

Skript Ana I bis III
— vervollständigt —
(nicht korrektur gelesen)

Wintersemester 2005
– Wintersemester 2006
L^AT_EX von Maximilian Michel

1. September 2008

Inhaltsverzeichnis

I. Analysis I	5
0. Grundlagen der Logik und der Mengenlehre	6
0.1. Grundbegriffe der Logik	6
0.2. Grundbegriffe der Mengenlehre	10
0.3. Relationen und Abbildungen	14
0.4. Die natürlichen Zahlen	19
1. Zahlenräume	22
1.1. Der Ring der ganzen und der Körper der rationalen Zahlen	22
1.2. Der Körper der reellen Zahlen	26
1.3. Körper der komplexen Zahlen	32
1.4. Die arithmetischen Vektorräume $\mathbb{R}^n$	33
2. Topologie des $\mathbb{R}^n$	35
2.1. Normierte Vektorräume	35
2.2. Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$	41
2.3. Unendliche Reihe	51
2.4. Stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$	59
2.5. Funktionenfolgen und -reihen	70
2.6. Potenzreihen	75
3. Spezielle Funktionen	88
3.1. Die Exponential- und die Logarithmus-Funktionen	88
3.2. Die hyperbolischen und Area-Funktionen	88
3.3. Die Kreis- und die Argument-Funktion	88
3.4. Die trigonometrischen und Arcus-Funktionen	89
3.5. Stammfunktionen	90
3.6. Stammfunktion einzelner Summanden	90
3.7. Grenzwerte von Reihen und Summen	91
II. Analysis II	92
4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen	93
4.1. Differentierbarkeit und Ableitung	93
4.2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seine Anwendung	99
4.3. Stammfunktion (unbestimmte Integrale)	110

4.4.	Taylorapproximation und Anwendung	120
4.5.	Das Riemannsche Integral	129
5.	Differentialrechnung in mehreren Variablen	147
5.1.	Partielle und totale Diffbarkeit	147
5.2.	Die Taylorsche Sätze	157
5.3.	Lokale Extrema	161
5.4.	Lokale Umkehrsätze	166
5.5.	Parameterabhängiges R -Integral	178
III.	Analysis III	186
6.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	187
6.1.	Problemstellung und geometrische Interpretation	187
6.2.	Elementare Lösungsmethoden	189
6.3.	Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen 1. Ordnung	192
6.4.	Lineare Differentialgleichungen	196
7.	Integralrechnung in mehreren Veränderlichen	207
7.1.	Das Riemannsche Integral über Quaderbereichen	207
7.2.	Das Riemannsche Integral über Jordan-messbaren Bereichen	214
7.3.	Der Satz von Fubini und der Transformationssatz für Riemann-Integrale	222
7.4.	Der Flächeninhalt p -dimensionaler Flächen im $\mathbb{R}^n$	228
7.5.	Das Lebesguesche Maß und Integral	231
8.	Differentialformen	249
8.1.	Äußere Potenzen von Vektorräumen	249
8.2.	Differentialformen und äußere Differentiale	252
8.3.	Kurven- und Flächenintegrale	256
8.4.	Der Satz von Stokes	259

Teil I.

Analysis I

0. Grundlagen der Logik und der Mengenlehre

Gegenüber der Logik und der Mengenlehre nehmen wir einen naiv-intuitiven Standpunkt ein und behandeln dieses Gebiet **nicht axiomatisch** als mathematische Disziplin.

0.1. Grundbegriffe der Logik

Wir führen im wesentlichen nur Abkürzungen ein um eine kürzere und präzisere Formulierung mathematischer Aussagen zu ermöglichen.

Wir gehen davon aus, dass eine mathematische Aussage entweder **wahr** oder **falsch** ist. Beispielsweise: „397 ist eine Primzahl“ ist eine mathematische Aussage. Diese ist **wahr**.

Bemerkung. *Dies ist eine starke Vereinfachung. In der Mathematik ist es an sich unerheblich, ob eine Aussage im **absoluten** Sinn **wahr** oder **falsch** ist. Die absolute Antwort gehört eher in den Bereich der Philosophie.*

Einzig wichtig ist:

- *ist eine Aussage aus den gegebenen **Grundannahmen (Axiomen)** beweisbar?*
- *ist eine Aussage **widerlegbar**?*
- *ist sie überhaupt entscheidbar?*

nicht jede Aussage ist beweisbar, als Beispiel sei hier die Kontinuumstheorie genannt.

Aus Aussagen α , β lassen sich mit Hilfe logischer Verknüpfungen neue Aussagen gewinnen.
aussagelogischer **Junktionen**

Hier eine Zusammenstellung der wichtigsten Axiome:

Negation $\neg\alpha$

„nicht α “

Konjunktion $\alpha \wedge \beta$

„ α und β “

Adjunktion $\alpha \vee \beta$

„ α oder β oder in beidem“

Logisches ausschließendes „oder“ $\alpha \vee \beta$

„entweder α **oder** β “

Implikation $\alpha \Rightarrow \beta$

„wenn α dann auch β “

„ α hat β zur Folge“

„aus α folgt β “

Koimplikation $\alpha \Leftrightarrow \beta$

„ α ist genau dann richtig, wenn β richtig ist“

Beispiel. Ihre Wahrheitswerte sind:

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w
		not	and	or	impl	equiv

Bemerkung. zu den letzten beiden Einträgen der $\alpha \Rightarrow \beta$ -Spalte: das lässt sich so lesen: „wenn α falsch ist, kann β machen, was es will, die Aussage ist wahr!“. Oder auch: „Wenn α richtig wäre (was es aber nicht ist), könnte auch β richtig sein, braucht es aber nicht“

Eine zusammengesetzte Aussage heißt **allgemeingültig (Tautologie)**, wenn sie bei jeder Belegung der Einzelaussagen mit „w/f“ den Wert **wahr** annimmt. So ist Beispielsweise $\alpha \vee \neg\alpha$ immer **wahr**

Bemerkung. Das Gegenteil dieser Aussage bezeichnet man als **Kontradiktion**, zum Beispiel ist $\alpha \wedge \neg\alpha$ immer **falsch**

Zwei Aussagen sind **äquivalent**, wenn die Koimplikation $\alpha \Leftrightarrow \beta$ allgemeingültig ist, das heißt, wenn α und β gleiche Wahrheitswerte besitzen. Als Beispiel sei hier

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \text{ äquivalent zu } \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

genannt.

Ist $\alpha(x)$ eine Aussage, die eine freie (nicht spezifizierte) **Variable** x enthält (zum Beispiel „ x ist eine Primzahl“), so können durch **prädikadenz logischer Quantoren** neue Aussagen gebildet werden.

Allquantor:

$$\forall_x \alpha(x)$$

was soviel bedeutet wie: „Für alle x gilt die Aussage $\alpha(x)$, bzw. „jedes x erfüllt $\alpha(x)$ “

Schreibweise auch: $\wedge$ statt $\forall$, da der Allquantor (bei endlich vielen Variablen) eine allgemeine „und“-Verbindung ist. Es gilt dann:

$$\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2) \wedge \alpha(x_3) \wedge \dots \wedge \alpha(x_n)$$

Existenzquantor:

$$\exists_x \alpha(x)$$

oder anders ausgedrückt: „Es existiert (mindestens) ein x mit $\alpha(x)$ “

Schreibweise auch: $\vee$, da er auch als verallgemeinerte „und“-Verbindung aufgefasst werden kann. Es gilt dann

$$\alpha(x_1) \vee \alpha(x_2) \vee \alpha(x_3) \dots \vee \alpha(x_n)$$

Wichtige Aussagen/Eigenschaften von $\forall$ und $\exists$:

1.

$$\neg \forall_x \alpha(x) \Leftrightarrow \exists \neg \alpha(x)$$

$$\neg \exists_x \alpha(x) \Leftrightarrow \forall \neg \alpha(x)$$

2. $\exists_x \forall_y \alpha(x, y) \Rightarrow \forall_y \exists_x \alpha(x, y)$

Gelesen: Es gibt ein (globales) x , sodass für alle y die Aussage $\alpha(x, y)$ richtig ist.

rechts: Zu jedem y gibt es ein (individuelles, eventuell von y abhängiges) x mit der Eigenschaft $\alpha(x, y)$

Vorsicht: Die Umkehrung („ $\Leftarrow$ “) ist im allgemeinen nicht richtig!

Definiert man (etwa zur Abkürzung) eine Aussage α durch eine Aussage (die wir bereits kennen) β , so schreibt man:

$$\alpha :\Leftrightarrow \beta$$

und sagen dazu: „ α sei gleichbedeutend mit β “ oder auch: „ α wird definiert durch β “

Beispiel. Quantor der Eindeutigen Existenz:

$$\exists!_x \alpha(x) = \underbrace{\exists_x \alpha(x)}_{\text{Existenz}} \wedge \underbrace{\forall_x \forall_y (\alpha(x) \wedge \alpha(y) \Rightarrow x = y)}_{\text{Eindeutigkeit}},$$

spricht: „Es gibt genau **ein** x mit $\alpha(x)$ “

Eingeschränkte Quantisierung mit der Elementarbeziehung „ $\in$ “ der Mengenlehre

$$\forall_{x \in A} \alpha(x) :\Leftrightarrow \forall_x (x \in A \Rightarrow \alpha(x)),$$

das heißt soviel wie: „wenn $x \in A$, dann haben sie die Eigenschaft $\alpha(x)$ “,

Weiter gibt es auch:

$$\exists_{x \in A} \alpha(x) :\Leftrightarrow \exists_x (x \in A \wedge \alpha(x))$$

Wichtige Beweismethoden

Zu den wichtigsten Beweismethoden gehören:

I der direkte Beweis (Abtrennungsregel)

wenn die Aussage α und auch die Implikation $\alpha \Rightarrow \beta$ richtig ist, dann muss (als Schlussfolgerung) auch die Aussage β richtig sein.

Beispiel. Bekannt ist:

1. Es ist Freitag morgen $[\alpha]$
2. Jeden Freitag gehe ich in die Analysis Vorlesung $[\alpha \rightarrow \beta]$
3. daraus folgt: ich sitze grade in der Vorlesung Analysis $[\beta]$

Praktische Anwendung: (Beweis von β):

$$\begin{array}{ll}
 \alpha & \text{Ausgangspunkt: Bekannter Sachverhalt} \\
 \Rightarrow \beta_1 & \\
 \Rightarrow \beta_2 & \text{logische Schlussfolgerungen} \\
 \vdots & \\
 \Rightarrow \beta & \text{liefern die Gültigkeit von } \beta
 \end{array}$$

Bemerkung. Wichtig ist hier die Verwendung von Folgepfeilen „ $\Rightarrow$ “! Man kann nicht einfach die Aussagen untereinander schreiben!

Weitere Anwendungen dieser Beweismethode: Beweis der Äquivalenz $\alpha \Leftrightarrow \beta$

1. Methode: Äquivalente Umformungen

$$\begin{array}{l}
 \alpha \\
 \Leftrightarrow \beta_1 \\
 \Leftrightarrow \beta_2 \\
 \vdots \\
 \Leftrightarrow \beta
 \end{array}$$

2. Methode: Getrennte Beweise von $\alpha \Rightarrow \beta$ und $\beta \Rightarrow \alpha$:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha & \beta \\
 \Rightarrow \beta_1 & \Rightarrow \alpha_1 \\
 \Rightarrow \beta_2 & \Rightarrow \alpha_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 \Rightarrow \beta_n & \Rightarrow \alpha_n \\
 \Rightarrow \beta & \Rightarrow \alpha
 \end{array}$$

diese Methode ist viel flexibler, da andere Zwischenschritte gewählt werden können.

II der indirekte Beweis (Widerspruchsbeweis)

wenn die Implikation $\neg\alpha \Rightarrow \beta$ richtig ist, aber β nicht, so muss die Aussage α richtig sein.

Annahme:

$$\begin{array}{llll}
 \neg\alpha & & \neg\alpha \Rightarrow \beta & \\
 \Rightarrow \beta_1 & & w & \mathbf{w} \quad w \\
 \Rightarrow \beta_2 & & w & \mathbf{f} \quad f \\
 \vdots & & f & \mathbf{w} \quad w \\
 \Rightarrow \beta & \text{Aber } \neg\beta!! & f & \mathbf{w} \quad f
 \end{array}$$

0. Grundlagen der Logik und der Mengenlehre

Annahme: der Sachverhalt $\neg\alpha$ liefert mir das β aus rein logischen Schlüssen. Dann folgt also: $\alpha \Rightarrow \dots \Rightarrow \neg\beta$. Der Widerspruch $\neg\beta$ zeigt, dass α richtig sein muss.

Bemerkung. *Mathematische Aussagen (Sätze) und ihre Beweise durch logische Schlüsse können Umgangssprachlich sein. Eine strenge Formalisierung mit Hilfe logischer Symbole ist nicht nötig. Die Formulierung muss aber so präzise sein, dass man die logische Struktur erkennen kann. Sonst wird es „gefasel“.*

0.2. Grundbegriffe der Mengenlehre

Eine gängige Definition einer Menge geht auf **Cantor** zurück:

Definition. Menge

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten zu einem ganzen

Bemerkung. *Dieser „naive“ Mengenbegriff ist logisch nicht haltbar und führt zu Widersprüchen (Antinomien). Heute gibt es verschiedene (äquivalente) axiomatische Mengenlehren, die (hoffentlich) konsistent sind.*

Grundsymbol ist das Zeichen „ $\in$ “ für die **Elementenbeziehung** $\boxed{x \in A}$, was soviel heißt wie: „ x ist Element von A “ oder „ x liegt in A “. Die Negation lautet: $x \notin A :\Leftrightarrow \neg(x \in A)$. Man kann auch sagen. $\in$ ist ein zweistelliges Prädikat, das aus den Objekten „ x “ und „ A “ eine Aussage macht „ $x \in A$ “.

Zwischen der Elementenbeziehung und der Gleichheit von Mengen besteht der fundamentale Zusammenhang

$$A = B \Leftrightarrow \forall_x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente haben.

Definiert man das Prädikat „ $\subset$ “ der Teilmengenbeziehung (**Inklusion**) durch

$$A \subset B :\Leftrightarrow \forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

so gilt:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Dies ist wichtig für den Beweis der Gleichheit.

Weitere Abkürzungen:

$$A \subsetneq B :\Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B \quad A \text{ ist echte Teilmenge von } B$$

$$A \supset B :\Leftrightarrow B \subset A$$

$$A \supsetneq B :\Leftrightarrow B \subset A \wedge B \neq A$$

usw.

Bemerkung. *Oft wird auch „ $\subseteq$ “ statt „ $\subset$ “ (für Teilmengen) bzw. „ $\subsetneq$ “ statt „ $\subsetneq$ “ (für echte Teilmengen) verwendet.*

Definiert man (etwa zur Abkürzung) eine neue Menge A durch eine schon bekannte Menge B schreibt man üblicherweise

$$A := B, \text{ (} A \text{ sei definitionsgemäß gleich } B \text{)}.$$

Ist E eine vorgegebene Grundmenge, so lässt sie sich durch Auswahl („Aussondern“) mittels einer Aussage $\alpha(x)$ der Teilmenge

$$\{x \in E \mid \alpha(x)\}$$

gewinnen, die genau alle Elemente aus E enthält, die die Aussage α erfüllen.

Beispiel.

$$p := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$$

Spezialfall:

$$\alpha(x) :\Leftrightarrow x = x_1 \wedge x = x_2 \wedge \cdots \wedge x = x_n$$

liefert die Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$, die genau die Elemente $x_1, \dots, x_n$ enthält.

Bemerkung. Eine unbeschränkte Auswahl „ $\{x \mid \alpha(x)\}$ “ ohne Angabe einer Grundmenge ist problematisch.

Die Definition

$$A := \{x \mid x = x\}$$

würde die **Allmenge** liefern, diese ist aber durch $A \in A$ widersprüchlich.

Unproblematisch ist die Definition

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\},$$

da man sie mit einer beliebigen Grundmenge E beschreiben kann.

Eigenschaften:

$$\forall_X \emptyset \subset X, \text{ denn: } \forall_x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in X)$$

Elementare Mengenoperationen erlauben aus vorgegebenen Mengen neue Mengen zu bilden.

Bemerkung. Zum Teil entsteht sie nicht durch „Aussondern“ aus einer bestehenden Menge. Trotzdem sind sie (auch in einer axiomatischen Mengenlehre) unproblematisch.

Die Russellschen Antinome

Wenn es eine Allmenge A (mit $A \in A$) gibt, dann gibt es auch die „Menge“

$$\mathcal{R} := \{x \mid x \notin x\},$$

die sogenannte **Russelsche Menge**.

Frage: gilt $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

Test: es gilt $\mathcal{R} \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{R}$ und das ist Unfug! Diese Menge ist widersprüchlich, also eine sogenannte **Unmenge**

Mengenbildungsprinzipien

Vereinigung einer Menge $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{A} &= \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \\ &:= \{x \mid \exists_{A \in \mathcal{A}} x \in A\}\end{aligned}$$

Spezialfall:

$$\mathcal{A} = \emptyset \quad \bigcup \emptyset = \left\{ x \mid \exists_A \left(\underbrace{A \in \emptyset}_f \vee x \in A \right) \right\} = \emptyset$$

Das heißt, es gibt zwar eine Vereinigungsmenge, aber diese ist leer!

Weitere Vereinigungen von Mengensystemen:

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{A} &= \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists_{A \in \mathcal{A}} x \in A\} \\ \mathcal{A} = \emptyset &: \bigcup \emptyset = \emptyset \\ \mathcal{A} = \{A\} &: \bigcup \{A\} = A \\ \mathcal{A} = \{A, B\} &: \bigcup \{A, B\} = A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}\end{aligned}$$

Durchschnitt eines nichtleeren Mengensystems

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A \mid A \in \mathcal{A}\} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \mid \forall_{A \in \mathcal{A}} x \in A\}$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{A\} &: \bigcap \{A\} = A \\ \mathcal{A} = \{A, B\} &: \bigcap \{A, B\} =: A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}\end{aligned}$$

Bemerkung. „ $\bigcap \emptyset$ “ ist nicht definiert! Dieser Durchschnitt würde wegen

$$x \in \bigcap \emptyset \Leftrightarrow \forall_{x \in \emptyset} \Leftrightarrow \forall_A (A \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

auf die Allmenge führen.

ABER: Betrachtet man nur Elemente der einen festen Grundmenge E , so ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap \emptyset = \{x \in E \mid \forall_{A \in \emptyset} y \in A\} = E$$

definierbar.

Zusatz: Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ heißen **disjunkt**.

Differenzmenge von zwei Mengen A und B

oder auch das **(relative) Komplement** von B bzgl A genannt ist das **mengentheoretische Abziehen**. In mathematischer Schreibweise:

$$A \setminus B = \mathbb{C}_A B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Das Kartesische Produkt zweier Mengen A und B

ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$

$$A \times B : \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Geordnete Elemente (Paare) besitzen die Eigenschaft:

$$(a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$$

Das **Tupel** (a, b) ist zu unterscheiden von der Zweiermenge $\{a, b\}$

Eine Verallgemeinerung auf endlich viele Faktoren $A_1, \dots, A_n$ ist problemlos möglich.

$$\times_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{a_1, \dots, a_n \mid \forall_{i=1}^n a_i \in A_i\}$$

Man nennt die Elemente $(a_1, \dots, a_n)$ (**geordnetes**) **n -Tupel**.

Gilt

$$\forall_{i=1}^n A_i = A$$

so schreibt man kurz

$$A^n = \times_{i=1}^n A_i$$

Beispiel.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}\}$$

Im weiteren Verlauf werden wir das auf beliebig viele Faktoren erweitern!

Potenzmenge einer Menge A

ist das System aller Teilmengen von A .

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}$$

Beispiel.

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (eine Einermenge, die als einziges Element die Leermenge enthält)

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Es gilt immer:

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$$

und

$$A \in \mathcal{P}(A)$$

0.3. Relationen und Abbildungen

Definition. Eine binäre (oder zweistellige) Relation Re zwischen der Menge A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. Gilt $(x, y) \in Re$ so sagt man: x steht in der Relation Re zu y . Man schreibt:

$$xRe\ y$$

Eine Relation Re in der Menge A ist eine Teilmenge $Re \subset A \times A$

1. **leere Relation:** $Re := \emptyset \subset A \times B$
2. **Allrelation:** $Re := A \times B \subset A \times B$
3. **Diagonale in A :** $Re := \{x, x \mid x \in A\} \subset A \times A$
das heißt: $xRe\ y \Leftrightarrow x = y$

wichtige Spezialfälle:

Definition. Eine Relation Re in der Menge A mit den Eigenschaften

A1 Reflexivität: $\forall_{x \in A} xRe\ x$

A2 Symmetrie: $\forall_{x, y \in A} xRe\ y \Rightarrow yRe\ x$

A3 Transitivität: $\forall_{x, y, z \in A} xRe\ y \wedge yRe\ z \Rightarrow xRe\ z$

heißt **Äquivalenzrelation**

Zwei Elemente $x, y \in A$ mit $xRe\ y$ heißen **äquivalent** und man schreibt meist

$$x \sim y$$

Die **Äquivalenzklasse** eines Elementes $x \in A$ ist die Teilmenge $[x] := \{y \in A \mid y \sim x\}$ von A

Beispiel.

1. $A := \{\text{Menge aller Geraden in der Ebene}\}$
 $Re := \{(g, h) \in A \times A \mid g \text{ parallel zu } h\}$
 g ist parallel zu g
 g ist parallel zu h , das heißt auch: h ist parallel zu g
2. $A := \text{Menge aller Menschen}$
 $Re := \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ Vater von } y\}$
das verletzt aber **A1**, **A2** und **A3**!

Eigenschaften der Äquivalenzklasse $[x]$

1. Es existiert keine leere Äquivalenzklasse!

Beweis. Wegen **A1** gilt immer $x \in [x]$

2. Zwei Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ sind

entweder **identisch** (das heißt $[x] = [y]$, nämlich falls $x \sim y$)

oder **disjunkt** (das heißt $[x] \cap [y] = \emptyset$, nämlich falls $x \not\sim y$)

Beweis. Für $x, y \in A$ gilt entweder $x \sim y$ oder $x \not\sim y$.

Fallunterscheidung

1. Fall, $(x \sim y)$: dann gilt:

$$[x] \subset [y], \text{ denn } z \in [x] \Rightarrow z \sim x \wedge x \sim y \xrightarrow{\mathbf{A1}} z \sim y \Rightarrow z \in [y]$$

$$[y] \subset [x], \text{ denn } z \in [y] \Rightarrow z \sim y \wedge x \sim y \xrightarrow{\mathbf{A2} \mathbf{A3}} z \sim x \Rightarrow z \in [x]$$

es folgt also: $[x] = [y]$

2. Fall, $x \not\sim y$: Wir Beweisen $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ durch Widerspruchsbeweis (also indirekt)

Annahme: $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, das heißt es existiert (mindestens) ein $z \in A$ mit

$$\left. \begin{array}{l} z \in [x], \text{ das heißt } z \sim x \\ \text{und } z \in [y], \text{ das heißt } z \sim y \end{array} \right\} \text{ dann müsste (nach } \mathbf{A2} \text{ und } \mathbf{A3}) x \sim y \text{ gelten}$$

also muss $[x] \cap [y] = \emptyset$ sein

□

damit haben wir bereits unseren ersten Satz bewiesen:

Satz 0.3.1. Satz über die Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation in einer Menge A induziert eine Zerlegung von A in nichtleere, paarweise disjunkte Äquivalenzklassen.

Weitere Bezeichnungen:

- **Repräsentant** einer Äquivalenzklasse $[x]$:

Jedes $y \in [x]$, denn $[x] = [y]$

- **Repräsentantensystem** Teilmenge $M \subset A$, die aus jeder Äquivalenzklassen genau ein Repräsentant enthält
- **Quotientenmenge** Menge aller Äquivalenzklassen (**Faktorenmenge**)

$$A|_{\sim} := \{[x] \in \mathcal{P}(A) \mid x \in A\} \subset \mathcal{P}(A)$$

Definition. Eine Relation Re einer Menge A mit den Eigenschaften

1. **Reflexivität:** $\forall_{x \in A} xRe x$

0. Grundlagen der Logik und der Mengenlehre

2. **Antisymmetrie:** $\forall_{x,y \in A} xRe y \wedge yRe x \Rightarrow x = y$

3. **Transitivität:** $\forall_{x,y,z \in A} xRe y \wedge yRe z \Rightarrow xRe z$

heißt **Ordnungsrelation (Halbordnung)** und man schreibt meist $\boxed{x \leq y}$
 Re heißt **Totalordnung (lineare Ordnung)**, wenn

$$\forall_{x,y \in A} xRe y \vee yRe x$$

Beispiel.

1. Die **natürliche Ordnung** „ $\leq$ “ in den Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (siehe später) ist eine **lineare Ordnung**.
2. In einem Mengensystem $\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$ wird durch

$$A \leq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$$

eine Ordnung „ $\leq$ “ definiert, die im allgemeinen **keine Totalordnung** ist. Es ist eine **Teilmengenrelation**

Beispiel. Sei $E := \{a, b\}$ ($a \neq b$) eine Paarmenge und

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

mit dem Ordnungsschema

$$\emptyset < \begin{matrix} \{a\} \\ \{b\} \end{matrix} < \{a, b\}$$

$\{a\}$ und $\{b\}$ sind bezüglich „ $<$ “ nicht vergleichbar!

Auch Abbildungen zwischen Mengen können als spezielle Relation, durch ihren Graphen definiert werden.

Definition. Eine Relation $f \subset A \times B$ zwischen den Mengen A und B heißt eine Abbildung A und B wenn gilt:

$$\forall_{x \in A} \exists!_{y \in B} (x, y) \in f$$

insbesondere:

$$(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$$

Jedem Element $x \in A$ wird genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet. Statt „ $f \subset A \times B$ “ und $(x, y) \in f$ schreibt man:

$$f : A \rightarrow B \quad x \mapsto y = f(x)$$

In Worten ausgedrückt: „ f bildet die Menge A nach B ab“. A heißt **Definitionsmenge**, B die **Zielmenge** und unter „**Bild**“ versteht man:

$$\text{im } f = f[A] := \{y \in B \mid \exists_{x \in A} f(x) = y\} = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$$

Weitere Bezeichnungen :

Gilt $y = f(x)$, so heißt „ y “ das **Bild** von „ x “ beziehungsweise „ x ein **Urbild** y “ unter f .
 Für Teilmengen $A' \subset A$, $B' \subset B$ heißt das Bild von A' : $f[A'] := \{f(x) \in B \mid x \in A'\}$ und
 $f[B'] := \{x \in A \mid f(x) \in B'\} \subset A$

Bemerkung. Abbildungen zwischen Zahlenräumen heißen auch **Funktionen**

Beispiel.

1. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) := \sin x \quad \text{im } f[-1, 1]$$

2. $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0; 1\}$

$$n \mapsto f(n) : \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{im } f = \{0; 1\}$$

3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto f(n) = n^2; \quad \text{im } f = \{1; 4; 9; \dots\}$$

4. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto f(x) = x^2; \quad \text{im } f = \mathbb{R}^+$$

Sie zeigen wichtige Eigenschaften von Abbildungen.

Definition. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt

1. **surjektiv**, wenn jedem $y \in B$ **mindestens ein Urbild** $x \in A$ besitzt, das heißt, wenn gilt:

$$\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} f(x) = y \text{ bzw. } f[A] = B,$$

oder mit anderen Worten: Die Bildmenge ist gleich Zielmenge.

Beispiel 2 und 4 sind surjektiv.

2. **injektiv**, wenn jedes $y \in B$ **höchstens ein Urbild** $x \in A$ besitzt, das heißt:

$$\forall_{x, x' \in A} (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')) \text{ bzw.}$$

$$\forall_{x, x' \in A} (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

Beispiel 3 und 4 sind injektiv.

3. **bijektiv**, also **Eindeutig und umkehrbar** **Eindeutig**, falls sie **surjektiv und injektiv** ist, das heißt also, dass jedes $y \in B$ genau ein Urbild $x \in A$ besitzt.

In diesem Fall existiert die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : B \rightarrow A$ mit den kennzeichnenden Eigenschaften:

$$\forall_{x \in A} f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } \forall_{y \in B} f(f^{-1}(y)) = y$$

Bemerkung. Bei einer (nur) injektiven Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist $f : A \rightarrow f[A] \subset B$ bijektiv und es existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : f[A] \rightarrow A$.

0. Grundlagen der Logik und der Mengenlehre

Definition. (a) Für Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ ist die **Komposition**, also die **Verkettung** bzw. die **Hintereinanderausführung** $g \circ f : A \rightarrow C$ [sprich: „ g “ nach „ f “] definiert durch

$$\forall_{x \in A} (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(b) Bei einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ und einer Teilmenge $A' \subset A$ heißt die Abbildung

$$f|_{A'} : A' \rightarrow B; \quad x \mapsto f(x)$$

die **Einschränkung** von f auf A'

Bemerkung. zu **(a)**:

Für die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$ einer Bijektion $f : A \rightarrow B$ gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

mit der **Identitätsabbildung**:

$$\begin{aligned} \text{id}_A : \quad A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x \\ \text{id}_B : \quad B &\rightarrow B \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

Für Abbildungen allgemein gilt:

$$f : A \mapsto B :\Leftrightarrow \forall_{x \in A} \exists!_{y \in B} f(x) = y$$

Zur Bezeichnung:

- **Bild**: statt $f[A']$ auch $f(A')$.
- **Urbild**: statt $f^{-1}[B']$ auch $f^{-1}(B')$, auch wenn f^{-1} gar nicht existiert!

Speziell geschriebene Abbildungen:

Eine Abbildung $a : I \rightarrow X$ heißt auch eine **Familie** von Elementen aus X bezeichnet mit $(a_i \in X)_{i \in I}$ oder kürzer: $(a_i)_{i \in I}$. Ihr Definitionsbereich I heißt dann **Indexmenge**, ein Wert $a_i := a(i)$ ein Glied der Familie und die zugehörige Bildmenge:

$$a[I] = \{a_i \in X \mid i \in I\} = \{a_i \in X\}_{i \in I}$$

Spezialfall: Eine Familie mit Indexmenge $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ heißt eine **Folge** von Elementen aus X bezeichnet mit $(a_k \in X)_{k \in \mathbb{N}}$ und ist nichts anderes als eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow X$. Weiter ist $B^A = \{f \in A \times B \mid f : A \rightarrow B\}$ die Menge aller Abbildungen von A nach B und entsprechend:

- X^I = Menge aller Familien $(a_i \in X)_{i \in I}$ bzw
- $X^{\mathbb{N}}$ = Menge aller Folgen $(a_k \in X)_{k \in \mathbb{N}}$

Bemerkung. Familien verallgemeinern den Begriff eines **geordneten Paares**

$$(a_i \in X)_{i \in I} = (b_i \in X)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall_{i \in I} a_i = b_i$$

Dies gilt **nicht** für die zugehörigen indizierten Mengen.

Man unterscheidet:

$$(a_i \in X)_{i \in I} \in X^I \text{ und } \{a_i \in X\}_{i \in I} \subset X$$

Jede Menge X kann als indizierte Menge aufgefasst werden. Setzt man $a_x = x$ (das heißt, $a = \text{id}_x$), so gilt:

$$X = \{a_x \mid x \in X\}$$

Für **Mengenfamilien** $(A_i \in \mathcal{A})_{i \in I}$ ist definiert:

- die Vereinigung:

$$\bigcup_{i \in I} = \bigcup \{A_i \in \mathcal{A} \mid i \in I\} = \{x \mid \exists_{i \in I} x \in A_i\}$$

- der Durchschnitt:

$$\bigcap_{i \in I} = \bigcap \{A_i \in \mathcal{A} \mid i \in I\} = \{x \mid \forall_{i \in I} x \in A_i\}$$

wobei $I \neq \emptyset$

- das kartesische Produkt:

$$\times_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid \forall_{i \in I} a_i \in A_i\}$$

Bemerkung. $\times_{i \in I} A_i$ verallgemeinert das in 0.2 auf Seite 10 eingeführte kartesische Produkt $A_1 \times A_2$ zweier Mengen. Man kann ein n -Tupel als Familie mit Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$

Einemenge

$$\begin{aligned} 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\} \\ n+1 &= n \cup \{n\} \end{aligned}$$

0.4. Die natürlichen Zahlen

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit dem Anfangselement 1 und der vom natürlichen Zählprozess gelieferten Nachfolgern, gebildet durch $n \mapsto n^+ = n + 1$, lässt sich durch die folgenden **Peano-Axiomen** charakterisieren.

P1 $1 \in \mathbb{N}$

P2 $\forall_{n \in \mathbb{N}} n^+ \in \mathbb{N}$, das heißt: $^+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

P3 $\forall_{n \in \mathbb{N}} n^+ \neq 1$, das heißt: $1 \notin \text{im}^+$

0. Grundlagen der Logik und der Mengenlehre

P4 $\forall_{m,n \in \mathbb{N}} m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$, das heißt $^+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist injektiv

P5 $\forall_{T \subseteq \mathbb{N}} (1 \in T \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} n \in T \Rightarrow (n+1) \in T \Rightarrow T = \mathbb{N})$

Aus **P5** folgt das Prinzip der **Vollständigen Induktion**. Es ist eine wichtige Beweismethode.

Ausführlicher geschrieben:

Ist T eine Teilmenge (**Induktionsmenge**) von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

1. **Induktionsanfang:** $1 \in T$

2. **Induktionsschritt:** $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in T \Rightarrow n+1 \in T)$

$n \in T$ mit einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$ (aus Induktionsannahme) folgt im Induktionsschluss, dass auch $n+1 \in T$ so gilt $T = \mathbb{N}$

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + \dots + (n-1)$$

gilt. Die Induktionsmenge ist hier

$$T := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \right\}$$

1. Induktionsanfang $1 \in T$ denn $2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \hat{=} 1^2 = 1$

2. Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Es sei n eine beliebige Zahl aus T

Induktionsschluss: Dann ist auch $n+1 \in T$, denn

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (2k-1)}_{\text{laut Ind. Annahme} = n^2} + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 2 + 1 \\ n^2 + 2n + 1 &= (n+1)^2 \\ (n+1)^2 &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung. Bei einfachen Aussagen $\alpha(n)$ braucht eine Induktionsmenge $T = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n)\}$ nicht explizit angegeben zu werden. Man zeigt dann, um $\forall_{n \in \mathbb{N}} \alpha(n)$ zu beweisen, $\alpha(1)$ **und** $\forall_{n \in \mathbb{N}} (\alpha(n) \Rightarrow \alpha(n+1))$. Sie ist aber nur in komplizierten Fällen zu empfehlen unter anderem, wenn mehrere Variablen vorkommen.

Im Beispiel wurde schon benutzt, dass in $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) natürliche Rechenoperationen „+“ und „−“ erklärt sind. Weiter ist $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{N}_0$) durch die vom Zählprozess induzierte natürliche Anordnung „ $\leq$ “ linear geordnet.

$\mathbb{N}$ (und $\mathbb{N}_0$) ist sogar Wohlgeordnet, das heißt es gilt **Wohlordnung (WO)**. Dies bedeutet, dass jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element:

$$\forall_{A \subseteq \mathbb{N}} (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{m \in A} \forall_{n \in A} m \leq n)$$

Bemerkung. 1. Ein solches kleinstes Element m ist wegen

$$\forall_{n \in A} m \neq n \wedge \forall_{n \in A} m' \leq n \Rightarrow m \leq m' \wedge m' \leq m \Rightarrow m = m'$$

eindeutig bestimmt und heißt **Minimum** von A

$$m = \min A$$

2. In jeder (halb $\sim$) geordneten Menge folgt aus der Wohlordnung auch die Totalordnung. Die Umkehrung ist im allgemeinen **nicht** richtig!

zum Beispiel besitzt $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ kein Minimum

3. Ein (teilweise umstrittener) Satz der Mengenlehre besagt, dass jede (noch so komplizierte) Menge wohlgeordnet werden kann. Als Hilfsmittel benötigt man das **Auswahlaxiom** und das **Zornsche Lemma**

Wir vergleichen Mengen bezüglich ihrer Elementenanzahl.

1. Zwei Mengen heißen **gleichmächtig**, wenn eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ existiert.
2. A heißt weniger Mächtig, als B , wenn eine Injektion existiert, das heißt A und $f[A] \subset B$ gleichmächtig sind.

3. Eine Menge A heißt

endlich, wenn sie Gleichmächtig einem Abschnitt $\{1, \dots, n\}$, mit $n \in \mathbb{N}$ oder leer sind.

abzählbar unendlich, wenn die gegebene Menge und die Menge $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. Zusammen sind sie abzählbar

ansonsten bezeichnet man die Menge als **überabzählbar**

Beispiel. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0 \supsetneq \mathbb{N}$ sind gleichmächtig, denn es gibt eine Abbildung (Projektion)

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1.$$

1. Zahlenräume

1.1. Der Ring der ganzen und der Körper der rationalen Zahlen

Eigenschaften des Zahlenraumes $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$)

A1 Algebraische Eigenschaften

bezüglich „ $(+)$ “ gilt die **Assoziativgesetz** und **Kommutativgesetz**, Kürzungsregel:

$$\begin{aligned}n_1 + l &= n_2 + l \\n_1 &= n_2\end{aligned}$$

bezüglich „ $(\cdot)$ “ gilt das **Assoziativgesetz**- und **Kommutativgesetz**

bezüglich „ $(x, \cdot)$ “ gilt das **Distributivgesetz**

A2 Ordnungseigenschaft: es gilt „ $(\leq)$ “ Totalordnung (genau genommen sogar Wohlordnung)

A3 Verträglichkeit (für $l \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}n_1 \leq n_2 &\Rightarrow n_1 + l \leq n_2 + l \\n_1 \leq n_2 &\Rightarrow n_1 \cdot l \leq n_2 \cdot l\end{aligned}$$

Fehler von $\mathbb{N}_0$ Gleichungen der Form

$$\boxed{n + x = m} \tag{1.1}$$

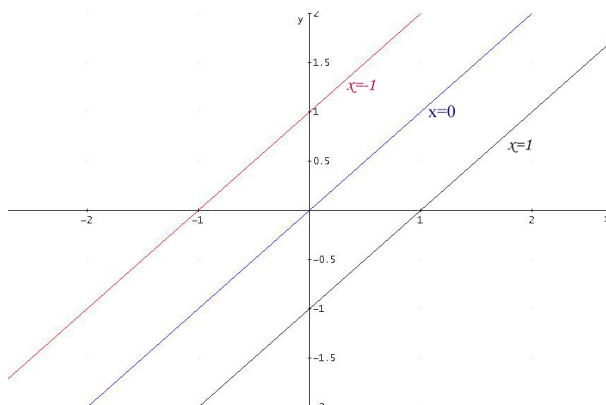
sind nicht für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ lösbar!

Ziel: Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ so, dass 1.1 immer lösbar ist.

Methode: Darstellung der gesuchten Lösung x als Paare $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $x + n = m$, also $x = m - n$

- $x = 1$ wird repräsentiert durch $(1, 0), (2, 1), (3, 2), \dots$
- $x = 0$ wird repräsentiert durch $(0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots$
- $x = -1$ wird repräsentiert durch $(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots$

1.1. Der Ring der ganzen und der Körper der rationalen Zahlen



Zusammenfassung der Paare zu **Äquivalenzklassen**

Satz 1.1.1.

1. In $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird durch

$$\begin{aligned} (m_1, n_1) &:\Leftrightarrow m_1 - n_2 = m_2 - n_2 \quad | + n_1; + n_2 \\ &\Rightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \end{aligned}$$

eine **Äquivalenzrelation** definiert. Die zugehörige **Äquivalenzklasse** $z = [(m, n)]$ bilden (als **Quotientenmenge**) die Menge

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N})|_{\sim}$$

2. Die Abbildung $i : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n, 0)]$ ist eine **Injektion**, unter der $i : [\mathbb{N}_0] \subset \mathbb{Z}$ mit $\mathbb{N}_0$ selbst identifiziert werden kann.

Damit gilt:

$$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$$

Bemerkung.

1. Axiome **A1** bis **A3** sind leicht zu überprüfen
2. i ist injektiv wegen

$$\begin{aligned} i(n_1) &= [(n_1, 0)] = [(n_2, 0)] = i(n_2) \\ &\Rightarrow (n_1, 0) \sim (n_2, 0) \\ &\stackrel{\text{Def. v. } \sim}{\Rightarrow} n_1 = n_2 \end{aligned}$$

Die Operatoren „+“, „ $\cdot$ “ sowie die Ordnung „ $\leq$ “ lassen sich von $\mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{Z}$ fortsetzen durch

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= [(m_1, n_1)] + [(m_2, n_2)] := [(m_1 + m_2, n_1 + n_2)] \\ z_1 \cdot z_2 &= [(m_1, n_1)] \cdot [(m_2, n_2)] := [(m_1 \cdot n_2 + n_2 \cdot n_1, m_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot m_2)] \\ z_1 &= [(m_1, n_1)] \leq [(m_2, n_2)] = z_2 \\ &:\Leftrightarrow m_1 n_2 \leq m_2 + n_1 \end{aligned}$$

Wichtig: Die Definitionen sind **unabhängig 0 von der Repräsentantenwahl!**

Definiert man zu $z := [(m, n)]$ das negative $-z := [(n, m)]$, so ist die Gleichung $z + x = 0$ jetzt eindeutig durch $x := -z + w$ lösbar

1. Zahlenräume

Eigenschaften des Zahlenraumes $\mathbb{Z}$

1. Algebraische Eigenschaften:

bezüglich „ $(+)$ “ eine **abelsche Gruppe**

bezüglich „ $(\cdot)$ “ assoziativ, kommutativ, das heißt es gilt die Kürzungsregel:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot w &= z_2 \cdot w & \wedge w &\neq 0 \\ \Rightarrow z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

bezüglich „ $(+, \cdot)$ “ distributiv

2. Ordnungselemente:

bezüglich „ $(\leq)$ “ gilt die Totalordnung (aber keine Wohlordnung)

3. Verträglichkeit:

$$\begin{aligned} z_1 \leq z_2 &\Rightarrow z_1 + w \leq z_2 + w \\ z_1 \leq z_2 \wedge w &\geq 0 \Rightarrow z_1 \cdot w \leq z_2 \cdot w \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Kürzungsregel ist äquivalent zu

$$z \cdot w = 0 \Rightarrow z = 0 \vee w = 0,$$

es gilt also die **Nullteilerfreiheit**

1 bis 3 besagen:

Satz 1.1.2. $\mathbb{Z}$ ist bezüglich $+, \cdot, \leq$ ein linear geordneter, nullteilerfreier kommutativer Ring mit **Einselement**

Fehler von $\mathbb{Z}$ Gleichungen der Form

$$\boxed{n \cdot x = m} \tag{1.2}$$

sind nicht für alle $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ lösbar. Im Besonderen ist 1.2 für $n = 0$ und $m \neq 0$ **niemals** lösbar!

Ziel: Erweiterung von $\mathbb{Z}$, sodass alle Gleichungen von 1.2 immer lösbar ist.

Methode: Darstellung der gesuchten Lösung x als Paare $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, Zusammenfassung dieser Paare zu Äquivalenzklassen liefert:

Satz 1.1.3.

1. In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wird durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) :\Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklasse $p = [(m, n)]$ bilden als Quotientenmenge die Menge $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0) / \sim$ die **rationalen Zahlen**

1.1. Der Ring der ganzen und der Körper der rationalen Zahlen

2. Die Abbildung $j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, n \mapsto [(n, 1)]$ ist eine Injektion unter der $j[\mathbb{Z}] \subset \mathbb{Q}$ mit selbst identifiziert werden kann. Dann gilt $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$+, \cdot, \leq$ lassen sich wieder von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ fortsetzen.

$+, \cdot, \leq$ lassen sich wieder von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ fortsetzen. Definiert man für $p := [(m, n)] \neq 0$ das Inverse $p^{-1} := [(n, m)]$, so ist die Gleichung $p \cdot x = q$ jetzt eindeutig durch $x := p^{-1}q =: \frac{q}{p}$ lösbar. Für $p \cdot x = 1$ gilt $x := p^{-1}$

Eigenschaften vom Zahlenraum $\mathbb{Q}$

1. Algebraische Eigenschaften **Körpereigenschaften**

bezüglich „ $(+)$ “ ist $\mathbb{Q}$ eine abelsche Gruppe

bezüglich „ $(\cdot)$ “ ist auch $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ebenfalls eine abelsche Gruppe

bezüglich „ $(+, \cdot)$ “ ist $\mathbb{Q}$ distributiv

2. Ordnungseigenschaften

bezüglich „ $(\leq)$ “ ist $\mathbb{Q}$ total geordnet

3. Verträglichkeit

$$\begin{aligned} p_1 \leq p_2 &\Rightarrow p_1 + q \leq p_2 + q \\ p_1 \leq p_2 \wedge q \geq 0 &\Rightarrow p_1 \cdot q \leq p_2 \cdot q \end{aligned}$$

Aus 1 bis 3 folgt:

Satz 1.1.4. $\mathbb{Q}$ ist bezüglich $+, \cdot, \leq$ ein **linear geordneter Körper**

Bemerkung. $\mathbb{Q}$ ist der kleinste, linear geordneter Körper, der $\mathbb{N}_0$, bzw. ein injektives Bild davon enthält.

Zur Mächtigkeit von $\mathbb{Z}$ und $I\mathbb{Q}$

Satz 1.1.5. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind **abzählbar unendliche** Mengen

Beweis.

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{Z} \text{ das heißt} & 0 &\mapsto 0 \\ & & 2n &\mapsto -n & 1 &\mapsto 1 \\ & & 2n &\mapsto n+1 & 2 &\mapsto -1 \\ & & & & 3 &\mapsto 2 \\ & & & & 4 &\mapsto -2 \end{aligned}$$

ist eine Bijektion. Also sind $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig, denn es gilt $f(k) = \frac{1}{4}(1 - (-1)^k \cdot (2k + 1))$. Beweisen kann man dies über die vollständige Induktion.

2. Eine explizite Abzählung von $\mathbb{Q}^+ := \{\frac{m}{n} > 0 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ liefert das **(1.) Cantorsche Diagonalverfahren**

Die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ ist zunächst nur surjektiv. Das Auslassen aller nicht teilerfremden Brüche liefert eine bijektioin. Erweiterung auf $\mathbb{Q}$ wie unter **1**

$n \backslash m$	1	2	3	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

□

1.2. Der Körper der reellen Zahlen

Auch der Körper der rationalen Zahlen besitzt noch immer „lücken“. So ist nicht jede Gleichung der Form

$$x^n = y \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}$$

lösbar. So löst keine rationale Zahl die Gleichung $x^2 = 2$

Beweis. durch Widerspruch: Sei $x = \frac{m}{n}$ eine Lösung $m, n \in \mathbb{N}$, m und n sind teilerfremd, das heißt auch, dass m und n nicht beide geradzahlig sind.

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{n^2} &= 2 \\ \Rightarrow m^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

m^2 ist gerade. Damit ist auch m selbst gerade, das heißt $m = 2 \cdot l$. Setzt man dies in die Gleichung ein, so folgt:

$$\begin{aligned} 4l^2 &= 2n^2 \\ 2l^2 &= n^2 \end{aligned}$$

n wäre damit auch geradzahlig!

Widerspruch zur Teilerfremdheit laut Aufgabenstellung! □

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lücken zu schließen um einen **vollständigen** Erweiterungskörper $\mathbb{R} > \mathbb{Q}$ zu erhalten. Mittel um diese Lücken zu schließen sind

- **Intervallschachtelung**
- **Dedekind'sche Schritte**
- **Äquivalenzklassenrelation**

Alle liefern das gleiche Ergebnis: **Vollständigkeit** kann mit der sogenannten **Supremumseigenschaft** charakterisiert werden.

Definition. Die Menge M sei durch $\leq$ linear geordnet.

1. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt nach oben beschränkt, wenn gilt:

$$\exists s \in M \forall a \in A \quad a \leq s$$

ein solches $s \in M$ heißt dann obere Schranke von A
(Analog geht die Definition für die untere Schranke).

2. Ein $s_0 \in M$ heißt **Supremum** (obere Grenze) der Teilmenge $A \subset M$, $s_0 = \sup A$, wenn es eine **kleinste obere Schranke** von A ist, das heißt, wenn für jede andere obere Schranke s von A gilt $s \geq s_0$
(Analog definiert man das **Infimum** ($\inf A$) also größte untere Schranke)

Bemerkung.

1. Ein Supremum/Infimum ist, wenn es existiert, **eindeutig** bestimmt, denn für 2 Suprema $s_0, \tilde{s}_0$ gilt $s_0 \geq \tilde{s}_0$ und $\tilde{s}_0 \geq s_0 \Rightarrow s_0 = \tilde{s}_0$
2. Ein **Supremum** s von A mit $s \in A$ heißt **Maximum** von A , geschrieben als „ $s = \max A$ “.
Ein **Infimum** s von A mit $s \in A$ heißt auch **Minimum** von A , geschrieben auch als „ $s = \min A$ “

Definition. Ein linear geordneter Körper heißt (**Ordnungs**)-**Vollständig**, wenn er die sogenannte **Supremumseigenschaft** erfüllt, das heißt, jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \neq \emptyset$ ein Supremum besitzt

Bemerkung.

1. In einem vollständigen, linear geordneten Körper K besitzt auch jede nach unten beschränkte Teilmenge $A \neq \emptyset$ ein Infimum
Begründung: Betrachte die Spiegelung im Punkt 0: $\tilde{A} := \{-x \in K \mid x \in A\}$
2. $\mathbb{Q}$ ist **nicht** vollständig, zum Beispiel besitzt die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ kein Supremum (**siehe später**)

Eine Möglichkeit um $\mathbb{Q}$ zu vervollständigen benutzt folgende Methode:

Man definiere eine reelle Zahl α als eventuell fehlendes Supremum einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$

$$\alpha \leftrightarrow \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}$$

durch eine bestimmte „Modellmenge“ $\alpha \subset \mathbb{Q}$, die dann diese Zahl als Supremum besitzt. Mit anderen Worten: Man ergänzt den Zahlenkörper der rationalen Zahlen mit den dazwischenliegenden reellen Zahlen.

Definition. Eine Teilmenge $\alpha \subset \mathbb{Q}$ heißt **Dedekindscher Schritt** in $\mathbb{Q}$, wenn mit $\bar{\alpha} := \mathbb{Q} \setminus \alpha$ gilt

D1 $\alpha \neq \emptyset, \bar{\alpha} \neq \emptyset$

D2 $\alpha < \bar{\alpha}$, das heißt $\forall p \in \alpha \forall q \in \bar{\alpha} \ p < q$

D2 α besitzt **kein** größtes Element, das heißt $\forall p \in \alpha \exists q \in \alpha \ q > p$

$$\alpha \leftrightarrow \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}$$

1. Zahlenräume

Satz 1.2.1. Satz über die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$

Der Menge $\mathbb{R}^* := \{\alpha \subset \mathbb{Q} \mid \alpha \text{ Schritt in } \mathbb{Q}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ wird durch die Inklusion $\subset$ linear geordnet und besitzt die Supremumseigenschaft.

$\mathbb{Q}$ selbst kann Ordnungsverträglich in $\mathbb{R}^*$ eingebettet werden

Beweis.

