Flächen mit $H \equiv 0$ heißen **Minimalflächen**, mit $K \equiv 0$ heißen **Torsen**.

Oft sind tangentielle Vektorfelder nur längs einer Flächenkurve $t \mapsto c(t) = x(u(t))$ in der Form $t \mapsto X(t) = \sum X^\varrho(t) x_\varrho(u(t))$ (Bsp. $X(t) := \dot{c}(t) = \sum_\varrho \dot{u}^\varrho(t) x_\varrho(u(t))$) Für sie gilt

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \sum (\dot{X}^\mu x_\mu(u) + X^\varrho x_{\varrho\sigma}(u) \dot{u}^\sigma) = \sum (\dot{X}^\mu + X^\varrho \gamma_{\varrho\sigma}^\mu \dot{u}^\sigma) x_\mu(u) + \left(\sum b_{\varrho\sigma} X^\varrho \dot{u}^\sigma \right) \cdot N(u) \\ &= \frac{\nabla X}{dt} + II(X, \dot{c}) \cdot N \end{aligned}$$

Definition. Der Tangentialanteil

$$\frac{\nabla X}{dt} := \frac{dX}{dt} \Big|_T = \sum (\dot{X}^\mu + X^\varrho \gamma_{\varrho\sigma}^\mu(u) \dot{u}^\sigma) x_\mu(u)$$

heißt **kovariante Ableitung** des tangentialen Vektorfeldes $t \mapsto X(t)$ längs der Flächenkurve $t \mapsto c(t) = x(u(t))$ (und ist ebenfalls ein innergeometrischer Begriff).

4.3 Zur inneren Geometrie der Flächen im \mathbb{R}^3

Im folgenden sei $p = 2, n = 3$; das meiste gilt für beliebige p -Flächen. In der euklidischen Ebene sind wohldefiniert:

- Die **Parallelverschiebung** eines Vektors X_0 längs einer Kurve $t \mapsto c(t)$. Sie liefert ein **Parallelfeld** $t \mapsto X(t)$ mit $dX/dt = 0$, d.h. $X \equiv X_0 = \text{const}$.
- **Gerade Linien**, etwa mit der Kennzeichnung $dT/dt \equiv 0$. Übertragung dieser Begriffe auf „krumme“ Flächen nach dem Prinzip Rückprojektion der i.a. nach außen zeigenden Ableitungsvektoren dX/dt bzw. dT/dt in die Tangentialebene, d.h. Benutzung der innergeometrischen kovarianten Ableitung $\nabla X/dt$ bzw. $\nabla T/dt$. („Vektorfelder sind nur so parallel, bzw. Kurven nur so gerad, wie es die Fläche zulässt.“)

Geodätische Parallelverschiebung

Definition. Ein tangentiales Vektorfeld $t \mapsto X(t) = \sum X^\rho(t)x_\rho(u(t))$ längs einer Flächenkurve $t \mapsto c(t) = x(u(t))$ heißt **geodätisch parallel**, wenn gilt

$$\left. \frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt} \right|_T \equiv 0, \text{ also } \dot{X}^\mu + X^\rho \gamma_\rho^\mu{}_\sigma(u) \dot{u}^\sigma \equiv 0 \quad (\mu = 1, 2) \quad (4.1)$$

(d.h. der innergeometrisch nur sichtbare Anteil von dX/dt verschwindet.)

Es ist (4.1) ein **lineares DGL-System** 1. Ordnung für die Komponentenfunktionen $t \mapsto X^\mu(t)$ ($\mu = 1, 2$), das unter den Anfangsbedingungen $X^\mu(t_0) = X_0^\mu$ ($\mu = 1, 2$) **eindeutig lösbar** ist und überall definiert ist längs der Kurve.

Bemerkung. Ein Tangentialvektor X_0 auf einer C^2 -Fläche lässt sich längs jeder C^1 -Flächenkurve eindeutig geodätisch parallelverschieben. Bei Parallelverschiebung bleiben metrische Größen erhalten.

Satz 4.9. Sind $t \mapsto X(t) = \sum X^\rho(t)x_\rho(u(t))$, $Y(t) = \sum Y^\sigma(t)x_\sigma(u(t))$ geodätisch parallele C^1 -Vektorfelder längs derselben Kurve $t \mapsto c(t) = x(u(t))$, so ist längs der Kurve

$$t \mapsto I_{u(t)}(X(t), Y(t)) = \sum_{\rho, \sigma} g_{\rho\sigma}(u(t)) X^\rho(t) Y^\sigma(t) = \text{const}$$

d.h. Längen, Winkel und Flächeninhalte bleiben erhalten.

Beweis. [außergeoemtrisch]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_{u(t)}(X(t), Y(t)) &= \frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{dY}{dt}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung. 1. In der Ebene ist geodätisch parallel das gleiche wie (normal) parallel (da $\frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt}$).

2. Berühren sich zwei Flächen längs einer C^1 -Flächenkurve, so ist der geodätische Parallelismus für beide Flächen derselbe: Es wird in die gleiche Tangentialebene projiziert.

Beispiel (für geodätische Parallelfelder). **Kreiszyylinder**

Kreiskegel

Kugel

Vorsicht! Geodätische Parallelverschiebung ist i.a. nicht wegunabhängig.

4.4 Geodätische Linien

Definition. Eine **Geodätische** (oder **Autoparallele**) auf einer C^2 -Fläche ist eine C^2 -Flächenkurve $t \mapsto c(t)$ mit geodätisch parallelem Tangenteneinheitsvektorfeld T , d.h. mit $\frac{\nabla T}{dt} \equiv 0$.

Beispiel. 1. Schraubenlinien auf Kreiszyklindern (Geraden in der Abwickelebene).

2. Großkreise auf Kugeln (aber nicht die anderen Kreise).

Aus $\dot{c} = w \cdot T$ (mit $w = |\dot{c}|$) folgt

$$\frac{\nabla \dot{c}}{dt} = w \frac{\nabla T}{dt} + \dot{w} T$$

und wegen $I(T, \frac{\nabla T}{dt}) = \langle T, \frac{\nabla T}{dt} \rangle = \langle T, \dot{T} \rangle = 0$ folgt

$$\frac{\nabla \dot{c}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\nabla T}{dt} = 0 \wedge \dot{w} = 0 \Leftrightarrow$$

c ist Geodätische, proportional zur Bogenlänge parametrisiert (d.h. mit $w = |\dot{c}| = \text{const}$). Insbesondere gilt für Glächenkrüven in BLP

$$s \mapsto c(s) \text{ ist Geodätische} \iff \frac{\nabla c'}{dt} = 0$$

Korollar. Geodätische in V^2 -BLP $s \mapsto c(s) = x(u(s))$, d.h. mit $|c'|^2 = \sum g_{\rho\sigma}(u) u'^\rho u'^\sigma \equiv 1$ sind (in der Parameterebene) durch

$$u''^\mu + \sum \gamma_\rho^\mu{}_\sigma(u) u'^\rho u'^\sigma \equiv 0 \quad (\mu = 1, 2) \quad (4.2)$$

gekennzeichnet.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla c'}{ds} &= \frac{\nabla}{ds} \left(\sum u'^\rho x_\rho(u) \right) = \sum \left(u''^\mu x_\mu(u) + u'^\rho \frac{\nabla}{ds} (x_\rho(u)) \right) \\ &= \sum \left(u''^\mu x_\mu(u) + u'^\rho \underbrace{\frac{\nabla_\sigma x_\rho(u)}{= \sum \gamma_\rho^\mu{}_\sigma(u) x^\mu(u)}}_{= \sum \gamma_\rho^\mu{}_\sigma(u) x^\mu(u)} u'^\sigma \right) \\ &= \sum (u''^\mu + \gamma_\rho^\mu{}_\sigma(u) u'^\rho u'^\sigma) x_\mu(u) = 0 \Leftrightarrow (4.2) \end{aligned}$$

□

Zur Existenz von Geodätischen:

Satz 4.10. Auf einer C^3 -Fläche verläuft durch jeden Flächenpunkt in jede Tangentialrichtung **genau eine** geodätische.

Beweis. (4.2) bilde ein i.a. nichtlineares DGL-System zweiter Ordnung für die Funktionen $s \mapsto (u^1(s), u^2(s))$. Es besitzt etwa bei C^3 -Flächen (mit C^1 -Christoffelsymbolen) zu vorgegebenen Anfangswerten $u^\mu(0) = u_0^\mu$, $u'^\mu(0) = u_0'^\mu$, ($\mu = 1, 2$) genau eine auf einem maximalen Intervall I von $s = 0$ definierte Lösung $s \in I \mapsto (\dot{u}(s), \ddot{u}(s)) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$. Also existiert genau eine Geodätische $s \in I \mapsto c(s) = x(u^1(s), u^2(s)) \in M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $c(0) = x(u_0) = x_0$, $c'(0) = \sum X_0^\mu x_\mu(u_0) = X_0$ (wenn $|x_0| = 1$). \square

Bemerkung. Die maximal fortgesetzte Lösung $s \in I \mapsto u(s) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ verläuft in dem Gebiet $\mathbb{R} \times G$ „von Rand uz Rand“. Sie braucht nur auf einem endlichen Teilintervall $I =]s, s + [\subseteq \mathbb{R}$ definiert zu sein, und die zugehörige Geodätische besitzt dann nur endliche Länge. Flächen, bei denen alle Geodätischen unendlich lang sind heißen **geodätisch vollständig**.

Satz 4.11. *Auf einer C^2 -Fläche ist eine kürzeste C^2 -Verbindungskurve zwischen zwei festen Flächenpunkten notwendig eine Geodätische („möglichst kurz“ \Rightarrow „möglichst gerade“).*

Bemerkung. 1. Die Bedingung ist nicht hinreichend (siehe Großkreise auf der Kugel).
Aber: Jeder Flächenpunkt besitzt eine Umgebung, in der auch die Umkehrung gilt (siehe Differentialtopologie).

2. Geodätische sind auch Kurven minimaler Frenet-Krümmung κ (siehe später).

Zur praktischen Bestimmung von Geodätischen:

Experimentelle Bestimmung Aufwickeln eines Papierstreifens auf die Fläche (Berührung). Dann ist die Mittellinie (Geodätische auf dem Streifen) auch Geodätische auf der Fläche (berührender Zylinder).

Rotationsflächen Auf Rotationsflächen lässt sich das DGL-System für Geodätische elementar lösen (Gleichungen von Clairaut).

Numerische Bestimmung Mit Hilfe der Definition $\frac{\nabla T}{dt} = \frac{dT}{dt}\Big|_T = 0$, dem Startpunkt $x_0 = x(u_0)$ und der Startrichtung $T_0 = \sum r_0^\mu x_\mu(u_0) \in T_{u_0}x$ erreicht man den nächsten Punkt durch $x_1 = x(u_1) = x(u_0 + hr_0)$. Als nächste Richtung wählt man

$$T_1 = \frac{T_0|_{T(u_1)}}{|\dots|} = \sum r_1^\mu x_\mu(u_1) \in T_{u_1}x$$

Dann ist $(T_1 - T_0)_{T(u_1)} = 0$, also $\frac{\nabla T}{dt} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t}\Big|_{T(u_1)} = 0$.

5 Krümmungstheorie der Flächen im \mathbb{R}^3

(Vieles ist problemlos auf Hyperflächen im \mathbb{R}^n verallgemeinerbar)

5.1 Erste geometrische Bedeutungen der Krümmungsgrößen

Zusammenstellung:

Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 : Eigenwerte des (selbstadjungierten) Weingartnendomorphismus A .

Hauptkrümmungsrichtungen Y_1, Y_2 : zugehörige Eigenvektoren ($A(Y_\varrho) = \kappa_\varrho Y_\varrho$, $\varrho = 1, 2$) (mit o.E. $|Y_1| = |Y_2| = 1$)

Bemerkung. 1. $\kappa_1 \neq \kappa_2 \Rightarrow Y_1 \perp Y_2$ (man kann o.E. wählen: $\kappa_1 < \kappa_2$, $\det(Y_1, Y_2, N) = +1$)

2. $\kappa_1 = \kappa_2 = \lambda \Rightarrow$ Jede Tangentialrichtung ist HKR (der Eigenraum zu $\lambda(u)$ ist ganz $T_u x$) $\Rightarrow \forall_Y A(Y) = \lambda Y \Rightarrow (b^\mu)_\sigma = \lambda(\delta^\mu_\sigma)$. Eine ONB kann willkürlich gewählt werden.

Mittlere Krümmung:

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A = \frac{1}{2} \sum b^\varrho_\varrho = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

Gaußsche Krümmung:

$$K = \det A = \det(b^\mu_\sigma) = \frac{b}{g} = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

Bemerkung. Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(t) = t^2 - 2Ht + K = (t - \kappa_1)(t - \kappa_2)$$

also

$$\kappa_1, \kappa_2 = H \mp \sqrt{H^2 - K} \in \mathbb{R}$$

insbesondere $H^2 \geq K$.

Definition. Auf einer C^2 -Fläche heißen Flächenpunkte $x(u)$ für

1. $\kappa_1(u) = \kappa_2(u) = \lambda(u) \in \mathbb{R}$ **Nabelpunkte** mit der Kennzeichnung $A_u = \lambda_u \cdot I_u$ bzw. $II_u = \lambda(u) \cdot I_u$ („symmetrisches Krümmungsverhalten“).

2. $\kappa_1(u) = \kappa_2(u) = 0$ **Flachpunkte** mit der Kennzeichnung $A_u = 0$, bzw. $II_u = 0$ („keine Krümmung“).

Test für die Interpretationen:

Satz 5.1. *Eine C^3 -Fläche, die nur Nabelpunkte enthält, ist entweder Stück einer Kugel, oder einer Ebene. Im zweiten Fall enthält sie nur Flachpunkte.*

Beweis.

$$\forall_u A_u = \lambda(u) \cdot \text{Id} \Rightarrow \forall_u \partial_\varrho N(u) = -\lambda(u)x_\varrho(u) \quad (\varrho = 1, 2)$$

also

$$N_\varrho = -\lambda x_\varrho \quad (\varrho = 1, 2) \quad (5.1)$$

Daraus folgt:

$$N_{\varrho\sigma} = -(\lambda_\sigma x_\varrho + \lambda_\varrho x_\sigma)$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} N_{12} - N_{21} &= -(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2) \cdot \underbrace{(-\lambda)(x_{12} - x_{21})}_{=0} = 0 \\ &\Rightarrow \partial_\varrho \lambda = 0 \quad (\varrho = 1, 2), \quad \text{also } \lambda = \text{const} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung

1. Fall: $\lambda \neq 0$, wir betrachten also nur **echte Nabelpunkte**. Dann liefert 5.1:

$$N = -\lambda(x - x_0)$$

also

$$|x - x_0| = \frac{1}{|\lambda|} = \text{const}$$

Die Fläche liegt auf einer Kugel mit Radius $R = \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{K}}$ bzw. $K = \frac{1}{R^2} = \text{const} > 0$

2. Fall $\lambda = 0$, wir betrachten nun also nur die **Flachpunkte**. Dann liefert 5.1

$$N_\varrho = 0 \quad \text{also } N = \text{const}$$

Die Fläche ist ein Ebenenstück (mit $K = 0$)

$$\partial_\varrho \langle x(u) - x_0, N \rangle = \langle x(u) - x_0, N \rangle = \text{const} \quad [\text{HNF}]$$

□

Definition 5.2. Die **3. Grundform (3. Fundamentalform)** einer C^2 Fläche sei das Feld $u \mapsto III_u$ der (symmetrischen positiv semidefinierten) Bilinearform

$$III_u : T_u x \times T_u x \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto III_u(X, Y) = I_u(A_u(X), A_u(Y))$$

mit den Darstellungsmatrizen

$$u \mapsto (c_{\varrho\sigma}(u)) = III_u(X_\varrho(u), x_\sigma(u)) = \left(\sum g_{\mu\nu} b^\mu \quad \varrho b^\nu \quad \sigma \right) \quad (5.2)$$

Geometrische Bedeutung von III

$$III(X, Y) = \langle \not\! / d_X N, \not\! / d_Y N \rangle \Rightarrow c_{\rho\sigma} = \langle N_\rho, N_\sigma \rangle$$

(vgl. $g_{\rho\sigma} = \langle x_\rho, x_\sigma \rangle$) Die 3. Grundform einer Fläche ist also die 1. Grundform des (gemischten) Normalenbildes $u \mapsto o + N(u)$

Satz 5.3. Zwischen den Grundformen I, II, III einer C^2 -Fläche im \mathbb{R}^3 besteht die Identität

$$III - 2H \cdot II + K \cdot I$$

bzw.

$$C_{\rho\sigma} - 2Hb_{\rho\sigma} + Kg_{\rho\sigma}$$

Beweis. Der Endomorphismus A annulliert nach dem Satz von **Caley Hamilton** sein eigenes char. Polynom

$$\lambda_A(A) = A^2 - 2HA + K \cdot \text{Id} = 0$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} III(X, Y) &= I(A(X), A(Y)) \stackrel{A \text{ Selbstadjungiert}}{=} I(X, A^2(Y)) \\ &= I(X, 2HA(Y) - KY) = 2H \underbrace{I(X, A(Y))}_{II(X, Y)} - KI(X, Y) \end{aligned}$$

□

Bedeutung der Krümmung K nach Gauß

(1)

$$\underbrace{N_1 \times N_2}_{\text{sphär. Normalenvektor}} = (-b^\mu \quad {}_1x_\mu) \times (-b^\nu \quad {}_2x_\nu) = \det(b^\mu \quad {}_\sigma) \cdot x_1 \times x_2$$

(2)

$$\det III \stackrel{5.2}{=} \det I \cdot (\det A)^2 = K^2 \det I$$

bzw.:

$$\sqrt{c} = |K| \sqrt{g} \tag{5.3}$$

Interpretationen

(1) Aus dem Normalenvektor des Normalenbildes

$$N^N = \frac{N_1 \times N_2}{|\dots|} = \text{sign}K \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|} = \text{sign}K \cdot N$$

folgt: Das Vorzeichen von K bestimmt, ob die $u \mapsto o + N(u)$ gleich orientiert sind oder nicht. (Bei $K = 0$ ist ds Normalenbild nicht regulär)

(2) Für einen kompakten Bereich B in der Parameterebene gilt:

$$A(x[B]) = \int_B \sqrt{q(u)} du > 0, \text{ da } \sqrt{q(u)} > 0$$

$$A(N[B]) = \int_B \sqrt{c(u)} du \stackrel{5.3}{=} \int_B |K(u)| \sqrt{q(u)} du$$

(Oberflächenintegral)

Es folgt:

$$\max_{u \in B} |K(u)| \leq \frac{A(N[B])}{A(x[B])} \leq \max_{u \in B} |K(u)|$$

Der Grenzübergang $B \rightarrow \{u_0\}$ liefert:

$$|K(u_0)| = \lim_{B \rightarrow \{u_0\}} \frac{A(N[B])}{A(x[B])}$$

Der Betrag von K bestimmt das Verhältnis entsprechender Flächeninhalte im Grenzfall

5.2 Approximativer Flächenverlauf, Klassifikation der Flächenpunkte

Gegeben:

C^2 Flächen in Paramterdarstellung $u \mapsto x(u)$, $\dot{x} = x(\dot{u})$ fester Flächenpunkt

Gesucht:

Eulersche Parametrisierung

$$\bar{u} \mapsto x(\bar{u}) = \dot{x} + \bar{u}^1 e_1 + \bar{u}^2 e_2 + F(\bar{u}^1, \bar{u}^2) e_3$$

„ $[z = f(x, y)]$ “

In der Umgebung von \dot{x} mit speziellen Eigenschaften.

Konstruktion Wähle eine ONB (e_1, e_2) in $T_{u_0}x$, sodass mit

$$e_3 = \dot{N} = N(\dot{u})(\dot{x}, e_1, e_2, e_3)$$

ein kartesisches Koordinatensystem bildet.

Darstellung der Fläche in diesem Koordinatensystem

$$u \mapsto x(u) = \dot{x} + x^1(u) e_1 + x^2(u) e_2 + x^3(u) e_3$$

mit

$$x^i(\dot{u}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5.4}$$

$$x_\rho^3(\dot{u}) \quad (\rho = 1, 2), \tag{5.5}$$

5 Krümmungstheorie der Flächen im \mathbb{R}^3

denn

$$x_\varrho(\dot{u}) = \sum_{i=1}^3 x_\varrho^i(\dot{u}) e_i \in \langle e_1 \rangle e_2 = T_{u_0} x$$

Mit 5.5 folgt weiter:

$$x_1 \times x_2(\dot{u}) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \cdot e_3 \stackrel{!}{=} \underbrace{\lambda}_{>0} N(\dot{u})$$

also $\det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}(\dot{u}) > 0$ (und ist damit auch > 0 in einer Umgebung von \dot{u})

Durch $u \mapsto \Phi(u) := (x^1(u), x^2(u)) = (\bar{u}^1(u), \bar{u}^2(u))$ wird also eine, in der Umgebung von \dot{u} zulässige, Parametertransformation definiert (mit $\Phi(\dot{u}) = 0$ nach 5.4)

[Lokaler Umkehrsatz]

Neue Darstellung der Fläche in einer Umgebung von $(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (0, 0)$:

$$\bar{u} \mapsto \bar{x}(\bar{u}) = x \circ \Phi^{-1}(\bar{u}) = \dot{x} + \bar{u}^1 e_1 + \bar{u}^2 e_2 + F(\bar{u}^1, \bar{u}^2) e_3$$

mit

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\bar{u}) = x^3 \Phi^{-1}(\bar{u}), \quad \text{also } F(0) = 0 \\ \partial_\sigma F(0) \sum \underbrace{\partial_\varrho x^3(\dot{u})}_{=0 \text{ nach 5.5}} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\sigma} = 0 \end{array} \right.$$

Lemma. Jede C^2 Fläche im \mathbb{R}^3 besitzt lokal um **jeden** Punkt \dot{x} eine **Eulersche Parametrisierung**

$$u \mapsto x(u) = \dot{x} u^1 e_1 + u^2 e_2 + F(u^1, u^2) e_3$$

bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems (\dot{x}, e_1, e_2, e_3) mit

$$F(0) = \partial_1 F(0) = \partial_2 F(0) = 0$$

Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = \dot{x} \\ x_\varrho(0) = e_\varrho \\ N(0) = e_3 \\ x_{\varrho\sigma}(0) = F_{\varrho\sigma}(0) \cdot e_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (g_{\varrho\sigma}(0)) = (\delta_{\varrho,\sigma}, \quad \gamma_\varrho \mu_\sigma(0)) = 0 \\ (b_{\varrho\sigma}) = (\delta_\varrho \mu_\sigma(0)) = (F_{\varrho\sigma}(0)) \\ \text{[Hessematrix} \quad \text{der} \quad \text{Höhenfunktion } F] \end{array}$$

Ergebnis: $x(u^1, u^2) = \dot{x} + u^1 e_1 + u^2 e_2 + F(u^1, u^2) \cdot e_3$. Die Taylorentwicklung dieser Parametrisierung um $u = 0$:

$$x(u) = x(0) + \sum x_\varrho(0) u^\varrho + \frac{1}{2} \sum x_{\varrho\sigma}(0) \cdot u^\varrho \cdot u^\sigma + R(u^1, u^2)$$

wobei $R(u)/|u|^2 \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Einsetzen der obigen Eigenschaften liefert:

Satz 5.4. Eine C^2 -Fläche im \mathbb{R}^3 in der Eulerschen Parametrisierung des Hilfssatzes besitzt um $u = 0$ die Taylorentwicklung

$$u \mapsto x(u) = \dot{x} + \sum u^\varrho e_\varrho + \frac{1}{2} \sum b_{\varrho\sigma}(0) \cdot u^\varrho u^\sigma e_3 + O(|u|^2)$$

5.2 Approximativer Flächenverlauf, Klassifikation der Flächenpunkte

genannt **lokale kanonische Form** in der Umgebung von $u = 0$. Die in 2. Ordnung approximierte Fläche

$$u \mapsto \tilde{x}(u) = \dot{x} + \sum u^\rho e_\rho + \frac{1}{2} \sum B_{\rho\sigma}(0) \cdot u^\rho u^\sigma \cdot e_3$$

ist eine (möglicherweise entartete) parabolische Quadrik genannt **Schmiegeparaboloid** (oskulierendes Paraboloid) der Fläche in $\dot{x} = x(0)$.

Aus

$$\tilde{x}(u^1, u^2) = \dot{x} + \underbrace{\sum u^\rho x_\rho(0)}_{Y \in T_0x} + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma} \overset{\circ}{\Pi}(x_\rho(0), x_\sigma(0)) u^\rho u^\sigma \cdot \overset{\circ}{N}$$

folgt die sogar parameterunabhängige Darstellung

$$\tilde{x}(Y) = \dot{x} + Y + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Pi}(Y, Y) \cdot \overset{\circ}{N}$$

(Parameterebene = Tangentialebene in \tilde{x}) Die Zerlegung $Y = s \cdot \overset{\circ}{Y}_1 + t \cdot \overset{\circ}{Y}_2$ bezüglich den Hauptkrümmungsrichtungen in \dot{x} liefert wegen

$$\overset{\circ}{A}(Y) = s \cdot \overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot \overset{\circ}{Y}_1 + t \cdot \overset{\circ}{\kappa}_2 \cdot \overset{\circ}{Y}_2$$

also

$$\overset{\circ}{II}(Y, Y) = \overset{\circ}{I}(Y, \overset{\circ}{A}(Y)) = \overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot s^2 + \overset{\circ}{\kappa}_2 \cdot t^2$$

Wählt man also in der Tangentialebene T_0x die Hauptkrümmungsvektoren $\overset{\circ}{Y}_1, \overset{\circ}{Y}_2$ als (orthonormierte) Basisvektoren, so lässt sich das Schmiegeparaboloid in der Form

$$(s, t) \mapsto \tilde{x}(s, t) = \dot{x} + s \overset{\circ}{Y}_1 + t \overset{\circ}{Y}_2 + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\kappa}_1 s^2 + \overset{\circ}{\kappa}_2 t^2) \cdot \overset{\circ}{N}$$

darstellen mit den Hauptkrümmungen $\overset{\circ}{\kappa}_1, \overset{\circ}{\kappa}_2$ in \dot{x} . Man spricht auch von der „Hauptachsentransformation des Schmiegeparaboloids“:

$$Z = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\kappa}_1 x^2 + \overset{\circ}{\kappa}_2 y^2)$$

Daraus ist abzulesen:

Satz 5.5 (Klassifikation der Flächenpunkte im \mathbb{R}^3). Eine C^2 -Fläche im \mathbb{R}^3 verhält sich in 2. Näherung in der Umgebung eines Punktes mit

1. $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$ (elliptischer Punkt) wie ein elliptischer Paraboloid.
2. $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$ (parabolischer Punkt) aber nicht $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ wie ein parabolischer Zylinder.
3. $K = \kappa_1 = \kappa_2 = 0$ (Flachpunkt) wie eine Ebene.
4. $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$ (hyperbolischer Punkt) wie ein hyperbolischer Paraboloid (Sattelfläche).