1. Die Inklusion „ $\subset$ “ definiert eine (Halb~)Ordnung in $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ erst recht in $\mathbb{R}^* \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
Zur **Totalordnung**: Seien α, β Schritte in $\mathbb{Q}$ mit $\neg(\alpha \subset \beta)$ zu zeigen ist $\beta \subset \alpha$ ein $p \in \alpha$. Wegen $\neg(\alpha \subset \beta)$ existiert ein $p \in \alpha$ mit $p \notin \beta$, das heißt $p \in \bar{\beta}$. Für jedes $q \in \beta$ gilt dann nach **D2** $q < p$. Dann ist auch $q \in \alpha$, denn falls $q \notin \alpha$, also $q \in \bar{\alpha}$ müsste nach **D2** $q > p$ gelten. Ein Widerspruch! Also ist $\beta \subset \alpha$
2. Sei $A \subset \mathbb{R}^*$ eine nichtleere Menge von Schnitten, die nach oben beschränkt ist, das heißt es existiert ein $\varrho \in \mathbb{R}^*$ mit $\forall_{\alpha \in A} \alpha \leq \varrho$ (das heißt $\alpha \subset \varrho$ mit ϱ als obere Schranke). Wir zeigen:

$$\sigma : s = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \in \mathbb{R}^*$$

ist Supremum von A

(a) Schnitteigenschaften:

D1:

$$\begin{aligned} A \neq \emptyset \quad \forall_{\alpha \in A} \alpha \neq \emptyset &\Rightarrow \sigma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \neq \emptyset \\ \forall_{\alpha \in A} \alpha \subset \varrho &\Rightarrow \forall_{\alpha \in A} \bar{\alpha} \supset \bar{\varrho} \Rightarrow \bar{\sigma} = \bigcap_{\alpha \in A} \bar{\alpha} \\ \bigcup_{\alpha \in A} \bar{\alpha} \supset \bar{\varrho} &\neq \emptyset \Rightarrow \sigma \neq \emptyset \end{aligned}$$

D2:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} p \in \sigma \Rightarrow \exists \alpha_0 \in A \\ q \in \bar{\sigma} \Rightarrow \forall_{\alpha \in A} q \in \bar{\alpha} \end{array} \right\} &\Rightarrow p \in \alpha_0 \wedge q \in \bar{\alpha}_0 \\ &\stackrel{\text{D2}}{\Rightarrow} p < q \end{aligned}$$

D3:

$$\begin{aligned} p \in \sigma &\Rightarrow p \in \alpha_0 \\ \alpha_0 \in A &\stackrel{\text{D3}}{\Rightarrow} \text{es existiert } q \in \alpha_0 \sigma \text{ mit } q > p \end{aligned}$$

(b) $\forall_{\alpha \in A} \alpha \subset \sigma$, das heißt $\alpha \leq \sigma \Rightarrow \sigma$ ist obere Schranke von A

Sei $\tilde{\sigma}$ eine weitere obere Schranke von A , das heißt $\forall_{\alpha \in A} \alpha \subset \tilde{\sigma}$. Dann ist auch $\sigma = \bigcap_{\alpha \subset A} \alpha \subset \tilde{\sigma}$, das heißt σ ist kleinste obere Schranke von A

3. Die Abbildung $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $r \mapsto r^* := \{p \in \mathbb{Q} \mid p < r\}$ ist wohl definiert, also $r^* \in \mathbb{R}^*$, und injektiv, denn $r \neq s \Rightarrow r^* \neq s^*$ und es gilt

$$r \leq s \Leftrightarrow r^* \subset s^*$$

also **Ordnungsvollständigkeit!**

□

Man kann jetzt auf $\mathbb{R}^*$ arithmetische Operationen $+$, $\cdot$ einführen, zum Beispiel $\alpha + \beta := \{r + s \in \mathbb{Q} \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$, so dass $\mathbb{R}$ bezüglich $+$, $\cdot$, $\leq (=c)$ einen vollständigen linear geordneten Körper bildet, der $\mathbb{Q}$, (bzw. sein injektives Bild $\mathbb{Q}^* = i[\mathbb{Q}] \subset \mathbb{R}^*$) als Teilkörper enthält. Das ist allerdings nicht so einfach. Finden kann man dies in diversen Literaturen, Beispielsweise EBBINGHAUSEN u.a. unter „Zahlen“.

Man kann zeigen, dass je zwei solche Körper, egal wie konstruiert, **isomorph** sind, das heißt es existiert eine Bijektion f zwischen ihnen die $+$, $\cdot$, $\leq$ respektiert:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \\ x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \end{aligned}$$

Es gilt:

Satz 1.2.2. Hauptsatz über den Raum $\mathbb{R}$

Es gibt (bis auf die Isometrie) genau einen (**ordnungs-**) **vollständigen linear geordneten Körper**, das heißt $\mathbb{Q}$ (bzw. ein injektives Bild) als Teilkörper, enthält genau **Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.

Wir arbeiten im folgenden mit dieser Beschreibung von $\mathbb{R}$, nicht mit einem speziellen Modell (etwa $\mathbb{R}^*$)

Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, analog $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **abgeschlossenes Intervall**
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **offenes Intervall**
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ **halboffenes Intervall**

Zusatz: Mann kann die linear geordneten Menge $\mathbb{R}$ ergänzen durch zwei Symbole $-\infty$ und $\infty \notin \mathbb{R}$ mit $\forall_{x \in \mathbb{R}} -\infty < x < \infty$. Dieses liefert die abgeschlossene reelle Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Körperstruktur von $\mathbb{R}$ kann aber nicht auf $\bar{\mathbb{R}}$ fortgesetzt werden.

Bezeichnung: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$ und analog $] -\infty, a]$, $]a, +\infty[$, $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Wichtige Eigenschaften von $\mathbb{R}$

Satz 1.2.3. $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet, das heißt zu je 2 positiven Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n \cdot x > y$

Bedeutung: Es gibt keine unendlich großen und unendlich kleine Zahlen!

Beweis. Seien $x, y > 0$ vorgegeben und $A := \{n \cdot x \in \mathbb{R} \mid n \subseteq \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

Wäre die Aussage falsch, also gelte $\forall_{n \in \mathbb{N}} n \cdot x \leq y$, so wäre y eine obere Schranke von A und es gäbe ein Supremum $s = \sup A$.

$s - x < s$ ist dann keine obere Schranke von A , das heißt es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot x > s - x$.

Es folgt $\underbrace{(m+1) \cdot x}_{\in A} > s$ im Widerspruch zu $s = \sup A$ □

1. Zahlenräume

Folgerung.

1. In $\mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\mathbb{N}$ **nicht beschränkt**

$$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} n > y$$

2. Zu jedem auch noch so kleinen $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Satz 1.2.4. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, das heißt zwischen je zwei reellen Zahlen x, y liegt eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$, also:

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}} (x < y) \Rightarrow \exists_{q \in \mathbb{Q}} x < q < y$$

Beweis. Sei zunächst $0 \leq x < y$.

Wegen: $y - x > 0$ gilt nach Satz 1.2.3

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} n(y - x) > 1 \quad (1.3)$$

Die Menge $M := \{k \in \mathbb{N} \mid k > n \cdot x\} \subset \mathbb{N}$ ist nicht leer und besitzt daher ein kleinstes Element $m \in \mathbb{N}$ (folgt aus der Wohlordnung).

Für dieses m gilt dann

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \in M, & \text{das heißt } m > n \cdot x \\ m - 1 \notin M, & \text{das heißt } m - 1 \leq n \cdot x \end{array} \right\},$$

also zusammen:

$$m - 1 \leq n \cdot x < m \quad (1.4)$$

wobei:

$$m - 1 \leq n \cdot x \quad (1.5)$$

und:

$$n \cdot x > m \quad (1.6)$$

Aus 1.3 und 1.4 folgt:

$$n \cdot \overset{1.6}{<} m \overset{1.5}{\leq} n \cdot x + 1 \overset{1.3}{<} n \cdot y,$$

also $x < \frac{m}{n} < y$.

Der Fall $x < 0 < y$ ist trivial □

Satz 1.2.5. Satz über die existenz von Wurzeln

$$\forall_{y > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists!_{x > 0} x^n = y$$

Schreibweise: $x = \sqrt[n]{y}$ oder $y^{\frac{1}{n}}$

Beweis. Eindeutigkeit: Aus $0 \leq x_1 < x_2$ folgt $x_1^n < x_2^n$

Existenz: Sei $A := \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t^n < y\}$

Es gilt:

1. $A \neq \emptyset$, denn für $t := \frac{y}{1+y} > 0$ gilt: $t < 1$ und $t < y$, also t^n

$$t^n \leq t < y \text{ das heißt: } t \in A$$

2. A ist nach oben beschränkt: Für $t := 1 + y$ gilt $t^n = (1 + y)^n > 1 + y > y$ das heißt t ist obere Schranke von A

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert also eindeutig ein $x = \sup A$

Behauptung Für dieses x gilt $x^n = y$

(a) **Annahme:** $x^n < y$

Wir wählen ein h mit $0 < h < \min \left\{ \frac{y-x^n}{n(x+1)^{n-1}}, 1 \right\}$. Für dieses gilt dann:

$$\begin{aligned} (x+n)^n - x^n &= ((x+n) - x) \cdot ((x+n)^{n-1}x^0 + (x+n)^{n-2} \cdot x \dots + (x+n)^0 \cdot x^{n-1}) \\ &< h \cdot n(x+h)^{n-1} \stackrel{h < 1}{\leq} h \cdot n(x+1)^{n-1} \\ &\stackrel{x \rightarrow x+h}{<} y - x^n \end{aligned}$$

also $(x+h)^n < y$ das heißt $x+h \in A$. Also kann x keine obere Schranke von A sein.

(b) **Annahme:** $x^n > y$ Setze $h := \frac{x^n - y}{n \cdot x^{n-1}}$ ist $0 < h < x$. Für alle $t \geq x - h > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} x^n - t^n &\leq x^n - (x-h)^n \\ &\stackrel{h < 1}{<} h \cdot n x^{n-1} = x^n - y \end{aligned}$$

also $t^n > y$. das heißt $t \notin A$, oder es gilt für alle $t \in A$ $t < x - h$. Folglich ist $x - h < x$ eine obere Schranke von A und x **keine** kleinste obere Schranke.

Wegen der Totalordnung bleibt nur $x^n = y$ übrig. □

Beweis. Der Beweis zeigt auch, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist. Für $n = 2$, $y = 2$ nehme man an, die Menge $A = \{t \in \mathbb{Q}^+ \mid t^2 < 2\}$ besitze ein Supremum $x \in \mathbb{Q}$. Wie unter (a) und (b) zeigt man in $\mathbb{Q}$, dass die Fälle $x^2 < 2$ und $x^2 > 2$ ausscheiden. Aber auch $x^2 = 2$ ist nicht möglich. Ein Widerspruch! □

Definition. Eine Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $S_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ (mit $a_k \leq b_k$) heißt **monoton fallend**, falls

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} S_{k+1} \subset S_k, \text{ (d.h. } S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots)$$

Satz 1.2.6. Prinzip der Intervallschachtelung

Jede monoton fallende Folge $(S_k \subset \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle besitzt einen nicht-leeren Durchschnitt.

Beweis. Wegen $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ gilt $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$. Die Menge $A := \{a_n \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist also nicht leer und ist nach oben beschränkt. Demzufolge existiert $S = \sup A \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} a_k \leq S,$$

1. Zahlenräume

da S obere Schranke von A ist. Also gilt:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} S \in [a_k, b_k] = ik, \text{ das hei\ss t } S \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

□

Bemerkung. Diese Eigenschaft wird auch dazu benutzt, $\mathbb{R}$ über Intervallschachtelung zu definieren.

Satz 1.2.7. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar!

Beweis. Sei $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, k \mapsto x_k$ eine Abzählung von $\mathbb{R}$, also eine Bijektion. Wir konstruieren jetzt eine Folge von abgeschlossenen Intervallen durch

$$\begin{aligned} S_1 &= [a_1, b_1] \text{ mit } a_1 < b_1, x_1 \notin S_1 \\ S_2 &= [a_2, b_2] \text{ mit } a_2 < b_2, x_2 \notin S_2 \text{ und } S_2 < S_1 \end{aligned}$$

Dies ist möglich. Ma teile S_1 in drei gleichgroße Teilintervalle und wähle

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{linkes Drittel 1.} \\ \text{rechtes Drittel 2.} \\ \text{egal welches 3.} \end{array} \right\}$$

1. falls x_2 in der rechten Hälfte von S_1
2. falls x_2 in der linken Hälfte von S_1
3. wenn $x_2 \notin S_1$

Es entsteht eine monoton fallende Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wobei nach Satz 1.2.6 ein Element $s \in \bigcap S_k$ existiert.

Dieses $s \in \mathbb{R}$ liegt in allen Intervallen. S_k ist also verschieden von allen x_k ($k \in \mathbb{N}$). Dies steht im Widerspruch zu $\mathbb{R} = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ □

1.3. Körper der komplexen Zahlen

Fehler von $\mathbb{R}$: Noch immer ist nicht jede Gleichung der Form $x^n = y$ lösbar, zum Beispiel nicht $x^2 = -1$.

Gesucht: Erweiterungsmöglichkeiten von $\mathbb{R}$, in dem diese Gleichung auch lösbar ist.

Konstruktion: Wir definieren in der **komplexen Ebene** $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ arithmetische Operationen durch:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Dadurch wird $\mathbb{C}$ zu einem Körper.

Durch die Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ wird $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ eingebettet, wobei die Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ verträglich sind

$$\begin{aligned}(x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0) \\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) &= (x_1 \cdot x_2, 0)\end{aligned}$$

In $\mathbb{C}$ ist jetzt $x^2 = -1$ lösbar, denn für die **imaginäre Einheit** $i := (0, 1)$ gilt $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Schreibweise für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$

$$z(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

In dieser Schreibweise gilt:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 + i(y_1 + x_2 + x_1y_2) + \underbrace{i^2}_{=-1}y_1y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)\end{aligned}$$

Man rechnet wie gewohnt und berücksichtigt

$$i^2 = -1$$

Weiter Bezeichnungen.

- Für $z = x + iy$ heißt $\bar{z} := x - iy$, die zu z **konjugiert komplexe Zahl**, was einer Spiegelung an der reellen Achse entspricht.
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}_0^+$ der **Betrag von** z . Diese Betragsfunktion entspricht dem **euklidischen Abstand** von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vom Nullpunkt.

Trick bei Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

Wichtig: Die lineare Ordnung $\geq$ auf $\mathbb{R}$ kann **nicht** auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden!

Bemerkung. Es gibt auch noch höhere Zahlenräume:

$$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$$

Wobei $\mathbb{H}$ die **Hamilton-Quaternionen** und $\mathbb{O}$ **Cayleysche Oktave** ist.

1.4. Die arithmetischen Vektorräume $\mathbb{R}^n$

Bekannt: Der $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ bilden einen n -dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Addition $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

1. Zahlenräume

Skalare Multiplikation $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Skalarprodukt In diesem Vektorraum ist durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert mit den Eigenschaften:

(SK1) Bilinearität

$$\langle x + \tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle$$

$$\langle x, y + \tilde{y} \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, \tilde{y} \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

(SK2) Symmetrie $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(SK3) Positive definitheit $\langle x, x \rangle \geq 0$ für den Fall: $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Standard Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

es induziert die **euklidische Längenfunktion (euklidische Norm)** mit den Eigenschaften

N1 $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} (|x| \geq 0) \cap (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ **positive definitheit**

N2 $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \forall_{\lambda \in \mathbb{R}} |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ **Homogenität**

N3 $\forall_{x, y \in \mathbb{R}^n} |x + y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

Um **N3** zu beweisen, ist die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| \quad [\text{Dreiecksungleichung}]$$

nützlich!

Beweis. Für $z := |x|^2 \cdot y - \langle x, y \rangle \cdot x$ gilt:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \langle z, z \rangle = |x|^4 \cdot \langle y, y \rangle - 2|x|^2 \langle x, y \rangle \cdot \langle x, y \rangle + \cancel{\langle x, y \rangle^2} \cdot \langle x, y \rangle \\ &= |x|^2 (|x|^2 \cdot |y|^2 - \langle x, y \rangle) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Beweis. **N3**

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

□

Bemerkung. **N1 bis N3** gilt auch für den komplexen Betrag, denn

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Topologie ist die Lehre von **konvergenz** und **stetigkeit**.

Betrachtete Räume sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$, $\mathbb{R}^3, \dots$

Gemeinsame Eigenschaften: Es sind allesamt Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit einer Längenfunktion $x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$

Verallgemeinert:

2.1. Normierte Vektorräume

Definition. Ein (reeller) **normierter Vektorraum** V ist ein VR über $\mathbb{R}$, auf dem eine **Längenfunktion** oder eine **Norm** definiert ist mit den Eigenschaften:

(N1) $\forall x \in V (|x| \geq 0 \cap (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0))$ **positive definitheit**

(N2) $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} |\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ **homogenität**

(N3) $\forall x, y \in V |x + y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

(N3') $\forall x, y \in V |x - y| \geq ||x| - |y||$ **Umgekehrte Dreiecksungleichung**

Beispiel.

1. $\mathbb{R}$ mit der **Betragsfunktion**:

$$x \mapsto |x| = \begin{pmatrix} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^n$ mit der **euklidischen Norm**

$$x \mapsto |x| = |x|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

3. $\mathbb{R}^n$ mit der **Maximumsnorm**

$$\begin{aligned} x \mapsto |x| &= |x|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \\ \forall_{k=1}^n |x_k + y_k| &\leq |x_k| + |y_k| \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i| = |x|_\infty + |y|_\infty \\ \Rightarrow |x + y|_\infty &= \max_k |x_k + y_k| \leq |x|_\infty + |y|_\infty \end{aligned}$$

4. $\mathbb{R}^n$ mit der **1-Norm**

$$x \mapsto |x| = |x|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

5. $\mathbb{C}$ mit der **Betragsfunktion**

$$z \mapsto |z| = |(x, y)|_2$$

Bemerkung.

1. Jede Norm $|\cdot|$ induziert eine Abstandsfunktion (**Metrik**) $d : * \times * \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) := |y - x|$$

2. Es gibt auch ∞ dimensionale normierte Räume

Topologische Grundbegriffe

Definition. * Sei ein normierter VR

1. Eine Teilmenge der Gestalt $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in * \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ heißt eine ε -**Umgebung** von $x_0 \in *$
2. Eine Teilmenge U heißt **Umgebung** von $x_0 \in *$, wenn es eine ε -Umgebung von x_0 gibt ($U_\varepsilon(x_0)$) mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Die Menge aller Umgebungen von x_0 bildet das **Umgebungssystem** von x_0 bezeichnet mit $\mathcal{U}(x_0)$

Beispiel.

1. In $\mathbb{R}$ gilt $U_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, etwa $[x_0, x_0 + 1]$ und $\mathbb{R}$ selbst eine Umgebung von x_0 $[x_0, x_0 + 1[$ ist **keine** Umgebung von x_0
2. Im $\mathbb{R}^2$ sind die **Einheitskugeln** $U_1(0)$ mit Mittelpunkt 0
bezüglich der euklidischen Norm eine Kreisscheibe ohne Rand
bezüglich der Maximumsnorm achsenparallele Quadrate ohne Rand, denn

$$\begin{aligned} x \in U_0^\infty(0) &\Leftrightarrow |x|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1 \\ &\Leftrightarrow |x_1| < 1 \wedge |x_2| < 1 \end{aligned}$$

Eigenschaften jedes normierten Raumes:

Satz 2.1.1. Hausdorfsche Trennungsregel

Zu je zwei (voneinander verschiedenen) Punkten x, y eines normierten Raumes gibt es Umgebungen $U \subset \mathcal{U}(x)$, $V \subset \mathcal{U}(y)$ mit leeren Durchschnitt.

Beweis. Für $\varepsilon := \frac{1}{2} |y - x| > 0$ gilt $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$, denn

$$\begin{aligned} z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) &\Rightarrow |z - x| < \varepsilon \wedge |z - y| < \varepsilon \\ |x - y| &= |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| < 2\varepsilon = |y - x| \\ &\Rightarrow |x - y| < |y - x| \end{aligned}$$

□

Definition. $*$ sei ein Raum

1. Eine Teilmenge Q heißt **offen**, wenn es die Umgebung **jedes ihrer Punkte** ist, das heißt: wenn

$$\forall_{x \in Q} Q \in \mathcal{U}(x)$$

Beispiel: $]0, 1[\Rightarrow 0 < x < 1$

Jede **Vollkugel** $K_r(x_0) = \{x \in * \mid |x - x_0| \leq r\}$, $r \geq 0$ ist abgeschlossen (insbesondere jede 1-Punkt-Menge $\{x_0\} = K_0(x_0)$)

2. Eine Teilmenge heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $\complement_* A$ offen ist.

Jede ε Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ ist offen.

Kennzeichnung: $Q \subset *$ offen $\Leftrightarrow \forall_{x \in Q} \exists_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(x) \subset Q$. Oder mit anderen Worten: Zu jedem x existiert eine Umgebung ε die vollständig in Q liegt.

Beispiel. $\emptyset$ und $*$ selbst sind offen und abgeschlossen gleichzeitig.

Beweis.

$$(a) \quad \forall_x \underbrace{(x \in \emptyset)}_f \Rightarrow \underbrace{\emptyset}_{w} \in \mathcal{U}(x)$$

$$(b) \quad \forall_x U_1(x) \subset *$$

□

Definition. Jede ε Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ ist offen

Beweis. Für $x \in U_\varepsilon(x_0)$ setze $\delta := \varepsilon - |x - x_0| > 0$. Dann gilt $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x_0)$, denn

$$y \in U_\delta(x) \Rightarrow |y - x| < \delta \Rightarrow |y - x_0| = |(y - x) + (x - x_0)| \leq |y - x| + |x - x_0| < \delta + |x - x_0| = \varepsilon$$

Spezialfall: Jedes offene Intervall $]a, b[= U_\varepsilon(x_0)$ ist offen, genauso wie $[a, +\infty[$, $] -\infty, b[$.

□

Definition. Jede **Vollkugel** $K_r(x_0) = \{x \in * \mid |x - x_0| \leq r\}$ $r \geq 0$ ist abgeschlossen. Insbesondere ist jede 1-Punktmenge $\{x_0\} = K_0(x_0)$

Beweis. Für $x \in K_r(x_0)$ gilt $|x - x_0| \leq r$, also $\delta := |x - x_0| - r > 0$. Dann ist $U_\delta(x) \subset \complement K_r(x_0)$, denn

$$\begin{aligned} y \in U_\delta(x) &\Rightarrow |y - x| < \delta \\ &\Rightarrow |y - x_0| = |y - x + x - x_0| \\ &= |(y - x) + (x - x_0)| \geq ||y - x| - |x - x_0|| \\ &= |x_0 - x| - |y - x| > |x_0 - x| - \delta = r \end{aligned}$$

Es folgt damit $y \in \complement K_r(x_0)$, also ist $\complement K_r(x_0)$ offen, das heißt $K_r(x_0)$ ist abgeschlossen. □

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Spezialfall: Jedes abgeschlossene Intervall der Form $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber auch $] -\infty, b]$ und $[a, +\infty[$. Intervalle der Form $]a, b]$ oder $[a, b[$ sind weder offen noch abgeschlossen.

Satz 2.1.2. Satz über offene Mengen

In einem normierte Vektorraum $*$ gilt:

(O1) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen

$$\forall_{i \in I} Q_i \text{ offen} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} Q_i \text{ offen}$$

Insbesondere $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} Q_i$ offen

(O2) Der **Durchschnitt** endlich vieler offener Mengen ist offen

$$\forall_{i=1}^n Q_i \text{ offen} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n Q_i \text{ offen}$$

Insbesondere ist $*$ $=: \bigcap_{i \in \emptyset} Q_i$ offen.

Bemerkung.

(O1) $x \in \bigcup_{i \in I} Q_i \Rightarrow \exists_{j \in I} x \in Q_j \xrightarrow{Q_j \text{ offen}} \exists_{j \in I} \exists_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(x) \subset Q_j$

(O2)

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^n Q_i &\Rightarrow \forall_{j \in I} x \in Q_j = \forall_{j \in I} \exists_{\varepsilon_j > 0} U_{\varepsilon_j}(x) \subset Q_j \\ &\Rightarrow \exists_{\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}} \forall_{j=1}^n U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_j}(x) \subset Q_j \\ &\Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^n Q_i \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen braucht nicht offen zu sein.

Beispiel.

1. Archimedische Ordnung

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[}_{\text{offen}} = \underbrace{\{0\}}_{\text{nicht offen}}$$

2. Räume x in denen ein beliebiges System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(*)$ von „offenen“ Teilmengen ausgezeichnet ist, mit (O1) und (O2), heißen topologische Räume. In ihnen kann schon **Konvergenz** und **Stetigkeit** definiert werden.

Satz 2.1.3. Satz über Umgebungssysteme

Im $\mathbb{R}^n$ liefert die **1-Norm**, **euklidische Norm** und **Maximumsnorm** dieselben **Umgebungssysteme** und damit dieselben offenen Mengen.

Bemerkung. Zu zeigen ist

$$\mathcal{U}^{(1)}(x) = \mathcal{U}^{(2)}(x) = \mathcal{U}^{(\infty)}(x)$$

ohne Einschränkung sei $x = 0$. Wir vergleichen

$$|x|_r := \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |x_i|^r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

mit $|x|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$:

(a)

$$\begin{aligned} \forall_k |x_r| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|^r = |x|_r^r \Rightarrow \forall_k |x_k| \leq |x|_r \\ &\Rightarrow |x|_\infty = \max_k |x_k| \leq |x|_r \end{aligned}$$

$$\text{Dies zeigt } U_\varepsilon^{(r)}(0) \subset U_\varepsilon^{(\infty)}(0)$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \forall_x x \in U_\varepsilon^{(r)}(0) &\Rightarrow |x|_r < \varepsilon \Rightarrow |x|_\infty < \varepsilon \\ &\Rightarrow x \in U_\varepsilon^{(\infty)}(0) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \forall_k |x_k| &\leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i| = |x|_\infty \Rightarrow \forall_k |x_k|^r \leq |x|_\infty^r \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k|^r \leq n \cdot |x|_\infty^r \Rightarrow |x|_r = \sqrt[r]{\sum_{k=1}^n |x_k|^r} \leq \sqrt[r]{n} |x|_\infty \end{aligned}$$

$$\text{Dies zeigt } U_\varepsilon^{(\infty)}(0) \leq U_{\frac{\varepsilon}{\sqrt[r]{n}}}^{(r)}(0)$$

denn $\forall_x |x|_\infty \Rightarrow |x|_r \leq \frac{1}{\sqrt[r]{n}} n \cdot \varepsilon$. Zusammen folgt: Jede r -Umgebung ist auch ∞ -Umgebung und Umgekehrt

Folgerung. Mann kann in $\mathbb{R}^n$ wahlweise mit „runden“ oder „eckigen“ ε -Umgebungen arbeiten. Alle topologischen Begriffe, die mit Hilfe von Umgebungen beziehungsweise offene Mengen definiert sind, sind unabhängig von der Wahl des Umgebungssystems.