Bemerkung. Echte Nabelpunkte ($\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$) sind stets elliptisch mit rotationssymmetrischem Schmiegeparaboloid.

Parallelschnitte des Schmiegeparaboloids im Abstand $\pm\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), genauer die Mengen $\tilde{J}_\varepsilon = \{Y \in T_0x | \frac{1}{2} \mathring{II}(Y, Y) = \pm\varepsilon\}$ sind ähnlich zur Menge

$$J = \frac{\tilde{J}_\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon}} = \{Y \in T_0x | \mathring{II}(Y, Y) = \pm 1\}$$

genannt **Dupinsche Indikatrix** der Fläche in \dot{x} (denn $Y \in \tilde{J}_\varepsilon \Leftrightarrow \mathring{II}(Y, Y) = \pm 2\varepsilon \Leftrightarrow Y/\sqrt{2\varepsilon} \in J$). Für Parallelschnitte der Fläche selbst, also für

$$J_\varepsilon = \{Y \in T_0x | \frac{1}{2} \mathring{II}(Y, Y) + R(Y) = \pm\varepsilon\}$$

gilt zumindest $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon/\sqrt{2\varepsilon} = J$, d.h. sie konvergieren gegen die Dupinsche Indikatrix für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Beweis. Sei $Y \in J_\varepsilon/\sqrt{2\varepsilon}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathring{II}(\sqrt{2\varepsilon}Y, \sqrt{2\varepsilon}Y) + R(\sqrt{2\varepsilon}Y) &= \pm\varepsilon \\ \Leftrightarrow \mathring{II}(Y, Y) + 2 \frac{R(\sqrt{2\varepsilon}Y)}{2\varepsilon} &= \pm 1 \quad \left(\frac{R(u)}{|u|^2} \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

□

Wegen $Y = sY_1 + tY_2 \in J \Leftrightarrow k_1s^2 + k_2t^2 = \pm 1$ erhält man

Satz 5.6. Die Dupinsche Indikatrix in einem Flächenpunkt ist

1. in einem elliptischen Punkt ($\kappa > 0$) eine Ellipse mit den Hauptachsenrichtungen Y_1, Y_2 und den Halbachsen $1/\sqrt{|\kappa_1|}, 1/\sqrt{|\kappa_2|}$.
2. in einem parabolischen Punkt (etwa $\kappa_1 = 0, \kappa_2 \neq 0$) ein Paar paralleler Geraden (etwa parallel zur Y_1 -Achse der Asymptotenrichtung).
3. in einem Flachpunkt leer.
4. in einem hyperbolischen Punkt ($K < 0$) ein Hyperbelpaar mit gleichen Asymptoten, den HAR Y_1, Y_2 und den Halbachsen $1/\sqrt{|\kappa_1|}, 1/\sqrt{|\kappa_2|}$.

Die Asymptotenrichtung Z (in den Fällen **(b)** und **(c)**) sind durch $\mathring{II}(Z, Z) = 0$ gekennzeichnet.

Bemerkung. Bei **Minimalflächen** ($H = 0, \kappa_2 = -\kappa_1$) erhält man stets symmetrische Hyperbeln (falls $\kappa_1 \neq 0$) **Alternative: Flachpunkte**

In der ursprünglichen Eulerschen Parametrisierung $z = F(x, y)$ des Hilfssatzes war $\text{grad } F(0, 0) = 0$ und $b_{\rho\sigma}(0, 0) = b^\mu_{\ \rho}(0, 0) = (F_{\rho\sigma}(0, 0))$ die **Hessematrix** in $x(0, 0)$
Sätze der Analysis über die lokalen Extrema liefern die

- Korollar.** 1. in einem **elliptischen Punkt** (II definit) liegt eine hinreichend kleine Flächenumgebung ganz auf einer Seite der **Tangentialebene** (lokale Extrema)
2. in einem **Parabelpunkt** oder **Flächepunkt** (II echt semidefinit) wird das Flächenverhalten in der Umgebung durch das Restglied mitbestimmt
3. in einem **hyperbolsichen Punkt** (II indefinit) gibt es in jeder Umgebung Punkte, die auf **verschiedenen** Seiten der Tangentialebene liegen

Beispiel 5.7. zu (b) in Eulerscher Normalform

1. $F(x, y) = x^3 + y^2 = y^2 + R(x, y)$

$$\Rightarrow b_{\rho\sigma}(0, 0) = F_{\rho\sigma}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (0, 0)$ ist parabolischer Punkt

2. $F(x, y) = x(x^2 - y^2) = R(x, y)$

$$\Rightarrow (b_{\rho\sigma}(0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (0, 0)$ ist ein Flachpunkt (**Affensattel**)

6 Kurven und spezielle Parameter auf einer Fläche im \mathbb{R}^3

6.1 Theorie der Flächenkurve

Bei Flächenkurven betrachten wir eine an die Fläche angepasste Begleitbasis und deren Abbildungsgleichung

Satz 6.1. Auf einer C^2 Fläche sei eine Kurve in BLP $s \mapsto c(s) = x(u(s))$ gegeben, dann bilden die Vektorfelder

$$\begin{aligned} s \mapsto T(s) &= c'(s) && [\text{Tangentenvektor}] \\ s \mapsto S(s) &= T^*(s) = \hat{N}(s) \times T(s) && [\text{Seitenvektor}] \\ s \mapsto \hat{N}(s) &:= N(u(s)) && [\text{Normalenvektor}] \end{aligned}$$

eine orthonormierte, positiv orientierte Begleitbasis $(T(s), S(s), \hat{N}(s))$ genannt **Streifen** oder **Darbox-Begleitbasis**

$$\begin{pmatrix} T \\ S \\ \hat{N} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & \tau_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ S \\ \hat{N} \end{pmatrix}$$

mit den Koeffizienten („Streifen invariant“)

- **geodätische Krümmung** κ_g

$$\kappa_g = \langle T', S \rangle = \left\langle \frac{\nabla T}{ds}, S \right\rangle = I \left(\frac{\nabla T}{ds}, S \right)$$

- **Normalkrümmung** κ_n

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle T', \hat{N} \rangle = -\langle \hat{N}', T \rangle \\ &= -\langle d_T, M \rangle = \langle A(T), T \rangle \\ &= I(A(T), T) = II(T, T) \end{aligned} \tag{6.1}$$

- **geodätische Torsion**

$$\begin{aligned} \tau_g &= \langle S', \hat{N} \rangle = -\langle \hat{N}', S \rangle \\ &= \dots \\ &= I(A(T), S) = II(T, S) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Beweis. klar

□

Korollar. 1. im Unterschied zur geodätischen Krümmung $\kappa_g = I\left(\frac{\nabla T}{ds}, S\right)$ hängen die Normalkrümmungen $\kappa_n = II(T, T)$ und die geodätische Torsion $\tau_g = II(T, S)$ einer Flächenkurve von ihrer Richtung T ab.

ALLE FLÄCHENKURVEN DURCH EINEN PUNKT MIT GLEICHEN TANGENTIALRICHTUNG HABEN DORT GLEICHES κ_n UND τ_g
 κ_n und τ_g beschreiben also mehr das Krümmungsverhalten der Fläche selbst (in Richtung T)

2. $T' = \kappa_g S + \kappa_n \hat{N} \Rightarrow \frac{\nabla T}{ds} = \kappa_g S$ ist der Innergeometrische Anteil der Ableitungsgleichung ist

$$\frac{\nabla}{ds} \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g \\ -\kappa_g & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$$

und der verallg. diese Frenet-Formel für ebene Kurven.

IM UNTERSCHIED ZU κ_n UND τ_g IST κ_g EINE INNERGEOMETRISCHE GRÖSSE

Wir bestimmen die Flächenkurven, bei denen eine ihrer invarianten verschwindet.

Definition 6.2. Eine Flächenkurve, deren Tangentenrichtung in jedem Punkt

- eine **Hauptkrümmungsrichtung** ist, heißt **Krümmungslinie**
- eine **Asymptotenrichtung** ist, heißt **Asymptotenlinie**

(Letzere existieren nicht durch **Elliptischen Punkt**)

Satz 6.3. Für C^2 Flächenkurven auf C^2 Flächen gilt

- (a) $\kappa_g \equiv 0 (\Leftrightarrow \frac{\nabla T}{ds} \equiv 0)$ kennzeichnet **Geodätische**
- (b) $\kappa_n \equiv 0 (\Leftrightarrow II(T, T) \equiv 0)$ kennzeichnet **Asymptotenlinie**
- (c) $\tau_g \equiv 0 (\Leftrightarrow II(T, S) \equiv 0)$ kennzeichnet **Krümmungslinie**

Beweis. (a) klar nach obiger Folgerung, Teil (b)

(b) Die **Dupinscher Indikatormatrix** ist durch $III(Y, Y) = \pm 1$ definiert. Genau für Tangentenvektor T mit $(T, T) = 0$ hat man keinen Schnittpunkt wodurch Asymptotenrichtungen definiert sind.

(c) $\tau_g = II(T, S) = I(A(T), S) = 0 = A(T) \parallel T \Leftrightarrow T$ ist Eigenvektor von $A \Leftrightarrow T$ ist **Hauptkrümmungsrichtung** (HKR)

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen **Darboux-Begleitbasis** und **Frenet-Begleitbasis**, bzw. der zugehörigen Invariante $(\kappa_g, \kappa_n, \tau_g), (\kappa, \tau)$ □

Satz 6.4. Ist der Winkel θ zwischen Schmiegebene einer Wendepunktfreien Flächenkurve und der **Tangentialebene** der Fläche überall so orientiert, sodaß gilt:

$$\begin{cases} H = \cos \theta \cdot S + \sin \theta \hat{N} \\ B = \sin \theta \cdot S + \cos \theta \hat{N} \end{cases} \text{ bzw. } \begin{cases} S = \cos \theta \cdot H - \sin \theta \cdot B \\ \hat{N} = \sin \theta \cdot H + \cos \theta \cdot B \end{cases}$$

so gilt für die Streifen invarianten bzw. κ, τ

$$\kappa_g = \kappa \cos \theta \tag{6.3}$$

6 Kurven und spezielle Parameter auf einer Fläche im \mathbb{R}^3

$$\kappa_n = \kappa \sin \theta \tag{6.4}$$

aus 6.3 und 6.4 folgt: $\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}$

$$\tau_g = \tau - \theta' \tag{6.5}$$

Eine weitere Interpretation von κ_n und τ_g liefert:

Satz 6.5. Für C^2 -Flächenkurven gilt:

1. In einem Kurvenpunkt $c(s)$ ist $|\kappa_n(s)|$ die Krümmung und $\tau_g(s)$ die Torsion derjenigen Geodätischen, die dort die Kurve berührt.
2. In einem Kurvenpunkt $c(s)$ ist $|\kappa_n(s)|$ die Krümmung des ebenen Normalschnittes der Fläche, der dort die Kurve berührt (Satz von MEUSNIER).

Beweis. 1. Für Kurve c und Geodätische \tilde{c} gilt wegen $T = \tilde{T}$ $\kappa_n = \tilde{\kappa}_n$, $\tau_g = \tilde{\tau}_g$. Wegen $\tilde{\kappa}_g = 0$ ($\Rightarrow \tilde{\kappa} = |\tilde{\kappa}_n| = |\kappa_n|$, $\tilde{\vartheta} = \text{const}$) erhält man $|\kappa_n| = |\tilde{\kappa}_n| = \tilde{\kappa}$, $\tau_g = \tilde{\tau}_g = \tilde{\tau}$.

2. Für den ebenen Normalschnitt \tilde{c} gilt $\tilde{B} \perp N$, also $\cos \tilde{\vartheta} = \langle \tilde{B}, N \rangle = 0$. Also ist wieder $|\tilde{\kappa}_n| = \tilde{\kappa}$ (wegen $\sin \tilde{\vartheta} = \pm 1$), also auch $|\kappa_n| = |\tilde{\kappa}_n| = \tilde{\kappa}$.

□

Korollar. Geodätische auf einer Fläche besitzen in jedem Kurvenpunkt minimale Krümmung κ im Vergleich zu allen anderen Flächenkurven mit gleicher Tangentialrichtung.

Beweis. Für Geodätische c und Vergleichskurven \tilde{c} gilt $\kappa = |\kappa_n| = |\tilde{\kappa}_n| \leq \sqrt{\tilde{\kappa}_g^2 + \tilde{\kappa}_n^2} = \tilde{\kappa}$. □

Wir untersuchen κ_n und τ_g in Abhängigkeit von der Tangentenrichtung T . Als Referenzsystem wählen wir die Hauptkrümmungsrichtungen.

Satz 6.6. In einem festen Flächenpunkt sei die Tangentialrichtung $T = \cos \varphi Y_1 + \sin \varphi Y_2$ (mit HKT Y_1, Y_2) gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \kappa_n(\varphi) &= \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi = H - \sqrt{H^2 - \kappa} \cos 2\varphi && \text{(Eulersche Formel)} \\ \tau_g(\varphi) &= (\kappa_2 - \kappa_1) \sin \varphi \cos \varphi = +\sqrt{H^2 - \kappa} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $S = -\sin \varphi Y_1 + \cos \varphi Y_2$, $A(T) = \kappa_1 \cos \varphi Y_1 + \kappa_2 \sin \varphi Y_2$ gilt

$$\begin{aligned} \kappa_n(\varphi) &= \langle A(T), T \rangle = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi \\ \tau_g &= \langle A(T), S \rangle = (\kappa_2 - \kappa_1) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Aus $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ folgt $\sqrt{H^2 - \kappa} = (\kappa_2 - \kappa_1)/2$ (falls $\kappa_1 \leq \kappa_2$) und $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ folgt die zweite Darstellung. □

Korollar. 1. In einem Flächenpunkt sind die Hauptkrümmungen die Extremalwerte der Normalkrümmung bzgl. aller Tangentialrichtungen und werden in Richtung der Hauptkrümmungsrichtungen angenommen.

2. Trägt man in einem Flächenpunkt in jede Tangentialrichtung $T = \cos \varphi Y_1 + \sin \varphi Y_2$ die Größe $1/\sqrt{|\kappa_n(\varphi)|}$ ab, erhält man die Dupinsche Indikatrix.

Beweis. 1.

$$\frac{d}{d\varphi} \kappa_n(\varphi) = (\kappa_2 - \kappa_1) 2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \text{ oder } \cos \varphi = 0$$

2. Für $X := T/\sqrt{|\kappa_n(\varphi)|}$ gilt

$$II(X, X) = \frac{1}{|\kappa_n(\varphi)|} II(T, T) = \frac{\kappa_n(\varphi)}{|\kappa_n(\varphi)|} = \text{sign } \kappa_n(\varphi) = \pm 1$$

□

Auf einer Kugel (mit Radius r) ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung, also jede Kurve eine Krümmungslinie mit $\tau_g \equiv 0$. Weiter ist $\kappa_n \equiv \kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$. Also gilt für alle sphärischen Kurven:

$$\begin{aligned} \kappa_n = \kappa \sin \vartheta &= \frac{1}{r} \Leftrightarrow \varrho = r \sin \vartheta \Leftrightarrow \varrho = r \cos \lambda \\ \text{sowie } \tau &= \vartheta' \Leftrightarrow \tau = -\lambda' \end{aligned}$$

wenn $\lambda = \pi/2 - \vartheta$.

6.2 Spezielle Parameter

Auf einer Fläche gibt es zwar keine Bogenlängen-Parameter, aber doch einige nützliche spezielle Parameter, z.B.

KL-Parameter: Alle Parameterlinien sind Krümmungslinien ($x_\varrho || Y_\varrho$, ($\varrho = 1, 2$))

AL-Parameter: Alle Parameterlinien sind Asymptotenlinien ($x_\varrho || Z_\varrho$ ($\varrho = 1, 2$))

(später werden wir auch Geodätische Parallel- und Polarkoordinaten betrachten). Wie erkennt man solche Parameter?

Satz 6.7. 1. Auf einer nabelpunktfreien C^2 -Fläche in der Darstellung $u \mapsto x(u)$ sind die Parameterlinien genau dann Krümmungslinien, wenn $g_{12} = b_{12} = 0$. In diesem Fall sind die Hauptkrümmungen $\kappa_1 = b_{11}/g_{11}$, $\kappa_2 = b_{22}/g_{22}$ und die Weingartenschen Ableitungsgleichungen lauten

$$\partial_\varrho N = -\kappa_\varrho x_\varrho \quad (\varrho = 1, 2) \quad (\text{Formeln von RODRIGUEZ})$$

2. Auf einer hyperbolischen C^2 -Fläche in der Darstellung $u \mapsto x(u)$ sind die Parameterlinien genau dann Asymptotenlinien, wenn gilt $a_{11} = b_{22} = 0$.

7 Vertauschbarkeitsrelationen

Die Koeffizienten der Ableitungsgleichung einer C^3 Hyperfläche im \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}\partial_\sigma x_\varrho &= \sum x_\varrho^\mu x_\mu b_{\varrho\sigma} N \\ \partial_\sigma N &= -\sum b_{\varrho\sigma}^\mu x_\mu\end{aligned}$$

lassen sich alle ausdrücken durch die Matrizen der 1. und 2. Grundform.

$$\begin{array}{ccc} (g_{\varrho\sigma}) & \rightarrow & (\gamma_\varrho^\mu{}_\sigma) \\ & \searrow & \\ b_{\varrho\sigma} & \rightarrow & (b_{\varrho\sigma}^\mu) \end{array}$$

Aber diese sind **nicht** unabhängig voneinander. Die **Vertauschbarkeitsrelation**

$$\begin{aligned}\partial_\tau \partial_\sigma x_\varrho &= \partial_\sigma \partial_\tau x_\varrho \\ \partial_\tau \partial_\sigma N &= \partial_\sigma \partial_\tau N\end{aligned}$$

liefern komplizierte differentielle Relationen zwischen ihnen.

Zunächst: Hilfsmittel zu ihrer (möglichst invarianten) Beschreibung:

7.1 Der Riemann'sche Krümmungstensor

Bei einer C^3 Hyperfläche in \mathbb{R}^n sind die 2. gewöhnlichen partiellen Ableitungen miteinander vertauschbar.

$$\partial_\tau \partial_\sigma x_\varrho = \partial_\sigma \partial_\tau x_\varrho \equiv 0$$

Dies gilt **nicht** für die kovarianten Ableitungen, wenn die Fläche Krümmung hat (d.h., wenn $\nabla \neq d$) man erhält

$$\nabla_\tau \nabla_\sigma x_\varrho - \nabla_\sigma \nabla_\tau x_\varrho = \sum R_{\varrho\sigma\tau}^\mu x_\mu$$

mit **Koeffizientenfunktion** $u \mapsto R_{\varrho\sigma\tau}^\mu(u)$.

Wegen

$$\begin{aligned}\nabla_\tau (\nabla_\sigma x_\varrho) &= \nabla_\tau \left(\sum \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma x_\mu \right) \\ &= \sum (\partial_\tau \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma) x_\mu + \sum \gamma_\varrho^{\mu\alpha} \nabla_\tau x_{\mu\alpha} \\ &= \sum [\partial_\tau \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma + \sum \gamma_\varrho^\alpha{}_\sigma \gamma_\alpha^\mu{}_\tau]\end{aligned}$$

gilt:

$$R_{\varrho\sigma\tau}^\mu = (\partial_\tau \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma + \sum \gamma_\varrho^\alpha{}_\sigma \gamma_\alpha^\mu{}_\tau) - [\partial_\sigma \gamma_\varrho^\mu{}_\tau + \sum \gamma_\varrho^\alpha{}_\tau \gamma_\alpha^\mu{}_\sigma]$$

Die Koeffizienten sind **innergeometrische** Größen (direkt aus der Definition ersichtlich). Durch lineare Fortsetzung auf beliebige tangentielle Vektorfelder

$$\begin{aligned}X &= \sum X^\varrho x_\varrho, \quad Y = \sum Y^\sigma x_\sigma, \quad Z = \sum Z^\tau z_\tau \quad \text{mittels} \\ R(Y, Z)X &:= \sum R_{\varrho\sigma\tau}^\mu X^\varrho Y^\sigma Z^\tau x_\mu\end{aligned}$$

wird in jeden Flächenpunkt $x(u)$ eine 3-fachlineare Abbildung

$$R_u := (T_u x)^3 \mapsto T_u x$$

definiert. Das Feld $u \rightarrow Ru$ dieser trilinearen Abbildung heißt **Riemannsches Krümmungstensorfeld**. R ist unabhängig von der Ausgangsparametrisierung, denn für beliebige tangentialen Vektorfelder X, Y, Z gilt

$$R(Y, Z)X = \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_{[Y, Z]}X$$

mit der durch $[Y, Z] := d_Z Y - d_Y Z$ definierten **LIE-Klammer** (Kommutator von Y, Z), die je zwei tangentialen Vektorfeldern wieder ein tangentiales Vektorfeld zuordnet. (Beweis: Langweilige Rechnung) Speziell für natürliche Basisfelder $X = x_\rho, Y = x_\sigma, Z = x_\tau$ gilt $[x_\sigma, x_\tau] = \partial_\tau x_\sigma - \partial_\sigma x_\tau = 0$, d.h. sie **kommutieren**, und es folgt

$$R(x_\sigma, x_\tau)x_\rho = \nabla_\tau \nabla_\sigma x_\rho - \nabla_\sigma \nabla_\tau x_\rho - 0 = \sum R_{\rho\sigma\tau}^\mu x_\mu$$

Bemerkung. Oft ist eine andere Definition üblich, etwa $[Y, Z] = d_Y Z - d_Z Y$ und $R(Y, Z)X = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X \dots$. Dies ändert nur das Vorzeichen.

Zur Bezeichnung „Krümmungstensor“: Eine Richtungsableitung kann als infinitesimale Parallelverschiebung gedeutet werden. Auf „flachen“ Flächen mit $\nabla = d$ gilt $R \equiv 0$. Infinitesimale, durch gewöhnliche Parallelverschiebung entstandene Parallelogramme „schließen sich“. Dies gilt nicht auf „gekrümmten“ Flächen bei Verwendung der geodätischen Parallelverschiebung.

7.2 Weitere kovariante Ableitungen

Ziel dieses Abschnitts ist es, die kovariante Ableitung ∇X für Vektorfelder X auf Felder von Bilinearformen und lineare Abbildungen (u. a. Tensorfelder) fortzusetzen. Dazu fordern wir die Gültigkeit der Produktregel.

Wir definieren $\nabla_\tau II$ (wieder Bilinearform) durch

$$\begin{aligned} (\nabla_\tau II)(x_\rho, x_\sigma) &= \partial_\tau [II(x_\rho, x_\sigma)] - II(\nabla_\tau x_\rho, x_\sigma) - II(x_\sigma, \nabla_\tau x_\rho) \\ &= \partial_\tau b_{\rho\sigma} - \sum b_{\alpha\sigma} \gamma_{\rho\tau}^\alpha - \sum b_{\rho\alpha} \gamma_{\sigma\tau}^\alpha \end{aligned}$$

Für die lineare Fortsetzung $(\nabla_Z II)(X, Y) := \sum (\nabla_\tau b_{\rho\sigma}) X^\rho Y^\sigma Z^\tau$ auf beliebige tangentialen Vektorfelder X, Y, Z zeigt man leicht

$$(\nabla_Z II)(X, Y) = d_Z [II(X, Y)] - II(\nabla_Z X, Y) - II(X, \nabla_Z Y)$$

d.h. sie ist unabhängig von der Ausgangsparametrisierung.

Bemerkung. Das gleiche ist auch für die 1. Grundform I möglich. Man erhält

$$(\nabla_\tau I)(x_\rho, x_\sigma) = \partial_\tau g_{\rho\sigma} - \gamma_{\rho\sigma\tau} - \gamma_{\sigma\rho\tau} \equiv 0$$

Die Aussage $\nabla I = 0$ wird auch als **Ricci-Lemma** bezeichnet.

Analog definieren wir

$$\begin{aligned}
 (\nabla_\tau A)(x_\sigma) &:= A(x_\sigma) - A(\nabla_\tau x_\sigma) \\
 &= \nabla_\tau [\sum b_\sigma^\alpha x_\alpha] - A(\sum \gamma_\sigma^\alpha x_\alpha) \\
 &= \sum (\partial_\tau b_\sigma^\mu) x_{\phi\mu} + \sum b_\sigma^\alpha \nabla_\tau x_\alpha - \sum \gamma_\sigma^\alpha A(x_\alpha) \\
 &= \boxed{\partial_\tau b_\sigma^\mu + \sum b_\sigma^\alpha \gamma_\alpha^\mu - \sum b_\alpha^\mu \gamma_\sigma^\alpha} x_\mu \\
 &= \sum (\nabla_\tau b_\sigma^\mu) x_\mu
 \end{aligned}$$

Für die lineare Fortsetzung

$$(\nabla_Z A)(Y) := \sum (\nabla_\tau b_\sigma^\mu) Y^\sigma Z^\tau x_\mu$$

auf beliebige tangentielle Vektorfelder Y, Z kann man dann zeigen, dass

$$\boxed{(\nabla_Z A)(Y) = \nabla_Z[A(Y)] - A(\nabla_Z Y)}$$

7.3 Gauß- und Codazzi-Gleichungen

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, eine Beschreibung der Vertauschbarkeitsrelationen

$$\partial_\tau \partial_\sigma x_\varrho = \partial_\sigma \partial_\tau x_\varrho \qquad \partial_\tau \partial_\sigma N = \partial_\sigma \partial_\tau N$$

durch die linearen Operatoren $R, \nabla II$ und ∇A zu finden.