Definition. Sei A eine Teilmenge eines normierten Raumes

1. Eine **offene Überdeckung** von A ist ein System $\{Q_i \mid i \in I\}$ von offenen Mengen, wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ ist
2. A heißt **kompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{Q_i \mid i \in I\}$ von A eine endliche Teilüberdeckung $\{Q_i \mid i \in I_0 \subset I\}$ (wobei I_0 endlich ist) gibt (mit $A \subset \bigcup_{i \in I_0} Q_i$)

Im $\mathbb{R}^n$ lassen sich kompakte Mengen einfach kennzeichnen:

Definition. Eine Teilmenge A eines normierten Raumes $*$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $r > 0$ gibt, mit $\forall_{x \in A} |x| \leq r$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Satz 2.1.4. Satz von Heine Borel

Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie **abgeschlossen** und **beschränkt** ist. Zum Beweis benötigen wir mehrere Hilfssätze

Lemma 2.1. $K \subset *$ kompakt $\Rightarrow K$ beschränkt (siehe Übung)

Lemma 2.2. $K \subset *$ kompakt $\Rightarrow K$ abgeschlossen

Beweis. Sei $y \in \mathbb{C}K$ beliebig. Dann gibt es nach der Hausdorfschen Trennungseigenschaft zu jedem $x \in K$ offene Umgebungen U_x von x und V_x von y ist $U_x \cap V_x = \emptyset$, das heißt $V_x \subset \mathbb{C}U_x$. Das System $\{U_x \mid x \in K\}$ bildet dann eine offene Überdeckung von K und existiert nach Voraussetzung endlich viele $x_1, \dots, x_m$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$, $V := \bigcap_{i=1}^m V_{x_i}$ ist dann als endlicher Durchschnitt eine offene Umgebung von y mit $V \subset \bigcap_{i=1}^m \mathbb{C}U_{x_i} = \mathbb{C}\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \subset \mathbb{C}K$. Also ist $\mathbb{C}K$ offen und K selbst abgeschlossen. $\square$

Lemma 2.3. $W \subset *$ kompakt, $K \subset W$ abgeschlossen $\Rightarrow K$ kompakt (siehe Übungen)

Lemma 2.1 bis 2.3 gelten in jedem normierten Raum $*$

Lemma 2.4. Ein Spezialfall von $\mathbb{R}^n$ ist

Jeder abgeschlossene Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt

Beweis. $\{Q_i \mid i \in I\}$ sei eine offene Überdeckung von $W = K_r^{(\infty)}(0)$

Annahme: Es gibt keine endliche Teilmenge von W . Wir unterteilen $W_0 = W$ in 2^n gleichgroße Teilmengen. Mindestens eine davon ist nicht unendlich überdeckbar, wie etwa $W_1 = K_{\frac{r}{2}}(x_1)$, sonst wäre auch ganz W unendlich überdeckbar. Die Wiederholung liefert eine monoton fallende Folge $W_0 > W_1 > W_2 > \dots > W_k$ mit $\forall_{k \in \mathbb{N}_0} W_k = K_{\frac{r}{2^k}}(x_k)$.

Nach Satz 1.2.6 existiert ein Punkt $\bar{x} \in \bigcap_{r \in \mathbb{N}_0} W_k$ (dies folgt aus der Supremumseigenschaft), das heißt $\forall_{k \in \mathbb{N}} |\bar{x} - x_k| \leq \frac{r}{2^k}$. Da $\{Q_i \mid i \in I\}$ den Würfel W überdeckt, gibt es ein (offenes) Q_{io} mit $\bar{x} \in Q_{io}$, also auch eine ε -Umgebung $U_\varepsilon^{(\infty)}(\bar{x}) \subset Q_{io}$. Wählt man jetzt $k > \frac{2r}{\varepsilon}$, also auch $2^k > \frac{2r}{\varepsilon}$ beziehungsweise $\frac{r}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$, so ist $W_k \subset U_\varepsilon^{(\infty)}(\bar{x})$, denn:

$$x \in W_k \Rightarrow |x - x_k| \leq \frac{r}{2^k} \Rightarrow |x - \bar{x}| \leq \underbrace{|x - x_k|}_{\leq \frac{r}{2^k}} + \underbrace{|x_k - \bar{x}|}_{\leq \frac{r}{2^k}} < \varepsilon$$

Damit gilt $W \subset Q_{io}$, das heißt, W_k lässt sich von dem Teilsystem $\{Q_{io} \subset \{Q_i \mid i \in I\}\}$ überdecken. Und dies steht im **Widerspruch** zur Konstruktion der W_k 's

(a) $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

$\stackrel{2.1}{\Rightarrow} K$ beschränkt

$\stackrel{2.2}{\Rightarrow} K$ abgeschlossen

dies gilt in jedem normierten Raum $*$

(b)

$$K \subset \mathbb{R}^n \left\{ \begin{array}{l} \text{beschränkt} \\ \text{abgeschlossen} \end{array} \stackrel{2.4}{\Rightarrow} K \subset W \text{ mit } W \text{ kompakt} \right\} \stackrel{2.3}{\Rightarrow} K \text{ kompakt}$$

$\square$

2.2. Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

Zur Erinnerung, eine Folge $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ ist nichts anderes als eine Abbildung $k \in \mathbb{N} \mapsto x_k \in \mathbb{R}^n$

A Konvergenz von Punktfolgen

Definition. Eine Punktfolge $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, wenn es einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass in jeder Umgebung von x fasst alle (also alle bis auf endlich viele) Folgenglieder liegen. x heißt dann **Grenzwert** oder **Limes** der Folge und man schreibt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ oder $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Sie heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Folgerung. Das Konvergenzverhalten ändert sich nicht, wenn man (endlich viele) Folgenglieder hinzufügt, abändert oder weglässt.

Der nachfolgende Satz ist nur eine Umformulierung der Definition.

Satz 2.2.1. Satz über die Konvergenz von Folgen

Eine Folge $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall k \geq m |x_k - x| < \varepsilon}$$

Dabei ist **jede Norm erlaubt!**

Satz 2.2.2. Jede konvergente Folge ist beschränkt (das heißt $\exists r > 0 \forall k \in \mathbb{N} |x_k| \leq r$) und ihr Grenzwert ist **eindeutig** bestimmt.

Beweis.

(a) $(x_k) \rightarrow x \Rightarrow$ fast alle x_k bis auf etwa $x_{k_1}, \dots, x_{k_n}$ liegen in $U_1(x) \Rightarrow$ alle x_k liegen in $K_r(0)$ mit $r := \max\{|x_{k_n}|, |x| + 1\}$, denn $|x_k - x| < 1 \Rightarrow |x_k| = |x_k - x + x| \leq |x_k - x| + |x| < |x| + 1$

(b) Annahme $(x_k) \rightarrow x, (x_b) \rightarrow y$ mit $k \neq b \rightarrow$ es existieren disjunkte Umgebungen U von x und V von y . In beiden müssten fast alle Folgenglieder liegen. Ein **Widerspruch**

□

Bemerkung. Nullfolgen

Nach 2.2.1 gilt $(x_k)_k \rightarrow x \Leftrightarrow (x_k - x) \rightarrow 0$. Solche Folgen nennt man **Nullfolgen**.

Beispiel.

$$1 \quad \boxed{\forall p \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^p} = 0}$$

Beweis. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es (laut Archimedes) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m = \sqrt[p]{\varepsilon} > 1$. Daraus folgt $k \geq m \Rightarrow \left| \frac{1}{k^p} - 0 \right| = \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{m^p} < (\sqrt[p]{\varepsilon})^p = \varepsilon$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

$$2 \quad \boxed{\forall_{p \in \mathbb{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{k}} = 0}$$

Beweis. analog wie oben (zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot \varepsilon^p > 1$ und so weiter)

3 Die Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x \in \mathbb{R}$ konvergiert für $|x| > 1$ mit $\lim x^k = 0$ und konvergiert für $-x = 1$ mit $\lim x^k = 1$. Für alle anderen x divergiert die Folge

Bemerkung. Für $x = 0$ und $x = 1$ hat man konstante Folgen, die trivialerweise konvergiert. Für $x = -1$ erhält man die Folge $(-1, 1, -1, \dots)$, das heißt in jeder Umgebung von $x = +1$ und $x = -1$ liegen ∞ -viele Folgenglieder. Sie kann also nicht konvergieren.

Beweis.

(c) $0 < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} = 1 + n > 1$, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|^k} &= (1 + n)^k = 1 + \binom{k}{1} n + \binom{k}{2} n^2 + \dots \leq 1 + k \cdot n = k \cdot \frac{1 - |x|}{|x|} \\ \Rightarrow |x|^k &< \frac{|x|}{1 - |x|} \cdot \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot \varepsilon > \frac{|x|}{1 - |x|}$

Für $k \geq m$ gilt dann

$$|x^k| \leq |x|^k \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{|x|}{1 - |x|} \leq \frac{|x|}{1 - |x|} \cdot \frac{1}{m} < \varepsilon$$

(d) $|x| > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|x|} < 1$ zu jedem $r > 0$, also $\varepsilon = \frac{1}{r} > 0$ gibt es dann nach (c) ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq m$ $\left| \frac{1}{x^k} \right| < \varepsilon = \frac{1}{r}$ also $|x^k| < r$. Die Folge ist also unbeschränkt und kann demnach nicht konvergieren.

□

Satz 2.2.3. Satz über Rechenregeln konvergenter (Punkt-)Folgen

Falls $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$, $(y_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\lambda_k \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent, dann folgt:

(a) $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$

(b) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k \cdot x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$

(c) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \cdot x_k \right) = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \neq 0$

(d) $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = |\lim_{k \rightarrow \infty} x_k|$

Beweis.

(a) $\varepsilon > 0$ existiert

ein $m_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq m_1$ gilt $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

ein $m_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq m_2$ gilt $|y_k - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ Für $k \geq m := \max\{m_1, m_2\}$ gilt dann

$$\underbrace{|(x_k - y_k) - (x + y)|}_{< 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon} \leq \underbrace{|x_k - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_k - y|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

(b) Da (x_k) beschränkt ist, existiert ein $r > 0$ mit $\forall_k |x_k| \leq r$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k > m_1$: $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{r + |\lambda|}$ ein $m_3 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq m_3$ $|\lambda_k - \lambda| < \frac{\varepsilon}{r + |\lambda|}$ Für $k \geq m := \max\{m_1, m_2\}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\lambda_k \cdot x_k - \lambda \cdot x| &= |(\lambda_k - \lambda)x_k + \lambda(x_k - x)| \\ &\leq \underbrace{|\lambda_k - \lambda|}_{< \varepsilon} \underbrace{|x_k|}_{\leq r} + |\lambda| \cdot \underbrace{|x_k - x|}_{< \varepsilon} < (r + |\lambda|) \cdot \frac{\varepsilon}{r + |\lambda|} = \varepsilon \end{aligned}$$

(c) Wegen (b) braucht man nur zu zeigen $\left(\frac{1}{\lambda_k} \in \mathbb{R}\right)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$. Zunächst gibt es ein $m_4 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq m_4$ gilt. $|\lambda_k \rightarrow \lambda| < \frac{1}{2} |\lambda|$, also auch $\lambda > \frac{1}{2} |\lambda|$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $m_3 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq m_3$ $|\lambda_k - \lambda| < \varepsilon \frac{1}{2} \lambda^2$. Für $k \geq m = \max\{m_3, m_4\}$, gilt dann

$$\left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda} \right| = \frac{|\lambda_k - \lambda|}{|\lambda_k| \cdot |\lambda|} < \frac{|\lambda_k - \lambda|}{\frac{1}{2} |\lambda|^2} < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2} \lambda^2} \cdot \frac{1}{2} \lambda^2 = \varepsilon$$

(d) $||x_k| - |x|| \leq |x_k - x|$ ist die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Anwendung:

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{5k^2 + 7k}{8k^2 - 9} \right)_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{5 + 7\frac{1}{k}}{8 - \frac{9}{k^2}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

wegen $\lim_{k \in \mathbb{N}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} = 0$ folgt nach Rechenregel:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^2 + 7k}{8k^2 - 9} = \frac{5}{8}$$

Die Konvergenz von Punktfolgen kann man an ihren Komponentenfolgen erkennen.

□

Satz 2.2.4. Eine Punktfolge $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge $(x_{k_i} \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen a_i konvergiert. ($i = 1, \dots, n$).

Beweis.

$$\begin{aligned} (x_k) &\rightarrow a \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \geq m |x_k - a|_{\infty} < \varepsilon \\ \max_{i=1, \dots, n} |x_{k_{ii}} - a_i| < \varepsilon &\Leftrightarrow \forall_{i=1}^n \forall_{\varepsilon > 0} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \geq m |x_{k_{ii}} - a_i| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \forall_{i=1}^n [\forall_{\varepsilon > 0} \exists m_i \in \mathbb{N} \forall k \geq m_i |x_{k_{ii}} - a_i| < \varepsilon] \\ &\Leftrightarrow \forall_{i=1}^n (x_{k_{ii}} \rightarrow a_i) \end{aligned}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Die Umkehrung ist in diesem Fall aber doch richtig, denn

$$\begin{aligned} \forall_{i=1}^n (x_{k_{ii}}) \rightarrow &\Leftrightarrow \forall_{i=1}^n [\forall_{i>0} \exists_{m_i} \forall_{k \geq m_i} |x_{k_{ii}} - a_i| < \varepsilon] \\ &\Rightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{m:=\max\{m_1, m_2\}} \forall_{k \geq m} \forall_{i=1}^n |x_{k-i} - a_i| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_m \forall_{k \geq m} |x_k - a|_\infty < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow (x_k) \rightarrow a \end{aligned}$$

□

Für Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$ gilt weiter:

Satz 2.2.5. Satz über Sandwich-Theorem und Ähnlichkeit von Folgen

$(x_k \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}, (y_k \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ seien konvergent,

(a) Wenn für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $x_k \leq y_k$, dann gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$

(b) Sandwich-Theorem

ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine weitere Zahlenfolge mit $x_k \leq a_k \leq y_k$, für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt außerdem $\lim x_k = \lim y_k =: a$ dann konvergiert auch $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen a

Beweis.

(a) Wäre $x = \lim x_k > y = \lim y_k$ so gäbe es disjunkte ε -Umgebung U von x und V von y sodass für fast alle k gilt: $x_k \in U, y_k \in V$. Also wäre für fast alle k : $x_k > y_k$. Dies steht im **Widerspruch** zur Voraussetzung

(b) In jeder ε -Umgebung von a liegen fast alle x_k und y_k , also fast alle $a_k \in [x_k, y_k]$

□

Beispiel.

$$4 \quad \forall_{a>0} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = 1$$

Beweis. Sei zunächst $a \geq 1$. Für $y_k := \sqrt[k]{a} - 1 \geq 0$ gilt:

$$a = (1 + y_k)^k \stackrel{\text{bin. Formel}}{\geq} 1 + ky_k,$$

$$\text{also } 0 \leq y_k \leq \underbrace{(a-1) \frac{1}{k}}_{\rightarrow 0}$$

$\Rightarrow$ Sandwich-Theorem liefert: $\lim y_k = 0$, also $\lim \sqrt[k]{a} = 1$

Für $0 < a < 1$ ist $\frac{1}{a} > 1$, also $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{a}} = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{a}} = \frac{1}{1} = 1 \Leftarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = 1$$

5 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}$

Beweis. Für $y_k = \sqrt[k]{k} - 1 \geq 0$ gilt $k = |1 + y_k|^k \geq 1 + \binom{k}{2} \cdot y_k^2$

$$\begin{aligned} k-1 &\geq \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} y_k^2 \Rightarrow 0 \leq y_k^2 \leq \frac{2}{k} \\ (1 &\geq \frac{k}{2} y_k^2 \Rightarrow \frac{2}{k} \geq y_k^2) \\ &\Rightarrow 0 \leq y_k \leq \sqrt{\frac{2}{k}} \end{aligned}$$

Nach Beispiel ist $\lim \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 0$, also auch $\lim y_k = 0$

Wie kann man den Grenzwert feststellen, ohne den Grenzwert zu kennen?

Definition. Eine Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ heißt

monoton wachsend, wenn $\forall_{k \in \mathbb{N}} x_k \leq x_{k+1}$

streng monoton wachsend, wenn $\forall_{k \in \mathbb{N}} x_k < x_{k+1}$

monoton fallend, wenn $\forall_{k \in \mathbb{N}} x_k \geq x_{k+1}$

streng monoton fallend, wenn $\forall_{k \in \mathbb{N}} x_k > x_{k+1}$

Es gilt:

(streng) monoton $\Leftrightarrow$ (streng) monoton wachsend oder fallend.

Satz 2.2.6. Konvergenzkriterium für monotone Zahlenfolgen

Eine monotone Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie **beschränkt** ist.

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ nach Satz 2.2.2

„ $\Rightarrow$ “ $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine monoton wachsend, das heißt $\forall_k x_k \leq x_{k+1}$ und beschränkt. Dann existiert $x := \sup\{x_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} x_k \leq x$ als obere Schranke.

Weiter gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x - \varepsilon < x_m < x$, sonst wäre $x - \varepsilon$ eine noch kleinere obere Schranke! Für alle $k \geq m$ gilt dann

$$x - \varepsilon < x_m \overset{\text{monotonie}}{\leq} x_k \leq x,$$

das heißt: $x_k \in U_\varepsilon(x)$

□

Bemerkung. Dieses Kriterium ist ein reiner Existenzsatz und bildet im allgemeinen **keine** Möglichkeit, den Limes zu berechnen. Im Gegenteil, man braucht ihn meist dazu, um Zahlen zu definieren. Beispiel:

$$e := \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beispiel.

(a) Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ ist

$$\boxed{(1-x)^k \geq 1-kx} \quad \boxed{\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

streng monoton steigend, denn

$$\begin{aligned} \frac{x_k}{x_{k-1}} &= \left(\frac{1+k}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1} = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^k \cdot \frac{k}{k-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k \cdot \frac{k}{k-1} \stackrel{\text{Übung}}{>} \left(1 - k \cdot \frac{1}{k^2}\right) \cdot \frac{k}{k-1} = 1 \end{aligned}$$

also $x_k > x_{k-1} \geq x_1 = 2$

beschränkt, denn

$$\begin{aligned} 2 < x_k &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \stackrel{\text{bin. Formel}}{=} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{1}{k^l} \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \cdot \underbrace{\frac{k}{k}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{(k-1)}{k}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{(k-l+1)}{k}}_{\leq 1} \\ &\leq \boxed{\sum_{l=0}^k \frac{1}{l!}} \stackrel{l \geq 2^{l+1}}{\leq} 1 + \sum_{l=1}^k \frac{1}{2^{l-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Sie konvergiert also und für $e := \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^k$ gilt

$$2 \stackrel{\text{wg. strenger Monotonie}}{<} e \leq 3$$

(b) Die Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $y_k := \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!}$ ist ebenfalls (streng) monoton steigend und beschränkt mit $x_k \leq y_k \leq 3$. Für ihren Grenzwert

$$y := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \left(=: \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \right)$$

gilt dann $e \leq y$. Wir zeigen, dass sogar $e = y$:

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Für alle $k \geq m$ gilt dann

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{1}{k^l} \geq \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \dots \cdot \frac{k-l+1}{k} \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{l-1}{k}\right)}_{\rightarrow 1}, \end{aligned}$$

also

$$e \geq y_m = \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!}$$

Damit ist auch

$$e \geq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = y$$

Da nun $e \leq y$ und $e \geq y$ ist, folgt $e = y$

Eine Zusammenfassung ist:

Satz 2.2.7. Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} \in]2, 3]$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass e irrational ist (vgl. Übung)

Definition. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Punktfolge $(x_k \in \mathbb{R}^n)$, wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

Präzisierung: x ist Häufungspunkt von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall m \in \mathbb{N} \exists k \geq m \quad |x_k - x| < \varepsilon$

Beispiel.

1. Jede konvergente Folge hat **genau einen** Häufungspunkt, ihren Limes
2. Die Folge $\left((-1)^k + \frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}, \dots\right)$ hat genau die zwei Häufungspunkte $x = \pm 1$ und kann demnach **nicht konvergieren**

Definition. Ist $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Punktfolge und $l \in \mathbb{N} \mapsto k_l \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge von Indizes, das heißt also $l < m \Rightarrow (l \leq) k_l < k_m$, so heißt die Folge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Bemerkung. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert und besitzt denselben Grenzwert.

Beispiel. Die (nicht konvergente) Folge $\left((-1)^k + \frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt zwei konvergente Teilfolgen, nämlich

1. $[k_l = 2\varphi] \left(1 + \frac{1}{2l}\right)_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow 1$
2. $[k_l = 2\varphi - 1] \left(-1 + \frac{1}{2l-1}\right)_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow -1$

Satz 2.2.8. Satz von Bolzano-Weierstraß

1. Jede **beschränkte** Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
2. Jeder Häufungspunkt einer Folge im $\mathbb{R}^n$ ist Grenzwert einer konvergenten Teilfolge

Beweis.

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

1. Da (x_k) beschränkt ist, liegen alle Folgenglieder in einem Würfel $W = \overset{\infty}{K}_r(0)$

Annahme: kein $x \in \mathbb{R}^n$ ist Häufungspunkt der Folge. Dann besitzt jeder Punkt $x \in W$ eine offene Umgebung Q_x , in der nur höchstens endlich viele Folgenglieder liegen. Das System $\{Q_x \mid x \in W\}$ bildet dann eine offene Überdeckung von W . Da W nach Satz 2.1.4 (Satz von Heine Borel) **kompakt** ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{Q_{x_1}, \dots, Q_{x_N}\}$. In jedem Q_{x_i} ($i = 1, \dots, N$) liegen endlich viele x_k 's, also auch in $W \subset \bigcup_{i=1}^N Q_{x_i}$, ein **Widerspruch**

2. Sei x ein Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Wir konstruieren rekursiv eine konvergente Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow x$. Da in **jeder** Umgebung von x ∞ -viele Folgenglieder liegen, gibt es

in $U_1(x)$ ein Folgenglied x_{k_1}

in $U_{\frac{1}{2}}(x)$ ein Folgenglied x_{k_2} mit $k_2 > k_1$ (sonst nur $x_1, \dots, x_{k_1} \in U_{\frac{1}{2}}(x)$)

in $U_{\frac{1}{l}}(x)$ ein Folgenglied x_{k_l} mit $k_l > k_{l-1} \dots$

Insgesamt erhält man eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad |x_{k_l} - x| < \frac{1}{l}.$$

Daraus folgt:

In jeder Umgebung $U_{\frac{1}{l}}(x)$ liegen fast alle x_{k_l} , (nämlich $x_{k_l}, x_{k_{l+1}}, x_{k_{l+2}}, \dots$) $\Rightarrow$ in Jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(x)$ liegen fast alle x_{k_l} , denn es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{l} < \varepsilon \quad \textbf{Archimedes}$$

□

Bemerkung. Beschränkte Zahlenfolgen können ∞ -iele Häufungspunkte haben, es gibt aber im $\mathbb{R}^n$ mindestens einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Satz 2.2.9. $(x_k \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine beschränkte Zahlenfolge. Dann existiert eindeutig der **obere Grenzwert (Limes superior)** $a = \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k$ definiert dadurch, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

1. Für ∞ -viele $k \in \mathbb{N}$ ist $a - \varepsilon < x_k < a + \varepsilon$ (das heißt, a ist Häufungspunkt der Folge)
2. Für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_k \geq a + \varepsilon$ (das heißt, a ist größter Häufungspunkt der Folge)

Analog existiert eindeutig die **untere Schranke (Limes inferior)** $b = \liminf_{k \rightarrow \infty} x_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k$

Beweis. Existenz:

Die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \leq x\}$ ist

- nicht leer, da (x_k) nach oben beschränkt
- nach unten beschränkt, da (x_k) nach unten beschränkt ist. Also existiert eine größte untere Schranke $a = \inf A$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt:

(a) $a - \varepsilon < a \Rightarrow a - \varepsilon \notin A$, da a untere Schranke ist

$\Rightarrow$ für ∞ -viele k ist $x_k > a - \varepsilon$

(b) $a + \varepsilon > a \Rightarrow$ es existiert ein $x \in A$ mit $a \leq x < a + \varepsilon$, da a **größte** untere Schranke ist $\Rightarrow$ für fast alle k gilt

$$x_k \leq x < a + \varepsilon$$

Daraus folgen 1. und 2.

Eindeutigkeit: ist offensichtlich □

Anwendung in dem unbrauchbaren Konvergenzkriterium:

Satz 2.2.10. $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Leftrightarrow (x_k)$ beschränkt mit $\liminf x_k = \limsup x_k$

C Cauchyfolgen

Definition. Eine Punktfolge $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall k, l \geq m |x_k - x_l| < \varepsilon$$

Im Wortlaut: Die Abstände zwischen den Folgegliedern werden beliebig klein.

Bemerkung. Jede konvergente Folge ist eine **Cauchy-Folge**, denn

$$\begin{aligned} (x_k) \rightarrow x &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall \varepsilon \geq m |x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall k, l \geq m |x_k - x_l| \\ &= |x_k - x + x - x_l| \leq \underbrace{|x_k - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_l - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Dies gilt für **jeden** normierten Raum. Im $\mathbb{R}^n$ (genau genommen in jedem **Banach Raum** bzw **vollständigen Raum**) gilt auch die **Umkehrung**:

Satz 2.2.11. Cauchy-Konvergenzkriterium für Folgen

Eine Punktfolge im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Sei (x_k) eine Cauchyfolge, dann ist sie beschränkt, denn für $\varepsilon := 1$ gilt nach Definition, dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $|x_k - x_m| < 1$ für alle $k \geq m$. Fast alle Folgeglieder liegen also in $K_1(x_m)$ und außerhalb nur endlich viele. Also existiert nach **Bolzano Weierstraß** (Satz 2.2.8) ein Häufungspunkt x und eine Konvergente Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow x$.