1. Die Gaußschen Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \partial_\sigma x_\varrho &= \nabla_\sigma x_\varrho + II(x_\varrho, x_\sigma) \cdot N \\
 \Rightarrow \partial_\tau \partial_\sigma x_\varrho &= \nabla_\tau \nabla_\sigma x_\varrho + II(\nabla_\sigma x_\varrho, x_\tau) \cdot N + \partial_\tau [II(x_\varrho, x_\sigma)] \cdot N - II(x_\varrho, x_\sigma) \cdot A(x_\tau) \\
 0 &= \partial_\tau \partial_\sigma x_\varrho - \partial_\sigma \partial_\tau x_\varrho \\
 &= \nabla_\tau \nabla_\sigma x_\varrho - \nabla_\sigma \nabla_\tau x_\varrho - (II(x_\varrho, x_\sigma)A(x_\tau) - II(x_\varrho, x_\tau)A(x_\sigma)) \\
 &\quad + [II(\nabla_\sigma x_\varrho, x_\tau) - II(\nabla_\tau x_\varrho, x_\sigma) + (\nabla_\tau II)(x_\varrho, x_\sigma) - (\nabla_\sigma II)(x_\varrho, x_\tau) \\
 &\quad + II(\nabla_\tau x_\varrho, x_\sigma) - II(\nabla_\sigma x_\varrho, x_\tau) + II(x_\varrho, \nabla_\tau x_\sigma) - II(x_\varrho, \nabla_\sigma x_\tau)] \\
 &= R(x_\sigma, x_\tau)x_\varrho - (II(x_\varrho, x_\sigma)A(x_\tau) - II(x_\varrho, x_\tau)A(x_\sigma)) \\
 &\quad + [(\nabla_\tau II)(x_\varrho, x_\sigma) - (\nabla_\sigma II)(x_\varrho, x_\tau)] N \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} R(x_\sigma, x_\tau)x_\varrho = II(x_\varrho, x_\sigma)A(x_\tau) - II(x_\varrho, x_\tau)A(x_\sigma) \\ (\nabla_\tau II)(x_\varrho, x_\sigma) = (\nabla_\sigma II)(x_\varrho, x_\tau) \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Die Weingartenschen Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \partial_\sigma N &= A(x_\sigma) \\
 \Rightarrow \partial_\tau \partial_\sigma N &= -\partial_\tau [A(x_\sigma)] = -[\nabla_\tau [A(x_\sigma)] + II(A(x_\sigma), x_\tau) \cdot N] \\
 &= -[(\nabla_\tau A)(x_\sigma) + A(\nabla_\tau x_\sigma) + I(A(x_\sigma), A(x_\tau)) \cdot N] \\
 \Rightarrow 0 &= -(\partial_\tau \partial_\sigma N - \partial_\sigma \partial_\tau N) = (\nabla_\tau A)(x_\sigma) - (\nabla_\sigma A)(x_\tau) + A(\nabla_\tau x_\sigma - \nabla_\sigma x_\tau) + 0 \cdot N \\
 \Leftrightarrow &(\nabla_\tau A)(x_\sigma) = (\nabla_\sigma A)(x_\tau)
 \end{aligned}$$

Lineare Fortsetzung auf beliebige tangentielle Vektoren liefert

Satz 7.1. Die Vertauschbarkeitsrelationen der Gaußschen Ableitungsgleichungen einer C^3 -Hyperfläche im \mathbb{R}^n lauten parameterunabhängig

$$R(Y, Z)X = II(X, Y)A(Z) - II(X, Z)A(Y) \quad (\text{Gaußgleichung}) \quad (7.1)$$

$$(\nabla_Z II)(X, Y) = (\nabla_Y II)(X, Z) \quad (\text{Codazzigleichung für II}) \quad (7.2)$$

Die Vertauschbarkeitsrelationen der Weingartenschen Abbildungsgleichungen lauten parameterunabhängig

$$(\nabla_Z A)(Y) = (\nabla_Y A)(Z) \quad (\text{Codazzigleichung für A}) \quad (7.3)$$

und sind äquivalent zu den Codazzigleichungen für II.

Beweis. [der Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (3)] Für alle X, Y gilt

$$\begin{aligned} II(X, Y) &= I(X, A(Y)) \\ \Rightarrow \nabla_Z II(X, Y) &= dZ[I(X, A(Y))] - I(\nabla_Z X, A(Y)) - I(X, A(\nabla_Z Y)) + (-I(X, \nabla_Z[A(Y)])) + I(X, \nabla_Z[A(Y)]) \\ &= \underbrace{(\nabla_Z I)(X, A(Y))}_{=0} + I(X, \nabla_Z(A(Y)) - A(\nabla_Z Y)) \\ &= I(X, (\nabla_Z A)(Y)) \end{aligned}$$

□

Korollar 7.2. Bezüglich einer Parametrisierung $u \mapsto x(u)$ einer C^3 -Hyperfläche im \mathbb{R}^n lauten die Vertauschbarkeitsrelationen

$$R_{\varrho}^{\mu}{}_{\sigma\tau} = b_{\varrho\sigma}b^{\mu}{}_{\tau} - b_{\varrho\tau}b^{\mu}{}_{\sigma} \quad (\text{Gaußgleichungen}) \quad (7.4)$$

$$\nabla_{\tau}b_{\varrho\sigma} = \nabla_{\sigma}b_{\varrho\tau} \quad (\text{Codazzigleichungen für } (b_{\varrho\sigma})) \quad (7.5)$$

$$\nabla_{\tau}b^{\mu}{}_{\sigma} = \nabla_{\sigma}b^{\mu}{}_{\tau} \quad (\text{Codazzigleichungen für } (b^{\mu}{}_{\sigma})) \quad (7.6)$$

Speziell für 2-Flächen im \mathbb{R}^3 ist noch eine Vereinfachung möglich. Mit

$$R_{\varrho\nu\sigma\tau} := \sum g_{\mu\nu}R_{\varrho}^{\mu}{}_{\sigma\tau}$$

ist die erste Gleichung äquivalent zu

$$R_{\varrho\nu\sigma\tau} = b_{\varrho\sigma}b_{\nu\tau} - b_{\varrho\tau}b_{\nu\sigma}$$

wobei $R_{\varrho\nu\sigma\tau}$ in den Indexpaaren (σ, τ) und (ϱ, ν) schiefsymmetrisch sind (auch richtig im \mathbb{R}^n). Also sind bei $p = n - 1 = 2$ nur die Indexpaare $(\varrho\nu) = (1, 2)$ und $(\sigma\tau) = (1, 2)$ wesentlich, und die Gleichung ist äquivalent zu

$$R_{1212} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = b \Leftrightarrow K = \frac{b}{g} = \frac{R_{1212}}{g}$$

Analog folgt aus der Symmetrie der $b_{\varrho\sigma}$, dass die zweite Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn

$$\begin{cases} \nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{12} \\ \nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{12} \end{cases}$$

Korollar 7.3. *Speziell für 2-Flächen im \mathbb{R}^3 sind die Gaußgleichungen äquivalent zu*

$$K = \frac{R_{1212}}{g} \quad (\text{Theorema egregium von Gauß}) \quad (7.7)$$

und die Codazzi-Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \nabla_2 b_{11} &= \nabla_1 b_{12} \\ \nabla_1 b_{22} &= \nabla_2 b_{12} \end{aligned} \quad (\text{Gleichungen von Mainardi-Codazzi}) \quad (7.8)$$

Insbesondere ist die Gaußsche Krümmung K eine innergeometrische Größe.

7.4 Der Bonnetsche Fundamentalsatz

Die Ableitungsgleichungen einer Hyperfläche

$$\begin{aligned} \partial_\sigma x_\rho &= \sum \gamma_\rho^\mu{}_\sigma x_\mu + b_{\rho\sigma} N \\ \partial_\sigma N &= - \sum b^\mu{}_\sigma x_\mu \end{aligned}$$

definiert auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^p$ bilden bei bekannten Funktionen $u \mapsto g_{\rho\sigma}(u), b_{\rho\sigma}(u)$ [$\rightarrow \gamma_\rho^\mu{}_\sigma(u), b^\mu{}_\sigma(u)$] ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die gesuchten Abbildungen $u \mapsto x_\rho(u), N(u)$ (Aus diesen lässt sich die Fläche rekonstruieren durch Lösen von $\partial_\rho x = x_\rho$) Solche Systeme sind genau dann lokal eindeutig lösbar, wenn die sogenannte Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, die man erhält, wenn man die Vertauschbarkeitsbedingungen $\partial_\tau \partial_\sigma x_\rho = \partial_\sigma \partial_\tau x_\rho, \partial_\tau \partial_\sigma N = \partial_\sigma \partial_\tau N$ formal auswertet. (Satz von Frobenius, siehe etwa Pabel, Analysis IV, Diendonno, Grundzüge der modernen Analysis 1, Kapitel 10.9.) Beim gegebenen System sind diese Integrabilitätsbedingungen gerade die Gleichungen von Gauß und Codazzi. Damit erhält man (zunächst nur für $n = 3$)

Satz 7.4. Bonnetscher Fundamentalsatz der Flächentheorie

(a) In einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ seien

- eine symmetrische positiv definite C^2 Matrixfunktion $u \in G \mapsto (\bar{g}_{\rho\sigma}(u)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- eine symmetrische positiv definite C^1 -Matrixfunktion $u \in G \mapsto (\bar{b}_{\rho\sigma}(u)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

vorgegeben, welche

- das **Theorema egregorium (1')** $\bar{R}_{1212} = \det(\bar{b}_{\rho\sigma})$
- die Gleichung von **M-Codazzi (2')**

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_1 \bar{b}_{22} = \bar{\nabla}_2 \bar{b}_{12} \\ \bar{\nabla}_2 \bar{b}_{11} = \bar{\nabla}_1 \bar{b}_{12} \end{cases}$$

formal erfüllen. Weiter seien ein Parameterwert $\overset{\circ}{u}$, ein Punkt $\overset{\circ}{x} \in \mathbb{R}^3$ und zwei Vektoren $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2$ mit

$$\forall_{\rho\sigma} \langle \overset{\circ}{x}_\rho, \overset{\circ}{x}_\sigma \rangle = \bar{g}_{\rho\sigma}(\overset{\circ}{u}) \left[\rightarrow \overset{\circ}{N} = \frac{\overset{\circ}{x}_1 \times \overset{\circ}{x}_2}{|\dots|} \right]$$

Dann gibt es genau eine C^3 Fläche in Parameterdarstellung

$$x : U(\overset{\circ}{u}) \subset G \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x(\overset{\circ}{u} = \overset{\circ}{x}$$

$$\partial_{\varrho} x(\overset{\circ}{u}) = \overset{\circ}{x}_{\varrho} \quad (\varrho = 1, 2)$$

deren 1. und 2. Grundform durch

$$u \mapsto (\bar{g}_{\varrho\sigma}(u)), \quad u \mapsto (\bar{b}_{\varrho\sigma}(u))$$

gegeben sind.

(b) Zwei C^3 Fläche in Parameterdarstellung $u \mapsto x(u)$, $u \mapsto \tilde{x}(u)$ mit gleicher 1. und 2. Grundform- Matrizen stimmen überein bis auf eine eigentliche Bewegung des \mathbb{R}^3 , das heißt es gilt:

$$\tilde{x} = Dx + t \quad \text{mit } D \in SO_3(\mathbb{R}) \quad t \in \mathbb{R}^3$$

1. und 2. Grundform bilden einen **vollständiges System** allerdings nicht unabhängiger Invarianten für eine Fläche in \mathbb{R}^3 .

Beweis. Wie in der Kurventheorie, unter Verwendung des Satzes von von Frobenius statt des entsprechenden Satzes über gewöhnliche Differentialgleichungen \square

Unterschied zur Kurventheorie: man erhält in **(a)** im allgemeinen nur eine lokale Lösung. **Aber:** Ist das Parametergebiet **einfach zusammenhängend**, so erhält man sogar eine globale Lösung.

Schlussbemerkung

1. Der Satz lässt sich problemlos auf Hyperflächen im \mathbb{R}^n ausdehnen (Verwendung **(1)**, **(2)** statt **(1')**, **(2')**)
2. Mit Hilfe des Fundamentalsatzes kann man im allgemeinen keine Flächen konstruieren (Integrationsbedingungen nur schwer erfüllbar). Mann kann mit seiner Hilfe höchstens entscheiden, ob 2 Flächen kongruent sind

8 Spezielle Flächenklassen im \mathbb{R}^3

8.1 Minimalflächen

(mit $H \equiv 0 \Rightarrow K \leq 0$) Typische Flächenpunkte:

1. **Hyperbolische Punkte** ($K < 0$): Die Dupinsche Indikatrix besteht aus gleichseitigen Hyperbeln.
2. **Flächenpunkte** (Sie liegen auf nichtebenen Minimalflächen **isoliert**, da sie Nullstellen einer holomorphen Funktion sind).

Sie weisen also **symmetrisches Krümmungsverhalten** auf (vgl. Kugel).

Wieso heißen sie **Minimalflächen**?

Satz 8.1. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine (reguläre) parametrisierte C^2 -Fläche, sowie $\Omega \subseteq G$ ein beschränktes Gebiet mit $\bar{\Omega} \subseteq G$ mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Besitzt dann das Bild $x[\Omega]$ **minimalen Flächeninhalt** im Vergleich zu allen anderen parametrisierten C^1 -Vergleichsflächen $\tilde{x} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit gleichem Rand, d.h. $\tilde{x}|_{\partial\Omega} = x|_{\partial\Omega}$, dann gilt für ihre **mittlere Krümmung** $H \equiv 0$ in Ω .