Damit gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_1 \in \mathbb{N} \forall l \geq m_1 |x_{k_l} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_2 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq m_2 |x_k - x_l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Für alle $l \geq m := \max\{m_1, m_2\}$ ($\Rightarrow k_l \geq l \geq m$) folgt dann

$$|x_l - x| \stackrel{\Delta}{\leq} \underbrace{|x_l - x_{k_l}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{k_l} - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

das heißt: $(x_l) \Rightarrow l$

□

Ergänzung. In jedem normierten Raum $(*, |\cdot|)$ konvergieren alle Cauchyfolgen, zum Beispiel ist die rationale Folge $\left(1 + \frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, da sie in $\mathbb{R}$ konvergiert, das heißt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists m \in \mathbb{N} \forall k, l \geq m \quad |x_k - x_l| < \varepsilon.$$

Aber sie besitzt keinen Grenzwert $x \in \mathbb{Q}$, da e irrational ist.

Satz 2.2.12. Satz über vollständige Räume

Normierte Räume $(*, |\cdot|)$ in denen jede Cauchyfolge konvergiert heißen **vollständige Räume** oder **Banach Räume**

Wir haben bewiesen:

$\mathbb{R}$ ist **ordnungsvollständig**, es gilt also die **Supremumseigenschaft**

- in $\mathbb{R}$ und im $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von HEINE-BOREL (Satz 2.1.4)
- in $\mathbb{R}$ und im $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (Satz 2.2.8)
- $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ ist **vollständig**, es gilt das Cauchy-Kriterium

Nun kann man in einem linear geordneten Körper K zeigen:

K ordnungsvollständig $\Leftrightarrow K$ (archimedisch angeordnet und) vollständig.

Alle obigen Eigenschaften sind also im wesentlichen äquivalent.

Uneigentliche Konvergenz (in $\mathbb{R}$)

Definition. Eine Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **uneigentlich konvergent** oder **bestimmt divergent**, gegen $+\infty/-\infty$ wenn gilt:

$$\forall r > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall k \geq m \quad x_k > r \quad (\text{bzw } x_k < -r)$$

Schreibweise

$$(x_k) \rightarrow +\infty \quad (-\infty)$$
$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty \quad (-\infty)$$

Bemerkung. Ein Intervall $]r, +\infty[$ beziehungsweise $] -\infty, -r[$ kann als „Umgebung“ aufgefasst werden, dann hat man die gleiche Definition wie bei eigentlicher Konvergenz. Man kann also sagen: „In jeder 'Umgebung' von $+\infty$ oder $-\infty$ liegen fast alle Folgenglieder“.

Einteilung reeller Folgen

- konvergent $\rightarrow x \in \mathbb{R}$
- divergent
 - $\rightarrow +\infty$ bestimmt divergent
 - $\rightarrow -\infty$ bestimmt divergent
 - $\rightarrow$ weder noch

Zusatz. Analog kann man sagen $+\infty$ ($-\infty$) ist ein uneigentlicher Häufungspunkt, wenn in jeder „Umgebung“ von $+\infty$ ($-\infty$) ∞ -viele Folgenglieder liegen. Er ist dann automatisch uneigentlich $\limsup$ ($\liminf$)

Beispiel.

$$(k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty, \quad (-k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty$$

$((-1)^k k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist unbestimmt divergent, besitzt aber die uneigentlichen Häufungspunkte $+\infty$ und $-\infty$ mit uneigentlich konvergenten Teilfolge.

2.3. Unendliche Reihe

A Konvergenz und Summen von Reihen [im $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}$]

Definition. 1. Ist $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Punktfolge, so heißt die Folge $(s_l)_{l \in \mathbb{N}}$ der **Partialsummen**

$$s_l := \sum_{k=1}^l x_k = x_1 + \cdots + x_l$$

eine **unendliche Reihe** bezeichnet mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \left(\sum_{k=1}^l x_k \right)_{l \in \mathbb{N}}$$

2. Bei einer konvergenten unendlichen Reihe $(\sum_{k=1}^l x_k)_{l \in \mathbb{N}}$ heißt der Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^l x_k \right)$$

die **Summe der unendlichen Reihe**

Bemerkung.

1. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ist doppeldeutig. Es kann die Folge $(\sum_1^l x_k)_{l \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, wobei die Konvergenz nicht gegeben sein muss, oder den Grenzwert $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l x_k$ bezeichnen, sofern er existiert.
2. Alle Sätze aus 2.2 über Folgen lassen sich sinngemäß auch auf Reihen, also sporadische Folgen, übertragen.

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

3. Aus der Partialsumme s_l mit $l \in \mathbb{N}$ lassen sich die ursprünglichen Summanden $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rekonstruieren.

$$x_1 = s_1, \quad \forall_{l \in \mathbb{N}} \quad x_{l+1} = s_{l+1} - s_l$$

Folgerung. Jede Folge $(s_l)_{l \in \mathbb{N}}$ kann auch als Reihe aufgefasst werden:

$$s_k = \sum_{i=1}^k x_i$$

mit oben genannten x_i 's

Die folgenden Konvergenzkriterien sind für alle Reihen brauchbar.

Satz 2.3.1. Satz über die notwendigen Konvergenzkriterien für Reihen

Die $\sum_1^l x_k$ einer konvergenten unendlichen Reihe im $\mathbb{R}^n$ bilden eine Nullfolge, das heißt $\sum_1^l x_k$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Umgekehrt gilt: falls $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \neq 0 \Rightarrow \sum_1^\infty x_k$ divergent.

Beweis.

$$(s_l) \rightarrow s = (s_{l+1}) \rightarrow s \Rightarrow (x_{l+1}) = (s_{l+1} - s_l) \rightarrow s - s = 0, \quad (x_i) = 0$$

□

Nur eine Spezialisierung des Satzes 2.2.11 ist

Satz 2.3.2. Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen

Eine Reihe $\sum_1^\infty x_k$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{l > j \geq m} \underbrace{\left| \sum_{k=j+1}^l x_k \right|}_{|s_l - s_j|} < \varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^\infty (x_l) = \left(\sum_{k=1}^l x_l \right)_{l \in \mathbb{N}} = (s_l)_{l \in \mathbb{N}}$$

Bemerkung. Für alle $p \geq 2$ gilt $\sum_{k=1}^\infty x_k$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum_{k=p}^\infty x_k$ konvergiert und für die Summe gilt:

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k = \sum_{k=1}^{p-1} x_k + \sum_{k=p}^\infty x_k$$

Beweis.

$$\left(\sum_{k=p}^l x_k \right)_{l \in \mathbb{N}} = (s_l - s_{p-1})_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow s - s_{p-1} = \sum_{k=1}^\infty x_k - \sum_{k=1}^{p-1} x_k$$

□

Beispiel.

1. $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e}$ **Exponentialreihe**

2. die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ und divergiert für $|q| \geq 1$

Beweis.

$$\sum_{k=0}^l q^k = \frac{1 - q^{l+1}}{1 - q} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} \text{ für } |q| < 1$$

Für $|q| \geq 1$ ist auch $|q^k| \geq 0$, die Reihenglieder bilden eine Nullfolge!

3. die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert, obwohl die Glieder eine Nullfolge bilden

$$\forall_{l \in \mathbb{N}} |s_{2l} - s_l| = \sum_{k=1}^{2l} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} = \sum_{k=l+1}^{2l} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=l+1}^{2l} \frac{1}{2l} = l \cdot \frac{1}{2l} = \frac{1}{2}.$$

Das Cauchy-Kriterium ist verletzt.

Bemerkung.

1. Aus den Rechenregeln für Folgen erhält man sofort **Rechenregeln für Reihen**.
Wenn $\sum x_k$, $\sum y_k$ konvergieren, dann auch $\sum (x_k + y_k)$, $\sum (\lambda x_k)$ und es gilt:

$$\sum (x_k + y_k) = \sum x_k + \sum y_k$$

$$(\lambda x_k) = \lambda \sum x_k \text{ und so weiter. Und wenn (in } \mathbb{R} \text{)}$$

$$\forall_k x_k \leq y_k \text{ ist auch } \sum x_k \leq \sum y_k \text{ und so weiter}$$

2. Bei einer konvergenten Reihe $\sum_1^{\infty} (x_k) = x_1 + x_2 + \dots$ erhält man durch setzen einfacher Klammern eine neue Reihe (zum Beispiel $x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + \dots$), die wieder konvergiert mit der selben Summe. Nun kann man durch den Übergang zu einer Teilfolge die Folge der Partialsummen erzeugen. Weglassen von Klammern kann eine konvergente Folge erzeugen, zum Beispiel

$$\underbrace{(1 - 1)}_0 + \underbrace{(1 - 1)}_0 + \dots \rightarrow 0$$

aber $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = \dots$ ist divergent!

Merksatz

1. Eine unendliche Reihe ist keine Summe, sondern eine Folge von Summen
2. Zur Bestimmung der Summe einer unendlichen Reihe zählt man **nicht** zusammen, sondern bildet den Grenzwert.

Empfehlung: Rechnen mit Partialsummen solange es geht, danach erst sollte man den Grenzwertübergang machen.

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

B Alternierende Reihe

Definition. Eine Reihe $\sum_1^\infty x_k$ in $\mathbb{R}$, deren Glieder x_k abwechselnd positiv und negativ sind, heißt eine **alternierende Reihe**.

Ein brauchbares Konvergenzkriterium ist:

Satz 2.3.3. Satz von Leibniz oder auch die Leibnizsche Regel

Einen alternierende Reihe, bei der die Beträge der Glieder eine monotone Nullfolge bilden ist konvergent

Beweis. Bei der Reihe $\sum_1^\infty x_k$ sei etwa $x_k = (-1)^{k+1}y_k$ mit $y_k > 0$, also

$$\sum x_k = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \pm \dots \quad (2.1)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_{2l+1} &= y_1 - \underbrace{(y_2 - y_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(y_4 - y_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(y_{2l} - y_{2l+1})}_{\geq 0} \\ s_{2l} &= \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(y_3 - y_4)}_{\geq 0} + \underbrace{(y_5 - y_6)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(y_{2l-1} - y_{2l})}_{\geq 0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Da y_k $k \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist, ist für alle $l \in \mathbb{N}$

$$0 \geq s_{2l} \stackrel{2.2}{\leq} s_{2l+2} \stackrel{x_{2l+2} < 0}{\leq} s_{2l+1} \leq s_{2l-1} \leq y_1$$

Die Teilfolge $(s_{2l})_{l \in \mathbb{N}}$ und $(s_{2l+1})_{l \in \mathbb{N}}$ sind also monoton und beschränkt, konvergiert also nach Satz 2.2.6 mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s_{2l+1} - \lim_{l \rightarrow \infty} s_{2l} = \lim_{l \rightarrow \infty} (s_{2l+1} - s_{2l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} y_{2l+1} \stackrel{!}{=} 0$$

Dann konvergiert auch $(s_l)_{l \in \mathbb{N}}$ selbst gegen $s := \lim_{l \rightarrow \infty} s_{2l} = \lim_{l \rightarrow \infty} s_{2l+1}$ da in jeder Umgebung von s fast alle geraden und fast alle ungeraden Folgenglieder liegen. $\square$

Zusatz:

Der Beweis liefert noch eine **Fehlerabschätzung**. Für die Summe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} y_k$$

und den **Rest**

$$s - s_l = \sum_{k=l+1}^{\infty} (-1)^{k+1} y_k$$

Es gilt nämlich:

1.

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad 0 \leq s_{2l} \leq s \leq s_{2l+1} \leq y_1$$

2.

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} 0 \leq s - s_{2l} \leq s_{2l+1} - s_{2l} = y_{2l+1} \\ 0 \leq s_{2l-1} - s \leq s_{2l-1} - s_{2l} = y_{2l} \end{cases}$$

also

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad |s - s_l| \leq |x_{l+1}|$$

Beispiel. Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert und für die Summe gilt

$$\begin{aligned} 0,5000 = s_2 \leq s \leq s_3 = 0,8333\bar{3} \quad \text{Fehler: } s - s_2 \leq y_3 = \frac{1}{3} \\ 0,6881 = s_{100} \leq s \leq s_{101} = 0,6981 \quad \text{Fehler: } s - s_{100} \leq y_{101} = \frac{1}{101} \end{aligned}$$

C Absolute Konvergenz (im $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}$)

Definition. Eine Reihe $\sum_1^{\infty} x_k$ im Raum $\mathbb{R}^n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die (Zahlen-)Reihe $\sum_1^{\infty} |x_k|$ konvergent ist.

Satz 2.3.4. Eine absolut konvergente Reihe konvergiert. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig.

Beweis. Nach dem Cauchy-Kriterium gilt:

$$\left| \sum_{k=j+1}^l x_k \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=j+1}^l |x_k| < \varepsilon \text{ für } l > j > m$$

□

Gegenbeispiel für die Umkehrung: Die alternierende harmonischen Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

Für Reihen in $\mathbb{R}$ mit nichtnegativen Gliedern entspricht die **Konvergenz** auch der **absoluten Konvergenz**. Für sie gilt:

Satz 2.3.5. Eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit nichtnegativen Gliedern konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beweis. Die Folge der Partialsummen ist monoton steigend. Satz 2.2.6

□

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, denn

$$\begin{aligned} 1 \leq s_l &\leq \sum_{k=1}^l \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^l \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^l \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)}_{\text{Teleskopsumme}} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{l-2} - \frac{1}{l-1} \right) + \left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l} \right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{l} < 2 \end{aligned}$$

$$\text{Summe: } s = \frac{\pi^2}{6}$$

Für absolut konvergente Reihen gibt es zahlreiche Konvergenzkriterien:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \text{ konvergiert} \stackrel{\Rightarrow}{\nRightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ konvergiert}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definition. Eine reelle Reihe $\sum_1^\infty c_k$ mit nichtnegativen Gliedern heißt eine **Majorante** der Reihe $\sum_1^\infty x_k$ im $\mathbb{R}^n$, wenn gilt: $|x_k| \leq c_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Sie heißt **Minorante**, der Reihe $\sum_1^\infty x_k$ in $\mathbb{R}^n$, wenn gilt $x_k \geq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Satz 2.3.6. Satz über Majoranten/Minoranten

1. Eine Reihe im $\mathbb{R}^n$ ist eine konvergente Majorante, wenn sie konvergiert
2. Eine Reihe im $\mathbb{R}^n$ ist eine divergente Minorante, wenn sie divergiert

Beweis.

1. Nach Definition existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $k \geq m_1 : |x_k| \leq c_k$ weiter existiert zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $m_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l > j \geq m_2$ gilt nach Cauchy-Kriterium (Satz 2.2.11), $\sum_{k=j+1}^l c_k < \varepsilon$. Für alle $l > j \geq m := \max\{m_1, m_2\}$ folgt dann

$$\sum_{k=j+1}^l |x_k| \leq \sum_{k=j+1}^l c_k \varepsilon$$

2. Wäre $\sum_1^\infty x_k$ konvergent, dann auch $\sum_1^\infty c_k$, denn wegen $|c_k| = c_k \leq c_k \leq x_k$ für fast alle k wäre $\sum_1^\infty x_k$ eine konvergente Majorante.

□

Beispiel.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^p} \begin{cases} \text{konvergiert für alle} & p \geq 2 \\ \text{divergiert für alle} & 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Was passiert bei $1 < p < 2$? Siehe Übungsblatt 8

Der Vergleich mit der geordneten Reihe liefert weitere Kriterien:

Satz 2.3.7. Satz über das Quotientenkriterium

Eine Reihe $\sum_1^\infty x_k$ in $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) (mit $x_k \neq 0$ für fast alle k) **konvergiert absolut**, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gibt, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq q$$

und **divergiert**, wenn

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1$$

für fast alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis.

1. Für alle $k \geq m$ gelte $|x_{k+1}| \leq q |x_k|$ daraus folgt $|x_{m+1}| \leq q |x_m|$, $|x_{m+2}| \leq q^2 |x_m|$ und so weiter, also

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad |x_{m+l}| \leq q^l |x_m|$$

Die Reihe $\sum_{l=1}^\infty |x_{m+l}| = \sum_{k=m+1}^\infty |x_k|$ hat demnach die für $0 < q < 1$ die konvergente Majorante $|x_m| \cdot \sum_{l=1}^\infty q^l$

2. Für alle $k \geq m$ gelte $|x_{k+1}| \geq |x_k|$, also

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad |x_{m+l}| \geq |x_m| > 0$$

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bildet keine Nullfolge.

□

Satz 2.3.8. Satz über Wurzelkriterium

Eine Reihe $\sum_1^\infty x_k$ in $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) **konvergiert absolut**, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gibt, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[k]{|x_k|} \leq q$$

und **divergent**, falls

$$\sqrt[k]{|x_k|} \geq 1$$

für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis.

1. Für alle $k \geq m$ gelte $\sqrt[k]{|x_k|} \leq q$ also $|x_k| \leq q^k$. $\sum_1^\infty q^k$ ist also eine für $0 < q < 1$ konvergente Majorante

2. Für ∞ -viele k gelte $\sqrt[k]{|x_k|} \geq 1$, also $|x_k| \geq 1$. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kann also keine Nullfolge sein.

□

Warnung:

1. Es genügt für die Konvergenz **nicht**, dass $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq 1$ oder $\sqrt[k]{|x_k|} \leq 1$ sind (Beispiel: **harmonische Reihe**)

2. Bei **komplexen Reihen** ist der **komplexe Betrag** zu verwenden

Folgerung. eine vereinfachte Anwendung des Quotienten-/ Wurzelkriteriums:

Eine Reihe $\sum_1^\infty x_k$ in $\mathbb{R}$ **konvergiert absolut**, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$$

und divergiert, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| > 1$$

beziehungsweise für Wurzelkriterium:

Eine Reihe **konvergiert absolut**, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} < 1$$

und divergiert, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} > 1$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beweis.

1a Sei $a := \limsup \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq q := a + \varepsilon < 1$$

1b Sei $b := \liminf \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| > 1$. Dann gibt es also ein $\varepsilon > 0$, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq b - \varepsilon \geq 1$$

2a Sei $a := \limsup \sqrt[k]{|x_k|} < 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|x_k|} \leq q := a + \varepsilon < 1$$

2b Sei $b := \limsup \sqrt[k]{|x_k|}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für ∞ -viele $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|x_k|} \geq a - \varepsilon \geq 1$$

ist.

□

D Unbedingte Konvergenz

Bemerkung. Die Glieder einer unendlichen Reihe darf man im allgemeinen **nicht** vertauschen, ohne dabei Konvergenzeigenschaften und/oder Summen zu ändern.

Beispiel. Aus der harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

mit der Summe $s = 0,69 \dots = \ln 2$ erhält man durch umsordieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

und nach setzen von Klammern

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{y}_k = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{5}{6}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(+ \quad + \quad -)}_{\geq 0} + \dots$$

mit einer Summe $\tilde{s} \geq \frac{5}{6} = 0,83 \dots > s$, sofern es überhaupt konvergiert. Mann kann zeigen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{y}_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{3}{2}s$$

Merke: Beim Rechnen mit unendlichen Reihen gilt im allgemeinen keine Kommutativität!

Präzisiert wird dies in der

Definition. 1. Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine **Bijektion**, so heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ eine **Umordnung** der Reihe $\sum_1^{\infty} x_k$

2. Eine Reihe heißt **unbedingt konvergent**, wenn alle Umordnungen konvergieren!

Satz 2.3.9. kleiner Umordnungssatz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. (und Umgekehrt)

Beweis. Sei $\sum_1^{\infty} x_k$ absolut konvergent und $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann gibt es ein $\tilde{m} > m$ mit $\{1, \dots, m\} \subset \{\varphi(1), \dots, \varphi(\tilde{m})\}$. Setze etwa $\tilde{m} := \max\{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(\tilde{m})\} + 1$. Für die Partialsumme $s_l = \sum_{k=1}^l x_k$ und $\tilde{s}_l = \sum_{k=1}^l x_{\varphi(k)}$ gilt dann für $l > \tilde{m} > m$:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_l - s_l &= \underbrace{\sum_{k=1}^l x_{\varphi(k)}}_{\substack{\text{enthält} \\ \text{also auch} \\ x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(m)} \\ x_1, \dots, x_m}} - \underbrace{\sum_{k=1}^l x_k}_{\text{enthält } x_1, \dots, x_m} = \underbrace{\sum_{j \in E} \pm x_j}_{E \text{ endlich}} \end{aligned}$$

wobei für alle $j \in E$ $j > m$ gilt, die Übrigen heben sich gegenseitig weg. Es folgt

$$|\tilde{s}_l - s_l| \leq \sum_{j \in E} |x_j| < \varepsilon,$$

das heißt $(\tilde{s}_l - s_l) \rightarrow 0$ und wegen $(s_l) \rightarrow s$ konvergiert auch $(\tilde{s}_l) = (s_l + (\tilde{s}_l - s_l)) \rightarrow s + 0 = s$.

□

Zur Umkehrung (ohne Beweis):

Ist $\sum x_k$ konvergent, aber $\sum |x_k|$ divergent, so kann man eine Umordnung $\sum x_k$ konstruieren, die divergiert.

Bemerkung. Nur **bedingt konvergente Reihen** sind sehr häßlich. Man kann etwa in $\mathbb{R}$ Umordnungen konstruieren, die divergieren beziehungsweise einen beliebigen Wert $x \in \mathbb{R}$ als Summe besitzen.

2.4. Stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

Wir betrachten **vektorwertige Abbildungen**

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x(x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

Spezielle Funktionen:

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Die übliche Schuldefinition lautet:

$$f \text{ in } x_0 \text{ stetig} :\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Problem:

Eine vernünftige Grenzwert-Definition ist komplizierter als die Stetigkeitsdefinition selbst. Deswegen definieren wir erst die Stetigkeit, und dann den Grenzwert.

A Stetigkeit und Folgenstetigkeit Veranschaulichung bei Funktionen:

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Funktionswerte $f(x)$ liegen in einer beliebig kleinen Umgebung von $f(x_0)$, wenn nur die Argumente x genügend nahe bei x_0 liegen.

Verallgemeinert:

Definition. Eine Abbildung $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt x_0 stetig, wenn zu jeder Umgebung $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ existiert mit

$$f[U \cap \mathbb{D}] \subset V$$

f heißt (in $\mathbb{D}$) stetig, wenn sie in jeder Umgebung $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig ist.

Die Präzisierung liefert:

Satz 2.4.1. Satz über die Stetigkeit (ε - δ Kriterium)

$f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in x_0 stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Die Negation lautet

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R}^n |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiel.

0 Jede Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist in seinem isolierten Punkt $x_0 \in D$ stetig. Grund: Es existiert eine Umgebung U von x_0 mit $U \cap D = \{x_0\}$, also $f[U \cap D] = \{f(x_0)\} \subset V$.

1 Jede **konstante Abbildung** $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto c$ ist überall stetig.

Beweis. $c[U] = \{c\} \subset V$ für jede Umgebung V von c

□

2 Die Inklusionsabbildung $i = D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto x$ ist überall stetig, insbesondere die Identität $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Beweis. setze $\delta = \varepsilon$

□

3 Die Signumsfunktion

$$\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist in $x_0 = 0$ unstetig, ansonsten aber stetig

Beweis. Für $\varepsilon := 1$ und jedes $x \neq 0$, egal, wie nahe ich an „0“ herankomme gilt:

$$|\text{sign}(x) - \text{sign}(0)| = 1 \geq \varepsilon$$

□

4 Die Dirichlet-Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist **überall unstetig**

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gibt es, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, zu $\varepsilon := 1$ in **jeder** δ **Umgebung** von x_0 einen Punkt $x \in \mathbb{Q}$, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon$$

Analog folgt für $x_0 \in \mathbb{Q}$: In jeder Umgebung liegt auch ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

□

Satz 2.4.2. Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig

Beweis. Wir zeigen:

Ist $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in A$ stetig, und $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ in $f(x_0) \in B$ stetig, so ist auch $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ in $x_0 \in A$ stetig.

g in $f(x_0)$ stetig $\Rightarrow$ zu $W \in \mathcal{U}(g(f(x_0)))$ existiert ein $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ mit $g[V \cap B] \subset W$.

f in x_0 stetig $\Rightarrow$ zu $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ existiert $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f[U \cap A] \subset V$.

Zusammen folgt: Zu $W \in \mathcal{U}(g \circ f(x_0))$ existiert $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $(g \circ f)[U \cap A] = \underbrace{g[f[U \cap A]]}_{\subset V \cap B} \subset g[V \cap B] \subset W$. Weitere Regeln und Beispiele für stetige Abbildungen

findet man leicht unter dem Begriff „Folgenstetigkeit“.

□

Definition. Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkte $x_0 \in D$ **folgestetig**, wenn für jede gegen x_0 konvergente Punktfolge $(x_k \in D)_{k \in \mathbb{N}}$ auch die Bildfolge $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) \text{ gilt}$$

In **normierten Räumen** besonders im $\mathbb{R}^n$ sind beide Definitionen gleichwertig.

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Satz 2.4.3. Satz über das Folgenkriterium für Stetigkeit

Eine Abbildung $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist (in $x_0 \in \mathbb{D}$) genau dann stetig, wenn sie (in x_0) folgestetig ist.

Beweis.

$\Rightarrow$ Sei f in $x_0 \in D$ stetig und $(x_k \in D)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0$ beliebig. Dann gibt es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 mit $f[U \cap D] \subset V$. In $U \cap D$ liegen fast alle x_k , also in V fast alle $f(x_k)$, das heißt $(f(x_k)) \rightarrow f(x_0)$

$\Leftarrow$ Wir zeigen: „ f nicht stetig in $x_0 \Rightarrow f$ nicht folgestetig in x_0 “.

f nicht stetig in $x_0 \Rightarrow$ es existiert ein $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$, sodass für alle $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gilt: $f[U \cap D] \not\subset V$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $x_k \in D$ mit $x_k \in U_{\frac{1}{k}}(x_0)$, aber $f(x_k) \notin V$

Für die entstehende Punktfolge $(x_k \in D)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt $(x_k) \rightarrow x_0$, denn $0 \leq |x_k - x_0| < \frac{1}{k} < \varepsilon$, aber es gilt auch $(f(x_k)) \not\rightarrow f(x_0)$, denn in $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ liegen keine Folgenglieder $f(x_k)$

□

Die Rechenregeln und Eigenschaften konvergenter Punktfolgen liefern jetzt sofort die **Eigenschaften stetiger Abbildungen**:

Satz 2.4.4. Satz über die Eigenschaften stetiger Abbildungen

In $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$ sind

- (a) die definierten Rechenoperationen $(+, -, \cdot, \text{div})$ sowie die definierten Normen stetig, ferner
- (b) im $\mathbb{R}^n$ die Projektion $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ insbesondere Real und Imaginärteil: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
- (c) In $\mathbb{R}$ die Wurzelfunktion

$$\sqrt[n]{} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

Beweis. von (a) und (b) benötigt man Satz 2.2.3 (Rechenregeln für Punktfolgen) und Satz 2.2.4. Bei letzteren Besonders:

$$(x_k \in \mathbb{R}^n) \rightarrow x \Leftrightarrow \forall_{i=1}^n (x_{k,i} \in \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_i$$

Beispiel. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ist in jedem $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ stetig, denn

$$\begin{aligned} (\lambda_k, x_k) \rightarrow (\lambda_0, x_0) &\stackrel{2.2.4}{\Rightarrow} (\lambda_k) \rightarrow \lambda_0, (x_k) \rightarrow x_0 \\ &\stackrel{2.2.3}{\Rightarrow} (\lambda_k, x_k) \rightarrow \lambda_0 \cdot x_0 \end{aligned}$$

Analog die restlichen Fälle.

□

Satz 2.4.5. Satz über die Stetigkeit von Komponentenfunktionen

Eine vektorwertige Abbildung $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ (in $x_0 \in \mathbb{D}$) ist genau dann stetig, wenn jede **Komponentenfunktion**

$$f_j : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_j(x) \quad j = 1, \dots, m$$

in x_0 stetig ist.

Beweis. Nach Satz 2.2.4 ist:

$$(f(x_k)) \rightarrow f(x_0) \Leftrightarrow \forall_{k=1}^m (f_j(x_k)) \rightarrow f_j(x_0)$$

□

Folgerung.

1. Summen, Produkte, Quotienten stetiger Funktionen und Abbildungen sind, sofern definiert, auf ihrem Definitionsbereich stetig
2. Polynome

$$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mapsto p(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$, falls $a_m \neq 0$, beziehungsweise vom Grad $-\infty$, falls $p \equiv 0$, sind auf $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig, ebenso rationale Funktionen $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen $p, q \not\equiv 0$ auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}(\mathbb{C}) \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$

Beweis.

1. Etwa ist die Summe $f + g$ stetiger Abbildung $f + g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Verkettung

$$x \in D \quad \underbrace{\mapsto}_{\text{stetig nach 2.4.5}} (f(x), g(x)) \quad \underbrace{\mapsto^+}_{\text{stetig nach 2.4.4}} f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

ebenfalls eine stetige Abbildung

2. $x \mapsto c$, $x \mapsto x$ sind stetig. Beweis durch Anwendung von 1.

□

B: Grenzwerte von Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Gesucht: Grenzwertbegriff für Abbildungen, also:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m :$$

Grundvoraussetzung: x_0 ist Häufungspunkt der Menge D , wobei nicht unbedingt $x_0 \in D$ gelten muss. Das heißt, es existiert eine punktierte Umgebung $\dot{U} = U \setminus \{x_0\}$ von x_0 . In $\dot{U}$ liegt ein Punkt aus D , es liegen dort sogar ∞ -viele (siehe Übung)

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definition. x_0 sei ein Häufungspunkt von $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvergiert beim Annähern von x an x_0 , wenn es ein Punkt $c \in \mathbb{R}^m$ gibt, sodass die Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{D} \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \\ c & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Die Stetigkeit liefert sofort:

Satz 2.4.6.

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c &\Leftrightarrow \forall_{U \in \mathcal{U}(c)} \exists_{U \in \mathcal{U}(x_0)} f[\underbrace{U \cap \mathbb{D}}_{x \notin U}] \subset V \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbb{D}} 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_k \in \mathbb{D} \setminus \{x_0\})_{k \in \mathbb{N}} \text{ gilt: } (f(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow c \\ &\quad \text{[Folgenkriterium für Grenzwert von Abbildungen]} \end{aligned}$$

Bemerkung.

1. Ein Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ist eindeutig bestimmt, da x_0 ein Häufungspunkt von D ist, es gibt außerdem eine Folge $(x_k \in D \setminus \{x_0\}) \rightarrow x_0$, also auch eine Bildfolge $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$, deren Grenzwert eindeutig bestimmt ist.
2. Ein eventuell vorhandener Wert $f(x_0)$ wird beim Grenzübergang nicht berücksichtigt, aber es gilt natürlich:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ falls } x_0 \text{ ein Häufungspunkt von } D \text{ ist.}$$

Manchmal ist f im isolierten Punkt $x_0 \in D$ stetig, aber der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ist nicht definiert.

3. Die Rechenregel für konvergente Punktfolgen liefern sofort Rechenregeln für Grenzwerte von Abbildungen

Beispiel.

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} c, \\ g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} d \\ \Rightarrow (f + g)(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} c + d \end{aligned}$$

und so weiter

Zusatz. Speziell bei Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann man auch

- **einseitige Grenzwerte** $c \in \mathbb{R}$ bei linksseitiger/ rechtsseitiger Annäherung von x an x_0 definieren
- Grenzwerte $c \in \mathbb{R}$ bei **uneigentlicher Annäherung** $x \rightarrow \infty$ beziehungsweise $x \rightarrow -\infty$ definieren

- **uneigentliche Grenzwerte** $c = \pm\infty$ bei Annäherung $x \rightarrow x_0$ definieren

und Kombinationen davon: Man benutze **linksseitige Umgebung** $U^-(x_0) = U(x_0) \cup \{x \mid x < x_0\}$ und für **rechtsseitige Umgebung** $U^+(x_0) = U(x_0) \cup \{x \mid x > x_0\}$ beziehungsweise Intervalle $]r, +\infty[$ und $] +\infty, -r[$ als Umgebung von $+\infty$ und $-\infty$.

Beispiel.

1. Falls x_0 „linksseitiger“ Häufungspunkt von D ist, etwa $]a, +\infty[\subset D$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_k \in D)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } U_k x_k > x_0 \text{ gilt } (f(x_k)) \rightarrow c \end{aligned}$$

2. Falls „ $+\infty$ “ uneigentlicher Häufungspunkt von D ist, etwa $]a, +\infty[\subset D$, gilt

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall x \in D (x > r \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_k \in D)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty \text{ gilt } (f(x_k)) \rightarrow c \end{aligned}$$

3. Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty &\Leftrightarrow \forall r > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > r) \\ &\Leftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_k \in D)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 \text{ gilt } (f(x_k)) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Zusammen: Falls $x_0 \in D$ auch Häufungspunkt von D ist, gilt:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Die Rechenregeln für Grenzwerte können auf uneigentliche Grenzwerte fortgesetzt werden, in dem man definiert:

$$\begin{aligned} \text{für } c \in D : +\infty + c &= c + (+\infty) := +\infty, & +\infty + \infty &:= +\infty \\ \text{für } c > 0 : (+\infty) \cdot c &= c \cdot (+\infty) := +\infty, & (+\infty) \cdot (+\infty) &:= +\infty \\ \text{Analog auch für } (-\infty) & & & \\ \frac{1}{+\infty} &= \frac{1}{-\infty} := 0 \end{aligned}$$

Undefiniert bleibt weiterhin:

$$(+\infty) + (-\infty), 0 \cdot (\pm\infty), \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right), \left(\frac{0}{0} \right)$$

Eigenschaften stetiger Abbildungen:

Satz 2.4.7. Satz über das Permanenzprinzip

Ist $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig mit $f(x_0) > 0$, so gibt es eine ganze Umgebung U von x_0 mit $f(x) > 0$ für alle $x \in U \cap \mathbb{D}$.

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beweis. $f(x_0) > 0 \Rightarrow V :=]0, +\infty[$ ist eine Umgebung von $f(x_0)$. Zu V existiert, da f stetig in x_0 ist, eine Umgebung U von x_0 mit $f[U \cap D] \subset V$, das heißt

$$\forall x \in U \cap D \quad f(x) > 0$$

□

Wir betrachten die Abbildungen auf **kompakte Definitionsbereiche**

Satz 2.4.8. Hauptsatz über stetige Abbildungen auf kompakten Mengen $\mathbb{K}$

Bei einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist das Bild $f[\mathbb{K}]$ einer kompakten Menge $\mathbb{K} \subset \mathbb{D}$ wieder kompakt.

Beweis. Sei $\{Q_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $f[K]$, das heißt $f[K] \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$. Zu jedem $x \in K$ gibt es dann einen Index $i(x) \in I$ mit $f(x) \in Q_{i(x)} =: Q_x$, das heißt Q_x ist offene Umgebung von $f(x)$. f stetig in $x \Rightarrow$ es existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $f[U_x \cap K] \subset f[U_x \cap D] \subset Q_x$. Das System $\{U_x \mid x \in K\}$ bildet dann eine offene Überdeckung von K und es genügen, da K kompakt ist, bereits endlich viele $U_{x_1}, \dots, U_{x_N}$ um K zu überdecken. Das heißt $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N}$. Daraus folgt

$$f[K] = f \left[K \cap \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \right] = f \left[\bigcup_{j=1}^N (K \cap U_{x_j}) \right] = \bigcup_{j=1}^N f[K \cap U_{x_j}] \subset \bigcup_{j=1}^N Q_{x_j}$$

das heißt also $\{Q_{x_1}, \dots, Q_{x_N}\}$ bildet eine endliche Teilüberdeckung von $f[K]$. □

Eine unmittelbare Folgerung ist:

Satz 2.4.9. Satz von Maximum und Minimum

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer (nichtleeren) kompakten Menge ist **beschränkt** und besitzt ein **(globales) Maximum** und **Minimum**, das heißt es existieren $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad m_1 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = m_2$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz 2.4.8 ist $\tilde{K} := f[K] \subset \mathbb{R}$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt.

$\tilde{K}$ beschränkt $\Rightarrow$ es existiert ein $m_1 = \inf \tilde{K}$ und ein $m_2 = \sup \tilde{K}$.

$\tilde{K}$ abgeschlossen $\Rightarrow m_1, m_2 \in \tilde{K}$

Ansonsten gäbe es eine noch größere untere beziehungsweise eine kleinere obere Schranke als m_1 oder m_2 , das heißt, es müsste gelten:

$$\tilde{m}_2 = m_2 - \varepsilon \quad \tilde{m}_1 = m_1 - \varepsilon$$

Also ist $m_1, m_2 \in \tilde{K}$ □

Beispiel. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ein globales Maximum und Minimum an. Dies ist im allgemeinen falsch bei anderen Intervalltypen!!

Zur gleichmäßigen Stetigkeit:

Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist, deswegen heißt es auch **punktweise Stetigkeit**, das heißt also, wenn gilt:

$$\forall_{x_0 \in D} \forall_{\varepsilon > 0} \exists : \delta > 0 \forall_{x \in D} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Das Gesuchte δ darf von ε und x_0 abhängig sein. Eine stärkere Forderung ist die Existenz eines δ , das von x_0 **unabhängig** ist, also bezüglich x_0 **global** ist.

Definition. Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x_0 \in D} \forall_{x \in D} (|x - x_0| > \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Hier hängt das gesuchte δ höchstens von ε ab.

Eine gleichmäßige stetige Abbildung ist offensichtlich (punktweise) stetig. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

Beispiel.

$$f : D :=]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

ist zwar stetig, aber nicht **gleichmäßig stetig**.

Beweis. zu zeigen ist:

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{x_0 \in D} \exists_{x \in D} (|x - x_0| > \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Sei $\varepsilon := 1$ und $\delta > 0$ beliebig.

Für $x_0 := \min\{\delta, 1\}$ und $x := \frac{1}{2}x_0$ gilt zwar $|x - x_0| = \frac{1}{2}x_0 \leq \frac{1}{2}\delta < \delta$, aber

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{1}{x_0} \geq \varepsilon = 1$$

□

Es gilt aber:

Satz 2.4.10. Satz über die glm. Stetigkeit

Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf eine (nichtleere) kompakte Menge $\mathbb{K}$ ist dort ebenfalls gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

f stetig $\Rightarrow$ zu jedem $y \in K$ existiert ein $\delta(y) > 0$ mit

$$\forall_{x \in K} \left(|x - y| > \delta(y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (2.3)$$

Das System $\{U_{\frac{\delta(y)}{2}}(y) \mid y \in K\}$ bildet eine offene Überdeckung von K und es existieren $y_1, \dots, y_N$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{\frac{\delta(y_j)}{2}}(y_j)$. Setze beliebige $x, x_0 \in K$, mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann

1. Zu $x_0 \in K$ existiert ein Index j mit $x_0 \in U_{\frac{\delta(y_j)}{2}}(y_j)$, das heißt $|x_0 - y_j| < \frac{\delta(y_j)}{2} < \delta(y_j)$, also nach 2.3:

$$|f(x_0) - f(y_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

2. $|x - y_j| \stackrel{\Delta}{\leq} |x_0 - y_j| < \delta + \frac{\delta(y_j)}{2} \leq \delta(y_j)$, also ebenfalls nach 2.3

$$|f(x) - f(y_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x_0) - f(y_j)| + |f(y_j) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Der Satz wird richtig in der Integrationstheorie.*

Wir betrachten jetzt Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen

Satz 2.4.11. Zwischenwertsatz

Die Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann existiert zu jedem Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$

Beweis. Sei etwa $f(a) \leq f(b)$ und $c \in [f(a), f(b)]$. Die Menge $M := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\}$ ist beschränkt und nicht leer, denn $a \in M$. Also existiert

$$x_0 = \sup M \in [a, b]$$

Es gilt $f(x_0) = c$, dann

(a) Sei $f(x_0) < c$ ($\Rightarrow x_0 < b$, denn $f(b) \geq c$). Dann gibt es nach dem Permanenzprinzip eine Umgebung U von x_0 und $f(x) = c$ für alle $x \in U \cap [a, b]$.

Also existiert ein $x > x_0$ mit $x \in M$, das heißt x_0 ist keine obere Schranke von M , ein **Widerspruch!**

(b) $f(x_0) > c$ ($\Rightarrow x_0 > a$, denn $f(a) \leq c$). Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(x) > c$ in $U \cap [a, b]$.

Also existiert eine noch kleinere obere Schranke x von c , ein **Widerspruch!**

□

Folgerung.

Satz. Nullstellensatz von Bolzano

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)$ besitzt in $[a, b]$ eine Nullstelle

Eine weitere

Folgerung 1. ist der Erhalt des Zusammenhangs

Das Bild eines beliebigen Intervalles $I \subset D$ und eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist wieder ein Intervall, insbesondere das Bild eines abgeschlossenen Intervalles ist wieder ein abgeschlossenes Intervall.

Bemerkung. Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist **zusammenhängend** in dem Sinne:
Mit 2 Punkten $x_1, x_2 \in I$ liegt auch die **Verbindungsstrecke**

$$\overline{x_1 x_2} := \begin{cases} [x_1, x_2] & \text{falls } x_1 \leq x_2 \\ [x_2, x_1] & \text{falls } x_1 \geq x_2 \end{cases} \text{ ganz in } I$$

Dieses ist eine Kennzeichnung von Intervallen.

Beweis.

- (a) Zu zeigen ist: $y_1, y_2 \in f[I] \Rightarrow \overline{y_1 y_2} \subset f[I]$. Zu $y_1, y_2 \in f[I]$ existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Wegen $\overline{x_1 x_2} \subset I$ ist f auf $\overline{x_1 x_2}$ definiert und stetig. Der Zwischenwertsatz (Satz 2.4.11) liefert: zu jedem $y \in \overline{y_1 y_2} = \overline{f(x_1) f(x_2)}$ existiert ein $x \in \overline{x_1 x_2} \subset I$ mit $f(x) = y$, das heißt $y \in f[I]$. Damit ist $\overline{y_1 y_2} \subset f[I]$.
- (b) Ist I ein abgeschlossenes Intervall, also kompakt. Nach dem Satz 2.4.8 ist also $f[I]$ ebenfalls ein kompaktes Intervall, also ein abgeschlossenes Intervall.

□

Bemerkung. Das Bild eines offenen Intervalls braucht nicht offen zu sein

Beispiel. $f(x) = x^2$ auf $] -1, 1[=: I, f[I] = [0, 1[$

D Monotone Funktionen $[\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}]$

Sei $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ stetig und **bijektiv**.

Frage: Ist dann auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow A$ stetig?

Antwort: Im allgemeinen nicht!

Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} A_1 &=]-\infty, 1[, \\ A_2 &= [1, \infty[, \\ A &= A_1 \cup A_2 \\ f : A &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \in A_1 & \mapsto x + 1 < 0 \\ x \in A_2 & \mapsto x - 1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist offensichtlich stetig und bijektiv und hat die Umkehrfunktion:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \Rightarrow A \quad \begin{cases} y < 0 & \rightarrow y - 1 \in A_1 \\ y \geq 0 & \rightarrow y + 1 \in A_2 \end{cases}$$

Bei Bijektionen auf **Intervallen** kann das nicht passieren. Wie erkennt man solche Bijektionen.

Satz 2.4.12. Eine stetige Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann **injektiv**, wenn sie **streng monoton wachsend**/ **fallend** ist.

f streng monoton wachsend $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2} (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f$ injektiv

f streng monoton fallend $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2} (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f$ injektiv

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beweis.

$\Leftrightarrow f$ streng monoton $\Rightarrow \forall_{x_1, x_2} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow f$ injektiv

$\Rightarrow$ Sei f weder streng monoton wachsend noch fallend. Dann gibt es Punkte $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ und etwa $f(x_2) \leq f(x_1) \leq f(x_3)$.

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.4.11) existiert zu $c := f(x_1) \in f(x_2)f(x_3)$ ein $x_4 \in [x_2, x_3]$ mit $f(x_4) = c = f(x_1)$. f kann demnach nicht injektiv sein.

□

Zusatz. Das Bild $J := f[I]$ ist dann nach **Folgerung 1** wieder ein Intervall und $f : I \Rightarrow J$ eine (stetige) Bijektion.

Damit lässt sich beweisen:

Satz 2.4.13. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall J **stetig** und **bijektiv** (mit **Bildintervall** J).

Dann ist auch die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : J \rightarrow I$ stetig.

Beweis. Sei zunächst $y_0 \in J$ ein **Innenpunkt** von J , also auch $x_0 := f^{-1}(y_0)$ ein Innenpunkt von I . Dann enthält jede Umgebung V von $x_0 = f^{-1}(y_0)$ eine ε -Umgebung $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= U_\varepsilon(x_0) \subset I$ und das Bild $f[U_\varepsilon(x_0)]$ ist wegen der strengen Monotonie wieder ein Intervall $U =]y_1, y_2[\subset J$ mit $y_0 \in U$, also eine Umgebung U gilt dann $f^{-1}[U] (= U_\varepsilon(x_0)) \subset V$. Also ist f^{-1} stetig in y_0 .

Ist y_0 ein **Randpunkt** von J , benutze man „einseitige Umgebungen“ $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ beziehungsweise $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ von $x_0 = f^{-1}(y_0)$. □

Bemerkung. Bijektionen $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{D}' \subset \mathbb{R}^{n'}$, bei denen f und f^{-1} stetig sind heißen **Homöomorphismus**.

Diese Eigenschaft ist bei $n, n' > 1$ nur schwer nachzuweisen, da hier kein Monotoniebegriff existiert.

Aber es gilt wenigstens $n = n'$ („**Dimensionsinvarianz bei Homöomorphismen**“)

2.5. Funktionenfolgen und -reihen

Wir betrachten Folgen und Reihen in $\mathbb{K}$, deren Glieder/Summanden von einem Parameter $x \in \mathbb{K}$ abhängen. Die Glieder sind also **Funktionen** $f_k : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Schreibweise $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$

Definition. Eine Funktionenfolge $(f_k : \mathbb{D} \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ heißt (**punktweise**) **konvergent**, wenn für jedes $x \in \mathbb{D}$ die Zahlenfolge $(f_k(x) \in \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Die Funktion $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ heißt dann **Grenzfunktion** der Folge.

Entsprechend ist die (punktweise) Konvergenz eine Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ sowie ihre Summenfunktion $s := \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l f_k$ erklärt.

Beispiel.

1. Die Funktionenfolge $(f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = x^k$ ist konvergent mit der Grenzfunktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

f ist unstetig, obwohl alle f_k stetig sind. (sehr ärgerlich)

2. Die **geometrische Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert in $\mathbb{C}$ für $|z| < 1$ mit der Summenfunktion $s(z) = \frac{1}{1-z}$. (hier klappt es)

Um von der Stetigkeit der Glieder (Summanden) auf die Stetigkeit der Grenzfunktion (Summenfunktion) schließen zu können, muß der Konvergenzbegriff verstärkt werden.

Definition. Eine Funktionenfolge $(f_k : \mathbb{D} \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **gleichmäßig konvergent**, wenn eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{K}$ existiert mit

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq m} \forall_{x \in \mathbb{D}} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Entsprechend für Funktionenreihen.

Bemerkung. Vergleich mit **punktweiser Konvergenz** $(f_k) \rightarrow f$

$$\forall_{x \in \mathbb{D}} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq m} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} (f_k) &\xrightarrow{glm} f \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq m} \forall_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \\ (f_k) &\rightarrow f \Leftrightarrow \forall_{x \in D} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq m} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Bei punktweise Konvergenz kann die gesuchte Schranke m von ε und von $x \in D$ abhängen. Bei gleichmäßiger Konvergenz gibt es eine bezüglich $x \in D$ globale Schranke.

Veranschaulichung in $\mathbb{R}$:

Die Graphen der Glieder f_k liegen für $k \geq m$ ganz in einem ε -Streifen um die Grenzfunktion f

Aus der Definition folgt sofort:

Satz 2.5.1. Jede gleichmäßig konvergente Funktion konvergiert auch punktweise und zwar gegen die Grenzfunktion (bzw Grenzsumme). **Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht**

Beispiel. für die Umkehrung:

Wäre $(f_k[0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_k(x) = x^k$ gleichmäßig konvergent, so müsst es zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit:

$$\forall_{x \in [0, 1]} |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt jedoch im Punkt $x := \sqrt[m]{\frac{1}{2}} \in]0, 1[$:

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz hängt wesentlich von dem betrachteten Definitionsbereich ab.

Vorteil der gleichmäßigen Konvergenz:

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Satz 2.5.2. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei also $f_k : \mathbb{D} \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ (in $x_0 \in \mathbb{D}$) stetig. Dann gilt

1. $(f_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ (in x_0) stetig.
2. $(\sum_{k=1}^l)_{l \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (in x_0) stetig

Beweis.

1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

$$(f_k) \xrightarrow{\text{glm}} f \Rightarrow \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{x \geq m} \forall_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.4)$$

$$f_m \text{ in } x_0 \text{ stetig} \Rightarrow \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} (|x - x_0| < \Delta = |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}) \quad (2.5)$$

Für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ aus 2.4}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ aus 2.5}} + \underbrace{|f_m(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ aus 2.4}} < \varepsilon$$

2. mit f_k sind auch Partialsummen $s_l = \sum_1^l f_k$ stetig (= Anwendung von 2.4).

□

Folgerung. (Vertauschung von Grenzwerten):

Sei $(f_k : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit x_0 als einen Häufungspunkt von D mit der Eigenschaft:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_k$$

Dann gilt:

1. Wenn $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert die Grenzfunktion $f = \lim f_k$ für $x \rightarrow x_0$ gegen $c := \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$, das heißt, es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$$

2. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, so konvergiert die Summenfunktion $s = \sum_1^{\infty} f_k$ für $x \rightarrow x_0$ gegen $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$, das heißt, es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$$

Beweis. nur für 1. nötig.

$\forall_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_k \Rightarrow$ es existiert jeweils eine, in x_0 stetige Fortsetzung $\tilde{f}_k$ mit

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} f_k(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ c_k & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

es gilt dann

$$(f_k) \xrightarrow{\text{glm}} f \Rightarrow (\tilde{f}_k) \xrightarrow{\text{glm}} \tilde{f} \text{ mit } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ c = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert :

- ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{k \geq m_1} \forall_{x \in D \setminus \{x_0\}} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$
- ein $m_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_k \geq m_2 |c_k - c| < \varepsilon$

sodass für alle $k \geq m := \max\{m_1, m_2\}$ und alle $x \in D \cup \{x_0\}$ gilt:

$$|\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$$

Nach Satz 2.5.2 ist dann die Grenzfunktion $\tilde{f}$ in x_0 stetig, das heißt, es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) \stackrel{!}{=} \tilde{f}(x_0) = c$$

□

Wie erkennt man gleichmäßige Konvergenz, wenn man keine Ahnung hat, wie die Grenzfunktion aussieht?

Satz 2.5.3. Satz über das Cauchy-Konvergenzkriterium für glm Konvergenz

Für eine Funktionenfolge $(f : \mathbb{D} \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ glm. konvergent} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq m} \forall_{x \in \mathbb{D}} |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$$

Beweis.

$\Rightarrow$ wie beim Beweis für Punktfolgen (Satz 2.2.1), also wieder unter Verwendung der Δ -Ungleichung

$\Leftarrow$ Nach dem Cauchy-Kriterium für Punktfolgen (Satz 2.2.11) erhält man zunächst, dass für alle $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen einen Wert $f(x)$ konvergiert, das heißt

$$\forall_{x \in D} \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(x) = f(x)$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$\forall_{k \geq m} \forall_{x \in D} \forall_{l \geq m} y_l := |f_k(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt daraus auch

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_l := |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

das heißt (f_k) konvergiert sogar gleichmäßig gegen f . Benutzt wurde dabei nur, dass $x \mapsto |x|$ stetig ist.