Beweis. (vgl. entsprechenden Satz über Geodätische) Gegeben sei eine beliebige C^2 -Fläche $u \in G \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^3$. Betrachte dann die C^1 -Vergleichsflächen $u \mapsto {}^\varepsilon x(u)$ ($\varepsilon \in U(0)$) mit

$$\forall_\varepsilon \forall_{u \in \partial\Omega} {}^\varepsilon x(u) = x(u), \quad {}^\varepsilon x|_{\varepsilon=0} = x$$

und untersuche ihren Flächeninhalt. Als Ansatz dafür wähle ${}^\varepsilon x(u) := x(u) + \varepsilon V(u)$ mit einem C^1 -Vektorfeld $u \mapsto V(u)$, wobei

$$\forall_{u \in \partial\Omega} V(u) = 0$$

Besitzt die Oberfläche $a(\varepsilon) = A({}^\varepsilon[\Omega]) = \int_\Omega \sqrt{{}^\varepsilon g(u)} du$ in $\varepsilon = 0$ ein Minimum, so muss gelten

$$\begin{aligned} 0 = a'(0) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_\Omega \sqrt{{}^\varepsilon g(u)} du \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\sqrt{{}^\varepsilon g(u)} \right] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{g(u)}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [{}^\varepsilon g(u)]_{\varepsilon=0} du \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [{}^\varepsilon x_\rho(u)]_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial u^\rho} V(u) =: V_\rho(u) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon} {}^\varepsilon g_{\rho\sigma}(u) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle {}^\varepsilon x_\rho, {}^\varepsilon x_\sigma \rangle \Big|_{\varepsilon=0} = (\langle V_\rho, x_\sigma \rangle + \langle x_\rho, V_\sigma \rangle)(u) \end{aligned}$$

2. Für ein reguläres, diffbares Matrixfeld $t \mapsto A(t)$ gilt stets

$$\frac{d}{dt}(\det A) = \det A \cdot \operatorname{Tr}(A^{-1}\dot{A})$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det A) &= \frac{d}{dt} \det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n \det(a_1, \dots, \dot{a}_k, \dots, a_n) \\ &= \sum_{i,k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \dot{a}_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i,k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \dot{a}_{ik} = \sum_{i,k} A_{ik} \dot{a}_{ik} \end{aligned}$$

mit Adjunkten A_{ik} uz a_{ik} . Mit $A^{-1} = (\tilde{a}_{ki}) = \frac{1}{\det A} (A_{ki})^T = \frac{1}{\det A} (A_{ik})$ folgt

$$\frac{d}{dt}(\det A) = \det A \sum_{ik} \tilde{a}_{ki} \dot{a}_{ik} = \det A \operatorname{Tr}(A^{-1} \cdot \dot{A})$$

□

Also ist

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon g(u) \right]_{\varepsilon=0} &= g(u) \sum_{\varrho, \sigma} g^{\varrho, \sigma}(u) \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon g_{\sigma \varrho}(u) \right]_{\varepsilon=0} \\ &= g(u) \sum_{\varrho, \sigma} g^{\varrho \sigma}(u) (\langle V_{\sigma}, x_{\varrho} \rangle + \langle x_{\sigma}, V_{\varrho} \rangle)(u) \end{aligned}$$

Speziell für Normalvariationen mit $V(u) = f(u) \cdot N(u)$ mit C^1 -Funktion $u \mapsto f(u)$ erhält man

$$V_{\sigma} = (\partial_{\sigma} f) \cdot N - f \sum b_{\sigma}^{\mu} x_{\mu} \quad \text{also} \quad \langle V_{\sigma}, x_{\varrho} \rangle = -f \sum b_{\sigma}^{\mu} g_{\mu \varrho} = -f b_{\varrho \sigma}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho \sigma} g^{\varrho \sigma}(u) \left(\underbrace{\langle V_{\sigma}, x_{\varrho} \rangle}_{b_{\varrho \sigma}} + \underbrace{\langle x_{\sigma}, V_{\varrho} \rangle}_{=b_{\varrho \sigma}} \right) &= -2f \sum_{\varrho, \sigma} g^{\varrho \sigma}(u) b_{\varrho \sigma}(u) = -2f \sum_{\sigma} b_{\sigma}^{\sigma}(u) \\ &= -4f H(u) \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir die **1. Normalvariation der Oberfläche**:

$$a'(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{g(u)}} g(u) (-4f(u)H(u)) du = -2 \int_{\Omega} f(u)H(u) \underbrace{\sqrt{g(u)} du}_{=dA}$$

Ist $a'(0) = 0$ für alle C^1 -Variationen, insbesondere für alle Normalvariationen, d.h. für alle C^1 -Funktionen $u \mapsto f(u)$, so muss gelten $H \equiv 0$ in Ω (Fundamentallema der Variationsrechnung): Ist $H(u_0) > 0$, kann man eine Funktion $u \mapsto f(u)$ konstruieren mit $\int_{\Omega} f(u)H(u)\sqrt{g(u)}du > 0$. □

Bemerkung. 1. Lässt man beliebige Variationsvektorfelder V zu, so verschwinden die Tangentialanteile im Integral wegen $V|_{\partial\Omega} = 0$ nach dem Satz von Stokes ($\int_{\Omega} d\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi$). Man erhält also keine Verschärfung.

2. Die Bedingung $H \equiv 0$ ist nur notwendig für die Minimalität des Flächeninhalts bei fester Randkurve. Es kann auch passieren, dass

- Indefinit stationärer Flächeninhalt: Instabile Minimalfläche
- Relatives Minimum: Stabile Minimalfläche
- Absolutes Minimum: Minimierende Minimalfläche

Maximalflächen treten nicht auf.

Kurze Märchenstunde aus Physik und Analysis:

1. Stabile Minimalflächen lassen sich durch Seifenhäute realisieren (Plateau 1850). Dazu taucht man eine Randkurve aus Draht in Seifenlauge. Physikalischer Hintergrund: Die Druckdifferenz zwischen Vorder- und Hinterseite Δp ist proportional zu H . Bei Druckausgleich

Bei Seifenblasen (z.B. Kugeln) ist Δp proportional $H = \text{const} \neq 0$ („cmc-Flächen“, constant mean curvature)

2. **Plateausches Problem:** Existiert zu jeder (einfach geschlossenen, rektifizierbaren) Randkurven eine eingespannte (stabile) Minimalfläche? Antwort: Ja, es existiert immer eine singularitätenfreie minimierende Lösung.

Weitere Literatur zu Minimalflächen ist

1. Eschenburg/Jost: Differentialgeometrie und Minimalflächen
2. Hildebrandt/Tromba: Panoptimum: Mathematische Grundmuster des Vollkommenen (Kapitel 5) (engl.: Mathematics and optimal form)

Ab jetzt wollen wir unter einer Minimalfläche wieder eine Fläche mit $H \equiv 0$ verstehen (egal, ob sie etwas minimiert). Die ersten Beispiele von Minimalflächen wurden ausgehend von einer Eulerschen Parametrisierung $(u, v) \mapsto (u, v, z(u, v))^T$ durch Lösen der sogenannten Minimalflächengleichung

$$0 = H = \frac{1}{\sqrt{g}^3} [(1 + z_2^2)z_{11} - 2z_1z_2z_{12} + (1 + z_1^2)z_{22}]$$

für $(x, y) \mapsto z(x, y)$ gefunden. Dies ist eine elliptische partielle DGL 2. Ordnung. Es gibt verschiedene Lösungen:

0. $z = ax + by + c$: Ebene
1. $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}$: Katenoid
2. $e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$: **1. Scherksche Minimalfläche** (definiert auf einem unendlichen Schachbrett)
3. $\sin z = \sinh x \sinh y$: **2. Scherksche Minimalfläche** (isometrisch zur ersten)

Innerhalb spezieller Flächenklassen sind alle Minimalflächen bekannt

1. Jede (nichtebene) Minimal-Rotationsfläche $x(u, v) = \begin{pmatrix} r(u) \sin v \\ r(u) \cos v \\ z(u) \end{pmatrix}$ ist ein Katenoid.
2. Jede (nichtebene) Minimal-Regelfläche $x(u, v) = c(u) + vE(u)$ ist eine Wendelfläche.
1. Die einfachste (nichtebene) algebraische Minimalfläche ist die Ennepersche Minimalfläche $x(u, v) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} w - w^3/3 \\ i(w + w^3/3) \\ w^2 \end{pmatrix}$. Sie besitzt ein Parameter netz aus ebenen Krümmungslinien ($\tau = \tau_g = \text{const} \Leftrightarrow \theta = \text{const}$)

Heute kann man (mit funktionentheoretischen Mitteln) gezielt Minimalflächen mit bestimmten (topologischen) Eigenschaften konstruieren.

Beispiel (Costasche Minimalfläche).

Zur Zeit von Interesse sind cmc-Flächen mit $H = \text{const} \neq 0$.

Beispiel. Onduloide/Nodoide als Parallellfläche von Flächen mit $K = \text{const} > 0$.

8.2 Torsen

Ziel dieses Abschnitts ist es, alle Flächen im \mathbb{R}^3 mit $K \equiv 0$ zu bestimmen. Typische Flächenpunkte sind

Parabolische Punkte (etwa $\kappa_1 \neq 0, \kappa_2 = 0$)

Flachpunkte ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$)

Sei $x(u_0, v_0)$ ein fester Flächenpunkt auf einer solchen (genügend oft diffbaren) Fläche mit $K \equiv 0$. Wir unterscheiden 2 Hauptfälle:

1. $\kappa_1(u, v) = \kappa_2(u, v) = 0$ in $U(u_0, v_0)$. Dort besteht die Fläche nur aus Flachpunkten und ist nach Satz 3.1 ein Ebenenstück.
2. $\kappa_1(u_0, v_0) \neq 0, \kappa_2(u_0, v_0) = 0$ und damit $\kappa_1(u, v) \neq 0, \kappa_2(u, v) = 0$ in $U(u_0, v_0)$. Dort besteht die Fläche nur aus parabolischen Punkten.

Lokale Klassifikation der Flächen im \mathbb{R}^3 mit $K \equiv 0$:

1. Ebene
2. (nichtebene) Regelfläche
 - a) Zylinder
 - b) nichtzylindrische Regelflächen
 - i. Kegel
 - ii. Tangentenfläche

- iii. weder noch
- c) weder noch

3. weder noch

Ein Beispiel für das „Verkleben“ von Torsenstücken verschiedener Art bei unproblematischen (isolierten) Nulstellen von $\kappa_1, \dot{E}, \dot{q}$. Das Gesamtergebnis lautet:

Satz 8.2. *Die Flächen im \mathbb{R}^3 mit $K \equiv 0$ bestehen „im wesentlichen“, d.h. für eine offene und dichte Teilmenge ihres Definitionsbereichs, aus Teilen von allgemeinen Zylindern (einschließlich Ebenen), allgemeinen Kegeln und Tangentenflächen von Kurven, und sind in diesem Bereich lokal in die Ebene verbiegbar.*

Beweis. Die Hauptfälle der Klassifikation sind immer in einer ganzen Umgebung eines Flächenpunktes definiert (also ist D offen), und in jeder Umgebung eines Sonderfalles liegt auch ein Hauptfall vor (also ist D dicht). Alle Hauptfälle sind in die Ebene verbiegbar (siehe Übungen). \square

8.3 Minimalflächen (Teil 2)

Grundlegend für die differentialgeometrische Minimalflächentheorie ist

Satz 8.3. *Jed C^2 -Minimalfläche im \mathbb{R}^3 besitzt lokal eine isotherme (konforme) Parametrisierung*

$$(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow x(u, v) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (g_{\rho\sigma}(u, v)) = \lambda^2(u, v)(\delta_{\rho\sigma})$$

mit $\lambda > 0$.