□

Satz 2.5.4. Satz des Majorantenkriteriums für glm Konvergenz

Eine Funktionenreihe $\sum_{k=1}^n f_k$ mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} f_k : \mathbb{D} \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Majorante, das heißt eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ in $\mathbb{R}$ mit nichtnegativen gleichmäßigen c_k für die gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\forall_{x \in \mathbb{D}} |f_k(x)| \leq c_k.$$

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (absolut und) gleichmäßig

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beweis. Nach dem Cauchy-Kriterium 2.3.2 und 2.5.3 (2) gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{l>j \geq m} \forall_{x \in D} \left(\sum_{k=j+1}^l c_k < \varepsilon \wedge |f_j(x)| \leq c_j \right)$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{l>j \geq m} \forall_{x \in D} \left| \sum_{k=j+1}^l f_k(x) \right| \leq \sum_{k=j+1}^l |f_k(x)| \leq \sum_{k=j+1}^l c_k < \varepsilon$$

□

Ausblick in höhere Gefilde

Sei $D \subset \mathbb{K}$ eine feste kompakte Teilmenge und

$$C^0(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

1. $C^0(D)$ bildet einen ∞ dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$
2. In $C^0(D)$ wird durch $\|f\| := \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} \mid x \in D\} = \max\{|f(x)| \in \mathbb{R} \mid x \in D\} \in \mathbb{R}$ eine **Norm** definiert, die sogenannte **Supremumsnorm**. Der Beweis geht genauso wie bei der Maximumsnorm $|x|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$. $C^0(D)$ ist also ein ∞ -dimensionaler, normierter Raum über $\mathbb{K}$. In ihm kann wie gewohnt die Konvergenz von Punktfolgen $(f_k(x) \in C^0(D))$ definiert werden.

$$(f_k \in C^0(D))_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\|\cdot\|} f \in C^0(D) :\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq m} \|f_k - f\| < \varepsilon$$

wegen

$$\|f_k - f\| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist diese Konvergenz in der Norm gerade die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_k : D \rightarrow \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$

3. Der normierte Raum $C^0(D)$ ist auch **vollständig**, denn wegen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert jede Cauchy-Folge in $C^0(D) \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k,l \geq m} \|f_k - f_l\| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k,l \geq m} \forall_{x \in D} |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$$

$\stackrel{2.5.3}{\Rightarrow} (f_k)$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $f \in C^0(\mathbb{K})$ konvergiert jede Cauchy-Folge in $C^0(D)$ (bezüglich der Norm) gegen ein $f \in C^0(D)$

Zusammengefasst ergibt es

Satz 2.5.5. Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{K}$ **kompakt**. Dann bildet die Menge $C^0(\mathbb{D})$ aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{K}$ bezüglich der Supremumsnorm einen **vollständig normierten Raum** (=Banach- Raum).

Bemerkung. Ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ nicht kompakt, muss man sich auf beschränkte stetige Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{K}$ einschränken. Auch dann existiert $\|f\|$, ist allerdings dann im allgemeinen ein **echtes Supremum**

2.6. Potenzreihen

Definition. Es sei $(a_k \in \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Funktionenreihe der Form

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}_0 \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine **Potenzreihe** mit dem Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_k .

Bemerkung.

1. Es sei stets $(x - x_0)^0 = 1$, also auch für $x = x_0$!
2. Die Partialsummen sind (stetige) Polynome in $\mathbb{K}$
3. Eine Potenzreihe ist in $x = x_0$ stets konvergent mit Summe a_0

Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe ist übersichtlicher als bei allgemeinen Funktionenreihen.

A Der Konvergenzkreis

Satz 2.6.1. Konvergenzkreis

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ in $\mathbb{K}$ gibt es genau ein $R \in [0, +\infty]$ mit den Eigenschaften

1. Für alle x mit $|x - x_0| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut
2. Für alle x mit $|x - x_0| > R$ divergiert die Potenzreihe

R heißt **Konvergenzradius**, die Umgebung $(U_R(x_0))$ der **Konvergenzkreis** (beziehungsweise in $\mathbb{R}$ das **Konvergenzintervall** $]x_0 - R, x_0 + R[$) der Reihe.

Spezialfälle:

- $R = 0$: Konvergenz nur in $x = x_0$
- $R = \infty$ konvergiert überall

Beweis. Die Einschränkung sei $x_0 = 0$, sonst transformiert man einfach $\tilde{x} = x - x_0$. Zunächst brauchen wir folgendes

Lemma 2.5. Konvergiert $\sum_0^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ in einem $x_1 \neq 0$ so konvergiert sie absolut für alle $|x| < |x_1|$.

Beweis. $\sum_0^{\infty} a_k x_1^k$ konvergiert $\Rightarrow (a_k x_1^k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

$\Rightarrow (a_k x_1^k)$ beschränkt, das heißt es existiert ein $M > 0$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad |a_k x_1^k| \leq M$$

Daraus folgt für alle x mit $|x| < |x_1|$:

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \leq M q^k$$

mit $0 < q := \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$.

Also konvergiert $\sum_0^{\infty} a_k x^k$ nach dem Majorantenkriterium.

□

Eigentlicher Beweis:

Die Menge

$$A := \left\{ r \geq 0 \mid \sum_0^\infty a_k r^k \text{ konvergiert} \right\} \underbrace{\neq \emptyset}_{\text{da } 0 \in A}$$

existiert (eventuell uneigentlich) ein

$$R := \sup A \in [0, \infty]$$

und es gilt:

1. $\sum_0^\infty a_k x^k$ konvergiert für alle x und für $R > 0$ mit $|x| < R$ absolut.

Bemerkung. Es gibt ein $r \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r < R$ sodass $\sum_0^\infty a_k r^k$ konvergiert. Ansonsten gäbe es eine noch kleinere obere Schranke von A .

$\stackrel{2.5}{\Rightarrow} \sum_0^\infty a_k x^k$ konvergiert absolut.

2. $\sum_0^\infty a_k x^k$ divergiert für alle x mit $|x| > R$, wobei $R < \infty$ Voraussetzung ist.

Beweis. Wäre $\sum_0^\infty a_k x^k$ konvergent, so gäbe es nach 2.5 ein $r \in R$ mit $k < r < |x|$, sodass $\sum_0^\infty a_k r^k$ konvergiert. □

Widerspruch zu R als obere Schranke von A .

Und die Eindeutigkeit ist klar. □

Beispiel.

1. Die **geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^\infty z^k = \frac{1}{1-z} : R = 1$$

2. Die **Exponentialreihe**:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} z^k = \exp(z) : R = +\infty$$

(konvergiert also **überall!**)

3. Die **Cosinusreihe**:

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{(2k)!} z^{2k} = \cos(z) : R = +\infty$$

4. Die **Sinusreihe**:

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sin(z) : R = +\infty$$

Bemerkung. Auf dem Rande des Konvergenzkreises beziehungsweise in den Endpunkten des Konvergenzintervalles kann eine Potenzreihe konvergieren oder divergieren.

Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \text{ mit } R = 1 : \text{ Man hat } \begin{cases} \text{Konvergenz für } & x = -1 \\ \text{Divergenz für } & x = 1 \end{cases}$$

Zur Berechnung des Konvergenzkriteriums:

Satz 2.6.2. Satz über die Bestimmung der Konvergenzradien

Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ gilt:

1. $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right)} \leq \infty$ (falls der Grenzwert existiert!)
2. $R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$ (existiert [eventuell uneigentlich] immer). Das ist die sogenannte **Formel von Hadamard**

Beweis.

1. Falls $L := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \in [0, +\infty]$ existiert, so existiert auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x - x_0| = L \cdot |x - x_0| = \begin{cases} < 1 \Rightarrow & \text{Konvergenz} \\ > 1 \Rightarrow & \text{Divergenz} \end{cases}$$

Also ist $R = \frac{1}{L}$ nach dem (vereinfacht angewendeten) Quotientenkriterium.

2. Falls $L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty]$, so gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0| = L \cdot |x - x_0| = \begin{cases} < 1 \Rightarrow & \text{Konvergenz} \\ > 1 \Rightarrow & \text{Divergenz} \end{cases}$$

Also ist wieder $R = \frac{1}{L}$ nach dem (vereinfacht angewendeten) Wurzelkriterium.

□

Beweis.

1. Für die Exponentialfunktion $\sum \frac{1}{k!} z^k$ gilt $R = \infty$, also ist nach HADAMARD

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|x_k|}} = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$$

und

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$$

2. Für die **Binominalreihe** zur Exponentialfunktion $\alpha \in \mathbb{R}$

$$B_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

gilt

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

(a) falls $\alpha = m \in \mathbb{N}_0 : \forall_{k>m} \binom{m}{k} = 0$, das heißt

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k = (1+z)^m \text{ für } z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = +\infty$$

(b)

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| \rightarrow 1 \Rightarrow R = +\infty$$

Es gilt ebenfalls nach Analysis II II:

$$B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$$

□

Satz 2.6.3. Eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ konvergiert in jedem abgeschlossenem Kreis $K_r(x_0) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| \leq r\}$ mit $0 < r < R$ **gleichmäßig** und definiert damit im ganzen Konvergenzbereich $U_R(x_0)$ stetige Funktionen

Beweis.

1. Für alle $x \in K_r(x_0)$ gilt $|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k| r^k$. Da $\sum_0^\infty a_k r^k$ wegen $r < R$ absolut konvergiert, folgt die gleichmäßige Konvergenz aus dem Majorantenkriterium 2.5.4. Also ist $x \mapsto f(x) := \sum_0^\infty a_k(x - x_0)^k$ in $K_r(x_0)$ stetig.
2. zu jedem x mit $|x - x_0| < R$ gibt es ein $r > 0$ mit $|x - x_0| < r < R$. Also ist f in x stetig.

□

Zum Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises:

Satz 2.6.4. Abelscher Grenzwertsatz

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

besitzt einen Konvergenzradius $R \in]0, +\infty[$ und konvergiert auch in einem Punkt x_1 auf dem Rande des Konvergenzbereiches mit Summe s .

Dann konvergiert auch die dadurch dargestellte Funktion $x \mapsto f(x)$ bei radialer Annäherung an x_1 gegen den Wert s . Im Falle $K = R$ kann also die ganze Funktion $x \mapsto f(x)$ durch $f(x_1) := s$ stetig fortgesetzt werden.

Anwendung. In Analysis II können wir zeigen

$$f(x) := \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} x^k = -\log(1-x) \text{ für } |x| < R = 1,$$

denn $f'(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, und das ist eine geordnete Reihe, deren Stammfunktion $-\log(1-x)$ ist.

Diese Reihe konvergiert auch für $x = -1$. Also ist nach ABEL:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \stackrel{\log = \text{stetig}}{=} -\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = +\log 2$$

Beweis. Setzt man $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ für $0 \leq t < 1$ so erhält man mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k(x_1 - x_0)^k}_{b_k} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot t^k$$

eine Potenzreihe in t mit Konvergenzradius $R = 1$, denn

$$\limsup \sqrt[k]{|b_k|} = \lim \sqrt[k]{|a_k|} |x_1 - x_0| = \frac{1}{R} \cdot R = 1$$

Sie stellt für $0 \leq t < 1$ eine stetige Funktion

$$t \mapsto g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

dar, wobei $\sum_0^{\infty} b_k$ durch die Summe s dargestellt wird. Zu zeigen ist:

$$\lim_{t \rightarrow +1} g(t) = s$$

Für die Partialsumme $s_l = \sum_0^l b_k$ ($\rightarrow s$) gilt $0 \leq t < 1$

$$\sum_{k=0}^l b_k t^k = s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{l-1} s_k \cdot t^k + \underbrace{s_l}_{\rightarrow s} \underbrace{t^l}_{\rightarrow 0}$$

Also ist

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = (1-t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k$$

und

$$g(t) - s = (1-t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) t^k,$$

denn

$$(1-t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} t^k = 1$$

Sie nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt

1. Es existiert eine Schranke $m \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\forall_{k \geq m} |s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

2. Es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle t mit $|t - 1| = 1 - t < \delta$

$$(1 - t) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} |s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für alle diese t gilt dann:

$$|g(t) - s| \leq \underbrace{(1 - t) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} |s_k - s|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{t^k}_{\leq 1} + (1 - t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|s_k - s|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{t^k}_{\leq 1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{(1 - t) \sum_{k=m}^{\infty} t^k}_{\leq 1} < \varepsilon,$$

das heißt

$$g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} s$$

□

B Der große Umordnungssatz

Gegeben:

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ für } |x| < R_1$$

$$x \mapsto g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \text{ für } |x| < R_2$$

Dann gilt für die Summe $f + g$ für $|x| < \min\{R_1, R_2\}$

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

Das ergibt wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius

$$R \stackrel{!}{=} \min\{R_1, R_2\}$$

Frage: Lässt sich auch das Produkt $f \cdot g$ wieder durch eine Potenzreihe darstellen?

Naiver Versuch: (Nach „Lieschen Müller“, also ausmultiplizieren und sortieren):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j \cdot b_k x^{k+j} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\underbrace{\quad}_{r=j+k} \stackrel{?}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot b_{r-j} \right) x^r \tag{2.7}$$

Die „=“ sind **sehr** fragwürdig, seltsamerweise ist das Ergebnis richtig!

Problem: Die Produktreihe $\tilde{a}_j \cdot \tilde{b}_k$ bilden eine **unendliche Matrix** mit $j, k \in \mathbb{N}$, $\tilde{a}_j := a_j \cdot x^j$, $\tilde{b}_k := b_k \cdot x^k$.

In 2.6 wird erst zeilenweise, dann spaltenweise aufsummiert (oder umgekehrt).

In 2.7 werden die endlichen Summen der Schräglinien „aufsummiert“.

Konvergiert das Ganze und kommt immer das gleiche heraus? Um das zu Beweisen brauchen wir „schwere Geschütze“

Definition. 1. Eine **Doppelfolge** (bzw. unendliche Matrix) in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a_{jk} \in \mathbb{K}$ bezeichnet mit $(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$. Eine **Doppelreihe** in $\mathbb{K}$ ist eine Doppelfolge

$$\left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m a_{jk} \right)_{l,m \in \mathbb{N}}$$

2. Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $r \mapsto (j, k)$ eine Bijektion, so heißt die (einfache) Folge $(a_{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ eine **Anordnung der Doppelfolge** beziehungsweise die einfache Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} a_{\varphi(r)}$ eine **Anordnung der Doppelreihe**

$$\left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m a_{j,k} \right)_{l,m \in \mathbb{N}}$$

Beispiel. für Anordnungen:

1. Die **Cantorsche Diagonalanordnung** einer Doppelfolge

$$\underbrace{a_{11}}_{r=2}; \underbrace{a_{12}; a_{21}}_{r=3}; \underbrace{a_{22}}_{r=3}; \underbrace{a_{13}; a_{22}; a_{31}}_{r=4}; \dots$$

2. Anordnung im Quadrat

Satz 2.6.5. Großer Umordnungssatz

Sei $(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall l \in \mathbb{N} \sum_{j,k=1}^l |a_{jk}| \leq M$$

1. Für jede Anordnung $(a_{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(r)}$ absolut konvergent mit stets gleicher Summe s
2. Alle Zeilenreihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$ ($j \in \mathbb{N}$) und alle Spaltenreihen $\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k}$ ($k \in \mathbb{N}$) sind absolut konvergent
3. Die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k})$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k})$ sind absolut konvergent mit gleicher Summe s wie unter **1.**

Beweis. Voraussetzung:

$$\sum_{j,k}^{\infty} |a_{jk}| \leq M$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

1 Sei $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine **beliebige Abzählung**. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$l := \max_{r=1, \dots, m} \{\varphi_1(r), \varphi_2(r)\}$$

das heißt:

$$\forall_{r=1}^m \varphi_1(r) \leq l, \varphi_2(r) \leq l$$

Dann gilt

$$\sum_{r=1}^m |a_{\varphi(r)}| \leq \sum_{j,k}^l |a_{jk}| \leq M,$$

das heißt $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{\varphi(r)}|$ konvergiert, denn die Folge der Partialsummen ist beschränkt. Anwendung von Satz 2.3.5. Für jede andere Abzählung:

$$\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ ist } \varphi^{-1} \circ \psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

eine Bijektion, das heißt

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\psi(s)} = \sum a_{\varphi(\varphi^{-1} \circ \psi(s))},$$

die nach dem kleinen Umordnungssatz (Satz 2.3.9) mit gleicher Summe s konvergiert.

2 Für die Partialsumme $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$ der j -ten Zeilenreihe gilt mit $l := \max\{j, m\}$

$$\sum_{k=1}^m |a_{jk}| \leq \sum_{j,k}^l |a_{jk}| \leq M$$

das heißt die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$ konvergiert nach Satz 2.3.5. Analog für die Spaltenreihe

3a Für $m \geq l$ gilt

$$\sum_{j=1}^l \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} \right| \leq \sum_{j,k}^m |a_{jk}| \leq M$$

und für $m \rightarrow \infty$ ebenfalls

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \right| \leq M$$

das heißt $\sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk})$ konvergiert absolut nach Satz 2.3.5. Ganz analog kann man die Umkehrrichtung beweisen.

3b Sei $\sum_1^{\infty} a_{\varphi(r)}$ eine (absolut konvergente) Anordnung der Doppelreihe. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$(s - s_{m_0} =) \sum_{r=m_0+1}^{\infty} |a_{\varphi(r)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

zu einem solchen m_0 gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0)\} \subset \{(j, k) \mid 1 \leq j, k \leq l_0\}$$

Für $p \geq l_0$, $q \geq l_0$ und $m > m_0$ gilt dann

$$\left| \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q a_{jk} - \sum_{r=1}^m a_{\varphi(r)} \right| \leq \sum_{r=m_0+1}^{\infty} |a_{\varphi(r)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Denn die Glieder von $a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(m_0)}$ heben sich weg. Der Grenzübergang erst von $q \rightarrow \infty$, dann von $p \rightarrow \infty$ (oder Umgekehrt) liefert:

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \right) - \sum_{r=1}^m a_{\varphi(r)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

das heißt:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{\varphi(r)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \right)$$

Folgerung. $\sum_0^{\infty} a_k$ und $\sum_0^{\infty} b_k$ seien **absolut konvergente Reihen** mit Summen a und b . Dann konvergiert jede Anordnung $\sum_{r=0}^{\infty} c_{\varphi(r)}$ der Doppelreihe $(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m a_j b_k)_{l,m \in \mathbb{N}}$ absolut gegen das Produkt $a \cdot b$, insbesondere die **Cauchy-Produktreihe**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r a_k b_r \right)$$

Bemerkung. Wegen

$$\sum_{j,k=0}^l |a_j b_k| = \left(\sum_{j=0}^l |a_j| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^l |b_k| \right) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right)$$

sind die Voraussetzungen des großen Umordnungssatzes (Satz 2.6.5) erfüllt.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} c_{\varphi(r)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)}_{=b} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot b = b \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j}_{=a} = a \cdot b \end{aligned}$$

und im Spezialfall:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r a_k \cdot b_{r-k} \right) = a \cdot b,$$

da die innere Summe endlich ist und deswegen Klammern gesetzt werden dürfen.

□

Beispiel. Additionstheorem der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} (\exp z) \cdot (\exp w) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot z^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot w^k \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \cdot z^k \cdot \frac{1}{(r-k)!} \cdot w^{r-k} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \cdot z^k \cdot w^{r-k} \right)}_{\text{binomische Formel}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \cdot (z+w)^r \\ &= \exp(z+w) \end{aligned}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

Folgerung.

1. $(\exp z)^k = \exp(k \cdot z)$ für alle $k \in \mathbb{N}$
2. $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$, da $(\exp(z)) \cdot (\exp(-z)) = \exp 0 = 1$

Deswegen auch die Schreibweise e^z statt $\exp z$

C Rechnen mit Potenzreihen

Satz 2.6.6. Multiplikation von Potenzreihen

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ und } x \mapsto g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

seien zwei durch Potenzreihen dargestellte Funktionen in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradien R_1 und R_2 . Dann wird das Produkt der beiden Potenzreihen $f(x) \cdot g(x)$ für $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ durch die **Cauchy-Produktreihe**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r a_k b_{r-k} \right) x^r$$

dargestellt.

Beweis. Anwendung der letzten **Folgerung**. □

Bemerkung. Der genaue Konvergenzradius der Produktreihe kann größer als $\min\{R_1, R_2\}$ sein

Beispiel. Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^k$$

also auch

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r 1 \cdot 1 \right) z^r = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) z^r$$

Satz 2.6.7. Komposition von Produktreihen

$$x \mapsto f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j \text{ und } y \mapsto g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$$

seien zwei durch Potenzreihen dargestellte Funktionen in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradien $R_1 > 0$ und $R_2 > 0$. Dann gilt:

1. Alle Potenzreihen $x \mapsto f^k(x)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) lassen sich für $|x| < R_1$ durch Potenzreihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} x^j$ darstellen
[Auspotenzieren und Potenzen von x ordnen]

2. Ist $|a_0| < R_2$, so gibt es ein $r > 0$, sodaß für alle x mit $|x| < r$ die Komposition $x \mapsto g \circ f(x)$ durch die Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k a_{jk} \right) x^j$$

dargestellt wird.

[Einsetzen und nach Potenzen von x ordnen]

Beweis. Es ist nach Voraussetzung für $|x| < R_1$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

und für $|x| < R_2$

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k.$$

Da beide Reihen absolut konvergent sind, setzen wir für $|x| < R_1$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \cdot |x|^j$$

und für $|x| < R_2$

$$\tilde{g}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \cdot |y|^k.$$

Damit folgt aus Satz 2.6.6 mittels vollständiger Induktion

$$\begin{aligned} f^k(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} x^j \text{ mit } a_{jk} = \sum_{j=j_1+\dots+j_k} (a_{j_1} \cdots a_{j_k}) \text{ für } |x| < R_1 \\ \tilde{f}^k(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{jk} |x|^j \text{ mit } \tilde{a}_{jk} = \sum_{j=j_1+\dots+j_k} (|a_{j_1}| \cdots |a_{j_k}|) \text{ für } |x| < R_2 \end{aligned}$$

wobei immer $|a_{jk}| \leq \tilde{a}_{jk}$.

Wegen $\tilde{f}(0) = |a| < R_2$ gibt es nach dem Permanenzprinzip 2.4.7 ein r mit $0 < r < R_1$, sodass für $|x| < r$ und weil f in g eingesetzt werden darf, gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk} x^j| \leq \sum_{j=0}^m \tilde{a}_{jk} |x|^k \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} |x|^j = \tilde{f}^k(x),$$

also

$$\sum_{j,k=0}^m |b_k a_{jk} x^j| \leq \sum_{k=0}^m |b_k| \sum_{j=0}^m |a_{jk} x^j| \leq \sum_{k=0}^m |b_k| \tilde{f}^k(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \tilde{f}^k(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)) =: M_x$$

Anwendung des Großen Umordnungssatzes (Satz 2.6.5) auf die Doppelreihe

$$\left(\sum_{j=0}^l \sum_{k=0}^m b_k a_{jk} x^j \right)_{l,m \in \mathbb{N}}$$

2. Topologie des $\mathbb{R}^n$

liefert für $|x| < r$:

$$(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty}}_{\text{nach 2.6.5 Vertauschbar}} (b_k a_{jk} x^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k a_{jk} \right) x^j$$

□

Bemerkung. Der *Mindestradius* $r < R_1$ kann so groß gewählt werden, dass für $|x| < r$ noch

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \cdot |x|^j < R_2$$

bleibt.

Satz 2.6.8. Division durch Potenzreihen

$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sei eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f(0) = a_0 \neq 0$. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ für $|x| < r$ durch eine Potenzreihe dargestellt wird.

Beweis. Wegen $a_0 = f(0) \neq 0$ ist $f(x) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung von $x = 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0 - (a_0 - f(x))} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{a_0} f(x)\right)} = \frac{1}{a_0} g \circ \tilde{f}(x)$$

mit $|y| < 1$

$$g(y) = \frac{1}{1-y}$$

und

$$\tilde{f}(x) = 1 - \frac{1}{a_0} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{a_k}{a_0} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k x^k$$

wobei $|\tilde{a}_0| = 0 < 1$. Anwendung von Satz 2.6.7

□

Beispiel. In einer Umgebung von $z = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos z} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} \pm \dots\right)} = 1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} \pm \dots\right)^1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} \pm \dots\right)^2 \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{5}{24} z^4 + \dots \\ \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} z^2 \mp \dots\right)} \\ &= z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \end{aligned}$$

Einfaches Verfahren zur Bestimmung des Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ zweier Potenzreihen. Der Ansatz

$$\frac{\sum a_k x^k}{\sum b_k x^k} = \sum c_k x^k,$$

dessen Existenz durch $b_0 \neq 0$ gesichert ist, liefert

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k c_{r-k} \right) x^r \quad (2.8)$$

Frage: Kann man die gesuchten Koeffizienten durch Vergleich bestimmen?

Satz 2.6.9. Identitätssatz für Potenzreihen

$x \mapsto f(x)$ und $x \mapsto g(x)$ seien zwei in einer **gemeinsamen Umgebung** U von $x_0 \in \mathbb{K}$ durch Potenzreihen dargestellten Funktionen. Ist dann $(x_l \in U(x_0))_{l \in \mathbb{N}}$ eine gegen x_0 konvergente Punktfolge mit

$$\forall_{l \in \mathbb{N}} f(x_l) = g(x_l)$$

so stimmten Potenzreihendarstellungen von f und g überein. Insbesondere gilt $f \equiv g$ in ganz $U(x_0)$.

Beweis. Sei $f(x) = \sum a_k (x - x_0)^k$, $g(x) = \sum b_k (x - x_0)^k$ wegen der Stetigkeit von f und g in x_0 aus $\forall_{l \in \mathbb{N}} f(x_l) = g(x_l)$:

$$\begin{aligned} a_0 = f(x_0) &\stackrel{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{l \rightarrow \infty} f(x_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} g(x_l) \stackrel{\text{Stetigkeit}}{=} g(x_0) = b_0 \\ \Rightarrow a_0 &= b_0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f_1(x_l) &:= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_l - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (x_l - x_0)^{k-1} = g_1(x_l) \\ \Rightarrow f_1(x_l) &= g_1(x_l) \end{aligned}$$

Für $l \rightarrow \infty$ erhält man das Ganze analog.

$a_1 = b_1$ und vollständige Induktion liefert schließlich:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} a_k = b_k$$

□

Folgerung. Stimmen zwei Potenzreihen in einer noch so kleinen Umgebung ihres Entwicklungspunktes überein, so sind sie **identisch**, denn jede noch so kleine Umgebung von U von x_0 enthält eine gegen x_0 konvergente Zahlenfolge.