Beweis. Wir können annehmen, dass die Fläche in einer Eulerschen Parametrisierung $(u, v) \mapsto (u, v, z(u, v))^T$ vorliegt (siehe Kapitel 3.2). Dann ist $(g_{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 + z_1^2 & z_1 z_2 \\ z_1 z_2 & 1 + z_2^2 \end{pmatrix}$, $g = 1 + z_1^2 + z_2^2$ und

$$H = \frac{1}{\sqrt{g^3}} [(1 + z_2^2)z_{11} - 2z_1 z_2 z_{12} + (1 + z_1^2)z_{22}] = 0$$

Wir betrachten für gesuchte Funktionen $(u, v) \mapsto \alpha(u, v), \beta(u, v)$ die die partiellen Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 \alpha = \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \quad \partial_1 \beta = \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \\ \partial_2 \alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \quad \partial_2 \beta = \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \end{array} \right\}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \partial_2(\partial_1 \alpha) - \partial_1(\partial_2 \alpha) &= \partial_2 \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right) - \partial_1 \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \right) = \dots = 0 \\ \partial_2(\partial_1 \beta) - \partial_1(\partial_2 \beta) &= \partial_2 \left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \right) - \partial_1 \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right) = \dots = 0 \end{aligned}$$

sind sie vollständig integrierbar und nach dem Satz von Frobenius existieren lokale C^2 -Lösungen $(u, v) \mapsto \alpha(u, v), \beta(u, v)$. Die C^2 -Parametertransformation $(u, v) \mapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$ mit $\tilde{u}(u, v) = u + \alpha(u, v)$, $\tilde{v}(u, v) = v + \beta(u, v)$ ist wegen

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = (1 + \alpha_1)(1 + \beta_2) - \alpha_2\beta_1 = \dots = \frac{(1 + \sqrt{g})^2}{\sqrt{g}} > 0$$

zulässig. In den neuen Parametern gilt jetzt (mit $(u^1, u^2) = (u, v)$, $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (\tilde{u}, \tilde{v})$)

$$\begin{aligned} x_\mu &= \sum_{\varrho} \tilde{x}_\varrho \tilde{u}_\mu^\varrho \Rightarrow g_{\mu\nu} = \sum_{\varrho, \sigma} \tilde{g}_{\varrho\sigma} \tilde{u}_\mu^\varrho \tilde{u}_\nu^\sigma \\ \Rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} &= \sum_{\varrho, \sigma} g^{\varrho\sigma} \tilde{u}_\varrho^\mu \tilde{u}_\sigma^\nu \end{aligned}$$

also (jetzt wieder (u, v) bzw. (\tilde{u}, \tilde{v})):

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{11} &= g^{11}(\tilde{u}_1)^2 + 2g^{12}\tilde{u}_1\tilde{u}_2 + g^{22}(\tilde{u}_2)^2 \\ &= \dots = \frac{1}{g}(1 + \sqrt{g})^2 \\ \tilde{g}^{22} &= g^{11}(\tilde{v}_1)^2 + 2g^{12}\tilde{v}_1\tilde{v}_2 + g^{22}(\tilde{v}_2)^2 \\ &= \dots = \frac{1}{g}(1 + \sqrt{g})^2 \\ \tilde{g}^{12} &= g^{11}\tilde{u}_1\tilde{v}_1 + g^{12}(\tilde{u}_1\tilde{v}_2 + \tilde{u}_2\tilde{v}_1) + g^{22}\tilde{u}_2\tilde{v}_2 \\ &= \dots = 0 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (\tilde{g}^{\varrho\sigma}) &= \frac{1}{g}(1 + \sqrt{g})^2(\delta_{\varrho\sigma}) \quad \text{bzw.} \\ (\tilde{g}_{\varrho\sigma}) &= \frac{g}{(1 + \sqrt{g})^2}(\delta_{\varrho\sigma}) = \lambda^2(\delta_{\varrho\sigma}) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Aussage des Satzes (nichts der Beweis!) gilt für beliebige 2-dimensionale C^2 -Flächen im \mathbb{R}^n (siehe etwa SPIVAK: A comprehensive introduction to differential geometry, Band IV, S. 455-500)

Eigenschaften isothermer Parameter:

Lemma 8.4. 1. Bei einer C^2 -Fläche in isothermer Parametrisierung $(u, v) \mapsto x(u, v)$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{11} + x_{22} = 2\lambda^2 H N \\ \Rightarrow b_{11} + b_{22} &= 2\lambda^2 H \end{aligned}$$

2. Ist der isotherme Parameter sogar C^3 -diffbar, so lautet

- das Theorema egregium $K = -\frac{1}{\lambda^2} \delta \log \lambda$.

8 Spezielle Flächenklassen im \mathbb{R}^3

- die Gleichungen von Mainardi-Codazzi:

$$\begin{aligned}\partial_1 b_{22} - \partial_2 b_{12} &= 2\lambda^2 H \partial_1 \log \lambda \\ \partial_2 b_{11} - \partial_1 b_{12} &= 2\lambda^2 H \partial_2 \log \lambda\end{aligned}$$

Aus dem ersten Punkt ist sofort abzulesen:

Satz 8.5. Eine C^2 -Fläche im \mathbb{R}^3 ist genau dann eine Minimalfläche, wenn bezüglich einer (und damit jeder) isothermen Parametrisierung die Koordinatenfunktionen **harmonisch** (Potentialfunktionen) sind.

Über harmonische Funktionen wissen wir: $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$. Für die komplexwertige Funktion $\varphi := f_1 - if_2 : G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = u + iv \mapsto \varphi(w) = \partial_1 f(u, v) - i\partial_2 f(u, v)$ gilt

$$\begin{cases} \partial_1(\operatorname{Re} \varphi) - \partial_2(\operatorname{Im} \varphi) = f_{11} + f_{22} = 0 \\ \partial_2(\operatorname{Re} \varphi) + \partial_1(\operatorname{Im} \varphi) = f_{12} - f_{21} = 0 \end{cases}$$

Also ist φ holomorph in $G \subseteq \mathbb{C}$. Insbesondere sind also f_1 und f_2 und damit f selbst reell analytisch (in Potenzreihen entwickelbar). Für eine (lokal existente) Stammfunktion $\phi = \int \varphi$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{d\phi}{dw} = \partial_1(\operatorname{Re} \phi) + i\partial_1(\operatorname{Im} \phi) = \partial_1(\operatorname{Re} \phi) - i\partial_2(\operatorname{Re} \phi) \\ &= \varphi = \partial_1 f - i\partial_2 f\end{aligned}$$

also $f = \operatorname{Re} \phi$ (bei richtiger Anfangsbedingung). f ist also lokaler Realteil einer holomorphen Funktion ϕ . Dies können wir anwenden: Für jede Minimalfläche in isothermen Parametern gilt (lokal)

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \phi(u + iv)$$

mit einer vektorwertigen holomorphen Funktion $\phi : u \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^3$, $w \mapsto \phi(w)$, wobei $\phi' = x_1 - ix_2$. Eigenschaften dieser komplexen „Kurve“ $w \mapsto \phi(w)$ (man verwendet hier im \mathbb{C}^3 das sogenannte **isotrope Produkt** $\langle X, Y \rangle := \sum_{i=1}^3 X_i Y_i$, nicht das hermitesche Skalarprodukt $\sum_{i=1}^3 X_i \bar{Y}_i$):

1. $|\phi'|^2 = \langle \phi', \bar{\phi}' \rangle = \langle x_1 - ix_2, x_1 + ix_2 \rangle = x_1^2 + x_2^2 = 2\lambda^2 > 0$
2. $\phi'^2 := \langle \phi', \phi' \rangle = \langle x_1 - ix_2, x_1 - ix_2 \rangle = x_1^2 - x_2^2 - 2i \langle x_1, x_2 \rangle = \lambda^2 - \lambda^2 - 0 = 0$

Das heißt ϕ' liegt im isotropen Kegel $K_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^3 z_i^2 = 0\}$. Ist umgekehrt eine holomorphe Kurve $\phi : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ mit $|\phi'| > 0$, $\phi'^2 \equiv 0$ vorgegeben, so gilt für die Parameterfläche $x = \operatorname{Re} \phi$ wieder $\phi' = x_1 - ix_2$ und folglich

(0) $x_{11} + x_{22} = 0$, das heißt die Komponentenfunktionen sind harmonisch

(1) $\phi'^2 = x_1^2 - x_2^2 - 2i \langle x_1, x_2 \rangle = 0$ ($g_{\rho\sigma} = \lambda^2(\delta_{\rho\sigma}$ mit $\lambda > 0$)

(2) $|\phi'|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2\lambda^2 > 0$

$x = \operatorname{Re} \phi$ ist somit nach 8.5 isotherme Parametrisierung einer regulären Minimalfläche.

Satz 8.6. *Jede isotherme parametrisierte Minimalfläche $x : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lässt sich (lokal) als Realteil einer **holomorphen Minimalkurve***

$$\phi : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

darstellen, die regulär ist ($|\phi'| > 0$), aber einen **isotropen Tangentenvektor** ϕ' (mit $\phi'^2 \equiv 0$) besitzt. Umgekehrt definiert jede solche Minimalkurve eine **reguläre Minimalfläche**

Beispiel.

$$\phi(w) = \begin{pmatrix} \cos w \\ \sin w \\ -iw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cosh v \\ \sin u \cosh v \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin u \sinh v \\ -\cos u \sinh v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\phi'(w) = \begin{pmatrix} -\sin w \\ \cos w \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{mit } \phi'^2 = 0 \quad |\phi'| > 0$$

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \phi(u + iv) = \cosh \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Katenoid}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(u, v) &= \operatorname{Re} [i\phi(u + iv)] = -\operatorname{Im} \Phi(u + iv) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + \underbrace{\sinh v}_{\bar{v}} \begin{pmatrix} \sin u \\ -\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Wendelfläche} \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 8.4 Teil **(b)** erhält man noch

Satz 8.7. *Die Codazzi-Gleichung*

$$\begin{cases} \partial_1 b_{22} = \partial_2 b_{12} & \text{wegen } b_{11} + b_{22} = 0 \\ (-\partial_2 b_{11} =) \partial_2 b_{22} = -\partial_1 b_{12} \end{cases}$$

eine Minimalfläche in isothermer Parametrisierung sind gerade die **Cauchy Riemann'schen Differentialgleichungen** für die somit holomorphe Funktion

$$b := b_{22} + ib_{12} [= -b_{11} - b_{12}]$$

auch als **Torsionsinvariante** oder **Hopf-Invariante** bezeichnet.

Folgerung:

Die Flachpunkte einer rechtebenen Minimalfläche liegen isoliert. Wegen $|b|^2 = b_{22}^2 + b_{12}^2 = -(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = -\det II = \lambda^4 ix$ gilt $K = 0 \Leftrightarrow |b| = 0$. Die Nullstellen einer holomorphen Funktion liegen aber isoliert (häufen sich höchstens auf dem Rand des Definitionsbereiches).

Gesucht: Alle Minimalflächen $\phi : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ mit

$$(1) \quad \phi'^2 = \phi'_x{}^2 + \phi'_y{}^2 \phi'_z{}^2 = (\phi'_x - i\phi'_y) \cdot (\phi'_x - i\phi'_y) + \phi'_z{}^2 = 0$$

$$(2) \quad |\phi'|^2 > 0$$

1. Sei ϕ eine solche Minimalkurve.

Trivialfall

$$\begin{aligned} \phi'_x - i\phi'_y \equiv 0 &\Rightarrow \phi'_z \equiv 0 \Rightarrow \phi_z = \text{const} \\ &\Rightarrow x = \text{Re } \phi \end{aligned}$$

liegt also in einer Ebene und ist uninteressant.

Normalfall $f := \phi'_x - i\phi'_y$ besitzt nur isolierte Nullstellen. Dann besitzt $g := \frac{\phi'_z}{f} = \frac{\phi'_z}{\phi'_x - i\phi'_y}$ höchstens isolierte Polstellen (ist meromorph). Da auch $\phi'_x + i\phi'_y = -\frac{(\phi'_z)^2}{\phi'_x - i\phi'_y} = -fg^2$ holomorph ist, müssen die Nullstellen von f die Polstellen von g^2 wegheben. (Wenn w_0 eine Polstelle der Ordnung m von g ist, muss w_0 eine Nullstelle von f der Ordnung $\geq 2m$ sein.) Mit diesen Funktionen f und g gilt dann

$$\begin{aligned} \phi'_x &= \frac{1}{2}(f + (-fg^2)) & \phi'_y &= \frac{i}{2}(f - (-fg^2)) \\ \Rightarrow \phi'_z &= f \cdot g & \phi' &= \frac{1}{2}f \begin{pmatrix} 1 - g^2 \\ i(1 + g^2) \\ 2g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei noch zusätzlich

$$\begin{aligned} |\phi'|^2 &= \langle \phi', \overline{\phi'} \rangle = \frac{1}{4}f\bar{f} [(1 - g^2)(1 - \bar{g}^2) + (1 + g^2)(1 + \bar{g}^2) + 4g\bar{g}] \\ &= \frac{1}{2}|f|^2 [1 + 2|g|^2 + |g|^4] = \frac{1}{2}|f|^2 (1 + |g|^2)^2 = \frac{1}{2}[|f| + |fg^2|]^2 > 0 \end{aligned}$$

Eine eventuelle Nullstelle von f muss also **genau** die Polstellen von g^2 wegheben (sonst erzeugt sie eine Singularität).

2. Sind umgekehrt zwei solche Funktionen $f, g : G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ vorgegeben, so ist

$$\psi := \frac{1}{2}f \begin{pmatrix} 1 - g^2 \\ i(1 + g^2) \\ 2g \end{pmatrix} \text{ holomorph mit } \psi^2 = \dots = 0, |\psi|^2 = \frac{1}{2}[HI + Hg\Psi]^2 > 0. \text{ Falls}$$

G einfach zusammenhängend ist (etwa ein Sterngebiet, oder konvex), so existiert eine globale Stammfunktion $\phi = f \psi$, die eine Minimalfläche $x = \text{Re } \phi$ definiert.

Ergebnis:

Satz 8.8 (Weierstraßsche Darstellung von Minimalflächen). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe und $g : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion mit*

1. *In jedem Pol der Ordnung m von g hat f eine Nullstelle genau der Ordnung $2m$.*
2. *Außerhalb der Pole von g ist f nullstellenfrei.*

Dann wird durch $x = \operatorname{Re} \phi$ mit $\phi' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - g^2 \\ i(1 + g^2) \\ 2g \end{pmatrix}$ eine (überall reguläre) Minimalfläche definiert.

Umgekehrt besitzt jede Minimalkurve $\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)^T$ eine solche Darstellung mit $f := \phi'_x - i\phi'_y$, $g := \frac{\phi'_z}{f}$, außer es gilt $\phi'_x \equiv i\phi'_y$, $\phi'_z \equiv 0$, so dass $x = \operatorname{Re} \phi$ in einer Ebene liegt.

Beispiel. 1. $g(w) = \frac{1}{w}$, $f(w) = w^2$

$$\begin{aligned} \phi'(w) &= w^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{w^2} \\ i \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) \\ 2 \frac{1}{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w^2 - 1 \\ i(w^2 + 1) \\ 2w \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \phi(w) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{w^3}{3} - w \\ i \left(\frac{w^3}{3} + w\right) \\ w^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist $x = \operatorname{Re} \phi$ die **Ennepersche Minimalfläche**.

2. Man erhält die **Ennepersche Minimalfläche** auch durch $f(w) = 1$, $g(w) = w$.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}'(w) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - w^2 \\ i(1 + w^2) \\ 2w \end{pmatrix} \\ \tilde{\phi}(w) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{w^3}{3} - w \\ i \left(\frac{w^3}{3} + w\right) \\ w^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die weierstraßschen Funktionen f, g sind weder parameter- noch bewegungsinvariant. Dennoch haben sie eine geometrische Bedeutung für die (reelle) Minimalfläche:

Satz 8.9. Für die Weierstraß-Funktionen f und g gilt

1. g beschreibt das Normalenbild N der Fläche nach stereographischer Projektion der Sphäre S^2 auf $\overline{\mathbb{C}}$, d.h. es gilt

$$g = \frac{N_x - iN_y}{1 - N_z} \qquad N = \frac{1}{|g|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} g \\ 2\operatorname{Im} g \\ |g|^2 - 1 \end{pmatrix}$$

2. Es gilt $f \cdot g' = b = b_{22} + ib_{12}$ mit der Torsionsinvarianten b , d.h. f legt (über b) die Koeffizienten der zweiten Grundform fest.

Weierstraßsche Darstellung

$$x = \operatorname{Re} \phi \text{ mit } \phi' = f \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - g^2 \\ i(1 + g^2) \\ 2g \end{pmatrix}$$

Bedeutung der Weierstraßschen Funktion f, g

8 Spezielle Flächenklassen im \mathbb{R}^3

(a) $g = \pi_s \circ N$

(b) $fg' = b (= b_{22} + ib_{12})$

Beweis. Aus

$$\phi' = x_1 - ix_2,$$

$$\phi'' \stackrel{!}{=} x_{11} - ix_{21}$$

folgt

1. $|\phi'|^2 = 2\lambda^2 = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)^2$

2. $\phi \times \bar{\phi}' = (x_1 - ix_2) \times (x_1 \times ix_2) = 2ix_1 \times x_2$, also $N = \frac{1}{2i\lambda^2}\phi' \times \bar{\phi}'$

3. $\langle \phi'', N \rangle = b_{11} - ib_{12} = -(b_{22} - ib_{12}) = -b$

(a)

$$\begin{aligned} \phi' \times \bar{\phi}' &= \frac{1}{4}f\bar{f} \begin{pmatrix} 1-g^2 \\ i(1+g^2) \\ 2g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-\bar{g}^2 \\ i(1+\bar{g}^2) \\ 2\bar{g} \end{pmatrix} = \dots \\ &= \frac{1}{2}\bar{f}^2(1+|g|^2) \cdot i \cdot \begin{pmatrix} g+\bar{g} \\ \frac{1}{i}(g-\bar{g}) \\ |g|^2-1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow N &= \frac{1}{1+|g|^2} \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} g \\ 2\operatorname{Im} g \\ |g|^2-1 \end{pmatrix} = \pi_s^{-1} \circ g \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \phi'' &= f' \frac{\phi'}{f} + f \cdot g' \begin{pmatrix} -g \\ ig \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -b &= \langle \phi'', N \rangle = \frac{1}{2i\lambda} \langle \phi'', \phi' \times \bar{\phi}' \rangle = \frac{1}{2i\lambda^2} \det(\phi'', \phi', \bar{\phi}') \\ &= f \cdot g' \left\langle \begin{pmatrix} -g \\ -ig \\ 1 \end{pmatrix}, N \right\rangle = f \cdot g' \frac{1}{1+|g|^2} \left\langle \begin{pmatrix} -g \\ ig \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g+\bar{g} \\ \frac{1}{i}(g-\bar{g}) \\ g\bar{g}-1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f \cdot g' \frac{1}{1+|g|^2} (-\underbrace{g\bar{g}}_{=|g|^2} - 1) = -f \cdot g' \end{aligned}$$

□

Folgerung:

Durch Vorgabe des Normalenbildes v ($\rightarrow g$) und der 2. Grundform ($II \rightarrow b \rightarrow f$) können gezielt Minimalfläche konstruiert werden. Dabei gilt:

KL-Parametrisierung $b_{12} = \operatorname{Im} b = 0 \Leftrightarrow b \equiv \operatorname{const} \in \mathbb{R}$ (o.E. $b \equiv 1$)

AL-Parametrisierung $-b_{12} = +b_{22} = \operatorname{Re} b = 0 \Leftrightarrow b \equiv \operatorname{const} \in i\mathbb{R}$ (o.E. $b \equiv i$)

Beispiel. 1.

$$b(w) = 1 \qquad g(w) = e^{iw} = e^{-v} e^{iu}$$

$$\Rightarrow f(w) = \frac{b(w)}{g'(w)} = \frac{1}{ie^{iw}}$$

$$\phi' = \frac{1}{ie^{iw}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{2iw} \\ i(1 + e^{2iw}) \\ 2e^{iw} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{i}(e^{-iw} - e^{iw}) \\ e^{-iw} + e^{iw} \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin w \\ \cos w \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(w) = \begin{pmatrix} \cos w \\ \sin w \\ -iw \end{pmatrix}$$

$x = \operatorname{Re} \phi$ ist ein Katenoid.

2. $\hat{b}(w) = i, \hat{g}(w) = e^{iw}$

$$\Rightarrow \hat{\phi}' = i\phi' \Rightarrow \hat{\phi} = i\phi \Rightarrow \hat{x} = \operatorname{Re}(i\phi) = -\operatorname{Im} \phi$$

Wendelfläche

3. $b(w) = 1, g(w) = w.$

$$\Rightarrow f(w) = \frac{b(w)}{g'(w)} = 1$$

$$\Rightarrow \phi'(w) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - w^2 \\ i(1 + w^2) \\ 2w \end{pmatrix}$$

$x = \operatorname{Re} \phi$ ist **Ennepersche Minimalfläche**

4. $\hat{b}(w) = i, \hat{g}(w) = w$

$$\Rightarrow \hat{\phi} = i\phi \Rightarrow \hat{x} = \operatorname{Re}(i\phi) = -\operatorname{Im} \phi$$

(zufällig) wieder die Ennepersche Minimalfläche.

Definition. Zu einer Minimalfläche $x = \operatorname{Re} \phi$ heißen die Minimalflächen

$${}^\alpha x := \operatorname{Re}(e^{i\alpha} \phi) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

die **Assoziierten**, speziell die Minimalfläche $\hat{x} := \frac{\pi}{2} x = \operatorname{Re}(i\phi) = -\operatorname{Im} \phi$ die **Adjungierte** (oder Konjugierte).

8 Spezielle Flächenklassen im \mathbb{R}^3

Eigenschaften:

$${}^\alpha\lambda = \lambda \Rightarrow ({}^\alpha g_{\rho\sigma}) = (g_{\rho\sigma})$$

Satz 8.10. *Die Assoziierten einer Minimalfläche bilden eine (zyklische) 1-Parameterschar isometrischer Minimalflächen und sind (innerhalb dieser Schar) ineinander verbiegbar. Es gilt*

$${}^\alpha x = \cos \alpha x + \sin \alpha \hat{x}$$

Index

- C^r - p -Fläche, 26
- C^r -Kurve, 7
- C^r -Weg, 6
- C^r -äquivalent, 25
- 1-Grundform-Matrix, 28
- 1. Grundform, 27
- 1. Normalvariation der Oberfläche, 57
- 1. Scherksche Minimalfläche, 58
- 2. Fundamentalform, 32
- 2. Grundform, 32
- 2. Scherksche Minimalfläche, 58
- 3. Fundamentalform, 39
- 3. Grundform, 39
- Ableitungsgleichungen, 30
- abwickelbar, 28
- Adjungierte, 67
- Affensattel, 45
- affin-invariant, 8
- Assoziierte, 67
- Asymptotenlinie, 47
- Asymptotenrichtung, 47
- Autoparallele, 36
- Böschungslinie, 19
- Böschungswinkel, 19
- Basistransformationsformel, 26
- Begleitbasis, 22
- Begleitebenen, 12
- Binormalenvektor, 12
- Bonnetscher Fundamentalsatz der Flächentheorie, 54
- Cauchy Riemann'schen Differentialgleichungen, 63
- Christoffelsymbole, 30
- Codazzi-Gleichung, 63
- Codazzigleichung für II , 53
- Darboux-Begleitbasis, 47
- Darboux-Vektor, 13
- Darbouxvektor, 19
- Darbox-Begleitbasis, 46
- differenzierbare Manigfaltigkeit, 8
- Drehformel, 19
- Dupinsche Indikatrix, 44
- Dupinscher Indikatormatrix, 47
- echte Nabelpunkte, 39
- einfach zusammenhängend, 55
- Einsteinsche Summationskonvention, 27
- Elliptischen Punkt, 47
- elliptischen Punkt, 45
- Ennepersche Minimalfläche, 65, 67
- Eulersche Parametrisierung, 41, 42
- flächenartig Messen, 28
- Flächepunkt, 45
- Flachpunkte, 39, 44
- Frenet-Begleitbasis, 12, 47
- Frenet-Kurven, 16
- Frenetsche Ableitungsgleichungen, 12
- Fundamentalform, 3., 39
- Fundamentalsatz der Kurventheorie, 16
- Gauß'sche Krümmung, 33
- Gauß-Kronecker- Krümmung, 33
- Gaußabbildung, 30
- Gaußgleichung, 53
- Gaußsche Ableitungsgleichungen, 30
- geodätisch parallel, 35
- geodätisch vollständig, 37
- Geodätische, 36, 47
- geodätische Torsion, 46
- geodätische Krümmung, 46
- Gerade Linien, 35
- Gesamtkrümmung, 13
- Grundform, 3., 39
- handle piont, 10

Index

- Hauptkrümmungen, 34
- Hauptkrümmungsrichtung, 47
- Hauptkrümmungsrichtungen, 34
- Hauptnormalenvektor, 12
- Hauptkrümmungsrichtnug, 47
- Henkelpunkt, 10, 12
- Hessematrix der Höhenfunktion F , 42
- holomorphen Minimalkurve, 63
- Hopf-Invariante, 63
- hyperbolsichen Punkt, 45
- Hyperfläche, 26

- inflection point, 9
- innengeometrische Größen, 29
- innergeometrische Größe, 47
- innergeometrische Größen, 33
- isometrisch, 28
- isotropen Tangentenvektor, 63
- isotropes Produkt, 62

- Katenoid, 63
- kineamtische Interpretation, 6
- Koeffizientenfunktion, 50
- konische Krümmung, 19
- kovariante Ableitung, 32, 34
- Krümmung, 22
- Krümmungsachse, 15
- Krümmungskreis, 15
- Krümmungslinie, 47
- Krümmungslinie, 47
- Krümmungsradius, 15

- LIE-Klammer, 51
- lokal injektiv, 25
- lokale kanonische Form, 14, 43
- Lokaler Umkehrsatz, 42

- M-Codazzi, 54
- Maßtensor, 27
- Meusnier, 48
- Minimalflächen, 34, 44
- Minimalkurve, 63
- Mittlere Krümmung, 33

- Nabelpunkte, 38
- Neil'sche Parabel, 7
- Normalenvektor, 46
- Normalebene, 12, 14

- Normalenabbildung, 30
- Normaleneinheitsvektor, 26
- Normalkrümmung, 46

- osculatinusspaces, 8
- oskluierende Räume, 8

- Parabelpunkt, 45
- Parallelfeld, 35
- Parallelschnitte, 44
- Parallelverschiebung, 35
- Parameter, 6
- Parameterdarstellung, 7
- Parameterlinien, 25
- Parametertransformation, 7, 8
- Parametertransformationfunktion, 26
- parametrisiere C^r - p -Fläche, 25
- Parametrisierung, 7
- Peano-Kurve, 6
- Plateausches Problem, 58
- positiv orientiert, 4

- regulär, 6, 25
- Rektifizierende Ebene, 12
- rektifizierende Ebene, 14
- Ricci-Lemma, 51
- Riemannsches Krümmungstensorfeld, 51
- Rodriguez, 49

- Schmiegebene, 12, 14
- Schmiegekugel, 15, 21
- Schmiegeparaboloid, 43
- Schmiegräume, 8
- Seitenvektor, 46
- selbstadjungiert, 34
- Singularitäten, 25
- sphärisch, 21
- sphärisches Bild, 30
- Spur, 6, 25
- Streifen, 46

- Tangentenvektor, 12
- Tangentialebene, 45
- Tangentialfläche, 29
- Tangentialraum, 25
- Theorema egregorium, 54
- Torsen, 30, 34
- Torsion, 12, 22

Torsionsinvariante, 63

Vektorprodukt, 4

verbiegbar, 28

Verbiegungsschar, 29

Vertauschbarkeitsrelation, 50

vollständiges System, 55

Weingartenendomorphismus, 32

Weingartenmatrizen, 33

Weingartensche Ableitungsgleichungen, 30

Wendelfläche, 63

Wendepunkt, 9

zulässige Parameterdarstellung, 26