Anwendung. Aus 2.8 folgt:

$$\forall_{r \in \mathbb{N}_0} a_r = \sum_{k=0}^r b_k c_{r-k},$$

also bei

$$\begin{aligned} b_0 \cdot c_0 &= a_0 \quad (\rightarrow c_0) \\ b_0 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_0 &= a_1 \quad (\rightarrow c_1) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

Daraus kann man sukzessive die c_k 's bestimmen. Auch eine explizite Darstellung ist möglich, denn für $0 \leq r \leq m$ liegt ein lösbares Lineare Gleichungssystem für $c_0, c_1, \dots, c_m$ vor. Mit Hilfe der **Cramerschen Regel** aus der Linearen Algebra kann man diese Lösungen bestimmen.

3. Spezielle Funktionen

Literatur: BLATTER, CHRISTIAN: Analysis 1 (4. Auflage), S. 173 - 196

3.1. Die Exponential- und die Logarithmus-Funktionen

$z \in \mathbb{C}$	$\mapsto \exp z = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \in \mathbb{C}$	(Komplexe) Exponentialfunktion
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \exp x = e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \in \mathbb{R}$	(Reelle) Exponentialfunktion
$x \in \mathbb{R}^+$	$\mapsto \log x := \exp^{-1} x \in \mathbb{R}$	(Natürlicher) Logarithmus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \exp_a x = a^x := \exp(x \cdot \log a) \in \mathbb{R}$	Allgemeine Potenz zur Basis $a \in \mathbb{R}^+$
$x \in \mathbb{R}^+$	$\mapsto \log_a x := \log x / \log a \in \mathbb{R}$	Logarithmus zur Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

3.2. Die hyperbolischen und Area-Funktionen

$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \in \mathbb{R}$	Sinus hyperbolicus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \in \mathbb{R}$	Cosinus hyperbolicus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in \mathbb{R}$	Tangens hyperbolicus
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mapsto \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$ $= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \in \mathbb{R}$	Cotangens hyperbolicus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \operatorname{Arsinh} x := \sinh^{-1} x$ $= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \in \mathbb{R}$	Area - Sinus hyperb.
$x \in [1, \infty[$	$\mapsto \operatorname{Arcosh} x := \cosh^{-1} x$ $= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \in [0, \infty[$	Area - Cosinus hyperb.
$x \in]-1, +1[$	$\mapsto \operatorname{Artanh} x := \tanh^{-1} x$ $= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \in \mathbb{R}$	Area - Tangens hyperb.
$x \in \mathbb{R} \setminus [-1, +1]$	$\mapsto \operatorname{Arcoth} x := \coth^{-1} x$ $= \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Area - Cotangens hyperb.

3.3. Die Kreis- und die Argument-Funktion

$t \in \mathbb{R}$	$\mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t \in S^1 \subset \mathbb{C}$	Kreisfunktion
$z = re^{it} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mapsto t = \arg z \in [0, 2\pi[$	Argumentfunktion

3.4. Die trigonometrischen und Arcus-Funktionen

$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \sin x := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ $= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \in \mathbb{R}$	Sinus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \cos x := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ $= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \in \mathbb{R}$	Cosinus
$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \in \mathbb{R}$	Tangens
$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \in \mathbb{R}$	Cotangens
$x \in [-1, +1]$	$\mapsto \operatorname{Arcsin} x := \sin^{-1} x \in [-\pi/2, +\pi/2]$	Arcus - Sinus
$x \in [-1, +1]$	$\mapsto \operatorname{Arccos} x := \cos^{-1} x \in [0, \pi]$	Arcus - Cosinus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \operatorname{Arctan} x := \tan^{-1} x \in]-\pi/2, +\pi/2[$	Arcus - Tangens
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto \operatorname{Arccot} x := \cot^{-1} x \in]0, \pi[$	Arcus-Cotangens

$$1. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$2. \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$3. \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$4. \cos(-x) = \frac{1}{2}(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-ix} + e^{ix}) = \cos(x)$$

$$5. \sin(-x) = \frac{1}{2i}(e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}) = \frac{1}{2i}(e^{-ix} - e^{ix}) = (-1) \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\sin(x)$$

$$6. \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

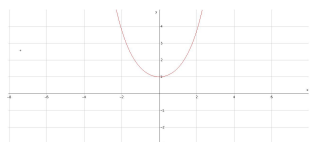
$$\begin{aligned}
&\rightarrow \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})^2 - \frac{1}{4}(e^{ix} - e^{-ix})^2 = \frac{1}{4} \left(e^{2ix} + 2 \cdot \underbrace{e^{ix} \cdot e^{-ix}}_{=1} + e^{-2ix} \right) - \frac{1}{4} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{4} (e^{2ix} - e^{2ix} + 2(-1) \cdot (-2) + e^{-2ix} - e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1
\end{aligned}$$

$$7. \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$8. \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

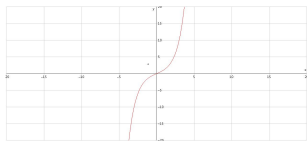
Beweis folgt aus $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$

$$9. \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$



3. Spezielle Funktionen

10. $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$



11. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

12. $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$

13. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

14. $\operatorname{arc\,sinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

15. $\operatorname{arc\,cosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

3.5. Stammfunktionen

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \text{ für } x \neq 0$$

2. $\int e^{kx} = \frac{1}{k} e^{kx}$

$$\int \sin = -\cos + c$$

$$\int \cos = \sin + c$$

3. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arctan x + c \text{ für } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \text{ für } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x + c \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

3.6. Stammfunktion einzelner Summanden

1. $\int p_0(x) dx = \text{bekannt}$

2. $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \log|x-\alpha| + c$

3. $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c$ mit $k \geq 2$

4. $\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{2} \log((x-\beta)^2 + \gamma^2) + c$

5. $\int \frac{x-\beta}{[(x-\beta)^2 + \gamma^2]^k} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{k-1} \frac{1}{[(x-\beta)^2 + \gamma^2]^{k-1}} + c$

6.
$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx \stackrel{\text{subst}}{=} \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x-\beta}{\gamma} + c$$
$$y = \frac{x-\beta}{\gamma}$$

7. $\int \frac{1}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k} dx$ mit $k \geq 2$

hier gibt es eine Rekursionsformel (siehe Skript)

3.7. Grenzwerte von Reihen und Summen

1. $f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{k} x^k = -\log(1-x)$ für $|x| < R = 1$

2. $\sum_1^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

Teil II.

Analysis II

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Wir betrachten Abbildungen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m(\mathbb{C})$ auf einem (nichttrivialen Intervall I)

Bemerkung. Notwendig wäre nur, dass der Definitionsbereich D von f „zulässig“ ist.

4.1. Differentierbarkeit und Ableitung

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $x_0 \in I$ fest gewählt.

Sekantensteigung:

$\Delta(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist als **Differentialquotient** definiert. **Forderung:** Die Funktion $x \mapsto \Delta(x)$ ($x \neq x_0$) soll für $x \rightarrow x_0$ einen **wohlbestimmten Grenzwert** besitzen und damit eine Tangente in x_0 definieren mit **Tangentensteigung**

$$f'(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x)$$

Definition. Eine Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \right)$$

existiert. Er heißt **Ableitung** oder **Differenzialquotient** von f in x_0 . f heißt auf I differenzierbar, wenn sie in **jedem** $x_0 \in I$ diffbar ist. Dann existiert die Ableitung als Abbildung $f' = \frac{df}{dx}$ von I nach $\mathbb{R}^m$. Gleichbedeutend mit der **Existenz des Grenzwertes** ist die **stetige Fortsetzbarkeit** der Abbildung $x \mapsto \Delta(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ in x_0 . mit dieser Abbildung gilt dann

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \Delta(x)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \Delta(x_0)(x - x_0) + \underbrace{(\Delta(x) - \Delta(x_0)) \cdot (x - x_0)}_{=R(x)} \\ &= f(x_0) + \underbrace{\Delta(x_0)}_{=a(x_0)}(x - x_0) + R(x) \\ &= \underbrace{f(x_0) + a(x - x_0)}_{=Tangente} + R(x) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{R(x)}{x - x_0} \right) = 0$$

Dies liefert die zwei **Kennzeichnungen**:

Eine Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist in $x_0 \in I$ genau dann diffbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

1. Es existiert eine in x_0 stetige Abbildung $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\forall_{x \in I} f(x) = f(x_0) + \Delta(x) \cdot (x - x_0)$$

Es ist dann $f'(x_0) = \Delta(x_0)$

2. f lässt sich in x_0 linear **approximieren**, das heißt es existiert ein $a \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\forall_{x \in I} f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + R(x)$$

mit einem Restglied $x \mapsto R(x)$, für das gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

Es ist dann $f'(x_0) = a$

Bemerkung.

1. Die Abbildung Δ im Kennzeichen 1. hängt natürlich von x_0 ab. (deshalb auch die Schreibweise $\Delta|_{x_0}(x)$).
Ihre Existenz ist immer gesichert. Entscheidend ist die Stetigkeit in x_0 .
2. Aus der Stetigkeit von Δ in x_0 folgt sofort,

$$\boxed{f \text{ in } x_0 \text{ diffbar} \Rightarrow f \text{ in } x_0 \text{ stetig}}$$

Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig, denn es gibt Funktionen, die überall stetig aber nirgends diffbar sind.

3. Die Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$ im Kennzeichen 2. lässt sich auch mit Hilfe der **Landauschen O Symbole** durch $R(x) = \mathcal{O}(x - x_0)$ für $x \rightarrow x_0$ beschreiben. Allgemein gilt

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

4. Man kann auch (wie bei der Stetigkeit) **links-** bzw. **rechtsseitige Diffbarkeit** definieren und eine **links-** bzw. **rechtsseitige Ableitung** bilden.
5. Interpretation der Abbildung

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$: Steigung der Tangente $x \mapsto f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$ (also im Punkt x_0).

$f'(t_0) = \dot{f}(t_0) \in \mathbb{R}^m$ ($m > 1$) Geschwindigkeitsvektor oder Bahnkurve $t \mapsto f(t)$

Beispiel.

0 Lineare Abbildungen $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b \in \mathbb{R}^m$ sind überall diffbar mit

$$\forall_{x_0 \in \mathbb{R}} f'(x_0) = a$$

- 1** Die **Exponentialfunktion** $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) = e^x \in \mathbb{R}$ ist überall diffbar mit $\exp = \exp$ beziehungsweise

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (e^x)' = e^x,$$

denn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{h} = 1$, was aus der Potenzreihendarstellung ersichtlich ist.

- 2** Die **Kreisfunktion** $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} \in \mathbb{C}$ ist überall diffbar mit

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (e^{ix})' = i \cdot e^{ix},$$

denn

$$\begin{aligned} \Delta|_{x_0}(x) &= \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} = e^{ix} \cdot \frac{e^{i(x-x_0)} - 1}{i(x-x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} ie^{ix} \\ &\text{wegen: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih} - 1}{ih} = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung. Vektorwertige Funktionen lassen sich komponentenweise differenzieren

Satz 4.1.1. Eine Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist (in $x_0 \in I$) genau dann differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) (in $x_0 \in I$) diffbar ist und es gilt:

$$f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0))$$

Beweis. Anwendung von Satz 2.4.5 auf die in x_0 stetige Abbildung Δ . □

Satz 4.1.2. Rechenregel für diffbare Funktionen

1. $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) seien (in $x_0 \in I$) diffbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) in x_0 diffbar mit:
 - (a) $(f + g)' = f' + g'$ **Summenregel**
 - (b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ **Produktregel**
 - (c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$ **Quotientenregel**
2. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ sei (in $x_0 \in I$) diffbar und ebenso $g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ diffbar. Dann ist auch $f \circ g$ (in $x_0 \in I$) diffbar mit
 - (d) $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ (**Kettenregel**)

Beweis. (a) klar

(b)

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{g \text{ stetig}} f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) = (f \cdot g)'(x_0) \end{aligned}$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
 &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \boxed{+ f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)} \\
 &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
 &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} - \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + \Delta_1(x)(x - x_0) \\
 g(x) &= g(x_0) + \Delta_2(y)(y - y_0) \quad \text{mit } y_0 = f(x_0) \\
 g \circ f(x) &= g \circ f(x_0) + \Delta_2 \circ f(x) \cdot \Delta_1(x)(x - x_0)
 \end{aligned}$$

wobei Δ in x_0 stetig ist. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)'(x_0) &= \Delta(x_0) = \Delta f(x_0) \Delta_1(x_0) \\
 &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
 \end{aligned}$$

□

Anwendung.

$$1. \quad \boxed{\frac{d}{dx} x^k = k \cdot x^{k-1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} x^0 &= 1 \frac{d}{dx} = 0 \\
 \frac{d}{dx} x^k &= k \cdot x^{k-1} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{k-1} = \frac{d}{dx} (x^k \cdot x) \\
 &= (k \cdot x^{k-1}) \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k \quad \text{Häckchen}
 \end{aligned}$$

für

$$k = -l < 0$$

$$\frac{d}{dx} x^k = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^l} \stackrel{(c)}{=} \frac{-lx^{l-1}}{x^{2l}} = -l \frac{1}{x^{l+1}} = kx^{k-1}$$

□

$$2. \exp' = \exp, \cosh' = \sinh, \sinh' = \cosh, \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x \pm e^{-x}}{2} \right)' &= \frac{((e^x)' \pm (e^{-x})')}{2} = \frac{e^x \mp e^{-x}}{2} \\ (\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{\sinh' x \cosh x - \cosh' x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \end{aligned}$$

□

$$3. (e^{ix})' = ie^{ix}$$

$$\begin{aligned} \cos' x &= -\sin x \\ \sin' x &= \cos x \\ \tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 - \tan^2 x \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)' &\stackrel{4.1.1}{=} \cos' x + i \sin' x \\ &\stackrel{!}{=} i(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x \end{aligned}$$

□

Folgerung. aus 1: Polynome von rationalen Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich diffbar und ihre Ableitungen sind wieder Polynome beziehungsweise rationale Funktionen.

Zur Ableitung rationaler Umkehrfunktionen:

Satz 4.1.3. Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ sei eine **stetige Bijektion (insbesondere streng monoton)**, die in $x_0 \in I$ diffbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : j \rightarrow I \text{ in } y_0 := f(x_0)$$

diffbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

das heißt es gilt:

$$(e) \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad (\text{in } y_0)$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Beweis. Nach Voraussetzung gilt: $f(x) = f(x_0) + \Delta(x)(x - x_0)$, beziehungsweise $y = y_0 + f^{-1}(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ für alle $x \in I$, Δ in x_0 stetig, und $f'(x_0) = \Delta \neq 0$, also $\Delta(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$ (Permanenzprinzip). Daraus folgt für alle $y = f(x) \in f[U(x_0)] = V(y_0) \subset J$

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= f^{-1}(y_0) + \frac{1}{\Delta(f^{-1}(y))}(y - y_0) \\ &= f^{-1}(y_0) + \tilde{\Delta}(y) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

wobei $y \mapsto \tilde{\Delta}(y)$ in y_0 stetig ist (da f^{-1} in y_0 stetig). Also existiert

$$(f^{-1})'y_0 = \tilde{\Delta}(y_0) = \frac{1}{\Delta(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

□

Anwendung.

1. $\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{x}$

2. für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \arcsin h'x &= \frac{1}{\sinh'(\arcsin hx)} = \frac{1}{\cosh(\arcsin hx)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\arcsin hx)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \arcsin h'x &= \frac{1}{\cos(\arcsin hx)} = \cos y > 0 && \text{für } |y| < \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} && \text{für } |x| < 1 \end{aligned}$$

Bemerkung. Der $\arcsin$ (Hauptzweig!) ist für $x = \pm 1$ zwar definiert und stetig, aber nicht diffbar (vertikale Tangente).

Rekursiv lassen sich höhere Ableitungen einführen.

Definition. Eine Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **p-mal diffbar** ($p \geq 1$), wenn die p-te Ableitung $f^{(p)} := (f^{(p-1)})'$ existiert.

p-mal stetig diffbar ($p \geq 0$), wenn $f^{(p)}$ existiert und stetig ist, sowie ∞ oft (stetig) diffbar ist. Dabei wird $f^{(0)} := f$, also als „0.te Ableitung“ gesetzt.

Für

$$\mathcal{D}^p(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ p-mal diffbar}\} \quad (p \geq 1)$$

und

$$C^p(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig diffbar}\} \quad (p \geq 0)$$

gelten die echte Inklusionen

$$C(I) = C^0(I) \supsetneq \mathcal{D} \supsetneq C^1(I) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{D}^p(I) \supsetneq \mathcal{D}^\infty(I) = C^\infty(I)$$

4.2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seine Anwendung

Beispiel. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^3$ ist 2-mal stetig diffbar ($f \in C^2(\mathbb{R})$) aber nicht 3 mal diffbar ($f \notin \mathcal{D}^3(\mathbb{R})$)

1. $f(x) = \text{sign } x^3 \Rightarrow f'(x) = \text{sign}(3x^2)$ für $x \neq 0$. Wegen

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|^3}{x} = x|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Also ist $\forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = \text{sign } x^3 x^2$

2. Analog ist $\forall_{x \in \mathbb{R}} f''(x) = \text{sign } |x| 6x = 6|x|$

3. $f''(x)$ ist in $x = 0$ nicht diffbar, denn $\frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = 6 \text{sign } x$ ist in $x = 0$ nicht stetig ergänzbar.

Rechenregel für höhere Ableitungen

Satz 4.1.4. Satz über Rechenregeln höherer Ableitungen

$f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow K$ seien p -mal (stetig) diffbar ($p \in \mathbb{N}_0$). Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls definiert) p -mal (stetig) diffbar und es gilt

(a) $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$

(b) $(f \cdot g)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$

Beweis. von (b) durch vollständige Induktion:

$p = 0$: trivial, für $p = 1$ gelten immer noch normale Rechenregel.

$$\begin{aligned} p \rightarrow p+1 \quad (f \cdot g)^{(p+1)} &\stackrel{\text{ind. Ann.}}{=} \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (f^{(k+1)} g^{(p-k)} + f^{(k)} g^{(p+1-k)}) \\ &= \binom{p}{p} f^{(p+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k-1} f^{(k)} g^{(p+1-k)} + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p+1-k)} + \cancel{\binom{0}{0} f^{(0)} g^{(p+1)}} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)} g^{(p+1-k)} \end{aligned}$$

□

4.2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seine Anwendung

Die folgenden Sätze sind fast alle nur für reelwertige Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ gültig. Bei einem Intervall I bezeichnet $\overset{\circ}{I}$ das **innere Intervall** (also ohne Randpunkte)

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

A Der Mittelwertsatz (MWS)

Definition. Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ **lokal minimal** bzw. $f(x_0)$ ein **lokales Minimum**, wenn eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 existiert mit

$$\forall_{x \in U} f(x) \geq f(x_0)$$

Analog folgt das **lokale Maximum** bzw. **lokal Maximal** mit der Bedingung

$$\forall_{x \in U} f(x) \leq f(x_0)$$

Es sind gleichbedeutend:

- *lokal extremal* : $\Leftrightarrow$ lokales Minimum/Maximum
- *Lokals Extremum*: $\Leftrightarrow$ lokales Minimum/Maximum

Bemerkung. Lokale Extrema können nach Definition nur in **Innenpunkten** auftreten, niemals auf dem Rand!

Satz 4.2.1. Satz der lokalen Extremas

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $x \in]a, b[$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $f(x) = f(x_0) + \Delta(x) \cdot (x - x_0)$. Dann ist $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1. Annahme $f'(x_0) = \Delta(x_0) > 0 \stackrel{2.4.7}{\Rightarrow}$ es existiert eine Umgebung $U(x_0) \subset I$ von x_0 mit $\forall_x \Delta(x) > 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall_{x \in U} (x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)) \\ \forall_{x \in U} (x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ in } x_0 \text{ nicht lokal extremal}$$

2. Annahme $f'(x_0) = \Delta(x_0) < 0$ folgt analog zur **1. Annahme**.

Es bleibt nur $f'(x_0) = \Delta(x_0) = 0$ □

Ein etwas anderer Beweis:

Beweis. f besitze in x ein lokales Maximum (für Minimum geht der Beweis praktisch identisch). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]a, b[$ und

$$\forall_{\zeta \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[} f(\zeta) \leq f(x)$$

Da f in x differenzierbar ist, gilt auch:

$$f'(x) = \lim_{\zeta \rightarrow x} \frac{f(\zeta) - f(x)}{\zeta - x} = \underbrace{\lim_{\zeta \downarrow x} \frac{f(\zeta) - f(x)}{\zeta - x}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{\zeta \uparrow x} \frac{f(\zeta) - f(x)}{\zeta - x}}_{\geq 0}$$

und aus $f'(x) \leq 0$ und $f'(x) \geq 0$ folgt: $f'(x) = 0$ □

Bemerkung. Diese Bedingung ist **nicht hinreichend**. Es können sogenannte **Sattelpunkte** auftreten. Zum Beispiel $x \mapsto x^3$

Eine Vorstufe zum Mittelwertsatz ist:

Satz 4.2.2. Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ diffbar. Dann gilt:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists_{\bar{x} \in]a, b[} f'(\bar{x}) = 0$$

Beweis. Sei f **nicht konstant**, sonst ist die Behauptung trivial. Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, existiert nach dem Satz von Maximum und Minimum (Satz 2.4.9) ein globales Maximum und ein davon verschiedenes globales Minimum. Eines davon und wegen $f(a) = f(b)$ im Inneren von $[a, b]$, kann also in einem Punkt $\bar{x} \in]a, b[$ angenommen werden. Dann ist es auch ein lokales Extremum mit $f'(\bar{x}) = 0$ nach Satz 4.2.1. $\square$

Anders formuliert klingt dieser Wichtige Satz der Mathematik etwa so:

Satz. Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei im Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\zeta \in]a, b[$ mit $f'(\zeta) = 0$

Beweis. Falls f konstant ist, ist der Satz trivial. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) > f(x)$ (oder $f(x_0) < f(x)$). Dann wird das **absolute Maximum** (oder **absolute Minimum**) der Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $\zeta \in]a, b[$ angenommen. Nach Satz 4.2.1 (Satz von lokalen Extremas) ist $f'(\zeta) = 0$ $\square$

Eine Transformation der Koordinatenachsen liefert jetzt:

Satz 4.2.3. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $\zeta \in]a, b[$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta)$$

Geometrische Bedeutung:

Die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist **gleich** der Steigung der Tangente im Punkt $(\zeta, f(\zeta))$

Beweis. Anwendung des Satzes von Rolle (Satz 4.2.2) auf die Funktion

$$x \mapsto F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$\square$

Umformulierung des Mittelwertsatzes (Satz 4.2.3):

f in $[x_0, x_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $]x_0, x_0 + h[$ diffbar, $h > 0$. Es existiert ein $\theta \in]0, 1[$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h$$

Bemerkung. Der Mittelwertsatz gilt **nicht für komplexwertige oder vektorwertige Funktionen**

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Beispiel. Für $t \mapsto f(t) = e^{it}$ auf $[0, 2\pi]$ gilt:

$$f(0) = f(2\pi) = 1$$

aber

$$\forall_{t \in]0, 2\pi[} f'(t) = ie^{it} \neq 0$$

denn vektoriell betrachtet ist $|ie^{it}| = 1$.

Erste Anwendung des Mittelwertsatzes:

Satz 4.2.4. Satz der Monotonie

Für eine auf dem Intervall I stetige und im Inneren von I diffbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

(a) f ist **monoton wachsend (fallend)** $\Leftrightarrow \forall_{x \in I} f'(x) \geq 0$ (≤ 0)

(b) f ist **streng monoton wachsend (fallend)** $\Leftrightarrow \forall_{x \in]a, b[} f'(x) > 0$ (< 0)

(c) f ist **konstant** $\Leftrightarrow \forall_{x \in I} f'(x) = 0$

Beweis. (a) „ $\Rightarrow$ “: f ist monoton wachsend $\Rightarrow \forall_{x \neq x_0} f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow$

$$\forall_{x \in I} f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei $\forall_{x \in I} f'(x) \geq 0$. Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt dann nach dem Mittelwertsatz 4.2.3:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\bar{x})}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

$\Rightarrow f$ monoton wachsend

(b) Siehe Übung 3

(c) „ $\Leftarrow$ “ $\forall_{x \in I} f'(x) = 0 \Rightarrow f$ monoton wachsend **und** fallend $\Rightarrow$ konstant

□

Eine andere Formulierung des Monotoniekriterium:

Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ diffbar

1. Wenn für alle $x \in]a, b[$ gilt $f'(x) \geq 0$ (bzw.: $f'(x) < 0$; $f'(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$) dann ist f in $[a, b]$ **monoton wachsend** (bzw. **streng monoton wachsend**, **monoton fallend**, **streng monoton fallend**)
2. Ist f monoton wachsend, so folgt $f'(x) \geq 0$ (bzw. f monoton fallend $\Rightarrow f'(x) \leq 0$ $\forall x \in]a, b[$)

Beweis. [-skizze:] Über die Definition der Ableitung mit $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ führt man für **1** einen Widerspruchsbeweis (Hinweis: Satz 4.2.3 (Mittelwertsatz)) □

Satz. Satz der strengen Extrema (hinreichende Bedingung)

Sei f in x zwei mal differenzierbar mit $f'(x) = 0$. Ist dann noch $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$), dann hat die Funktion in x ein **strenges lokales Minima** (bzw. ein **strenges lokales Maxima**)

Satz. Satz der Konvexität

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal diffbare Funktion, dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ gilt!

B Die Regel von [Marquis de] l'Hospital

Gesucht: Möglichkeit zu Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\frac{0}{0} \text{ und } \frac{\infty}{\infty}$$

Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\cosh x}$$

Satz 4.2.5. Erweiterte Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ diffbar und weiter

$$\forall_{x \in]a, b[} g'(x) \neq 0$$

Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $\bar{x} \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis. Nachdem der Mittelwertsatz ist zunächst

$$g(b) - g(a) = \underbrace{(g'(\bar{x}))}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\neq 0} \Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0$$

Anwendung von Satz von Rolle (Satz 4.2.2) auf die Funktion

$$x \mapsto F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

liefert

$$F(a) = f(a) = F(b) \Rightarrow \text{es existiert ein } \bar{x} \in]a, b[\text{ mit}$$

$$F'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\bar{x}) = 0$$

$$\lim_{b \rightarrow a} f'(\bar{x}) - \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} \cdot g'(\bar{x}) \Rightarrow f'(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = 0$$

□

Satz 4.2.6. Regel von l'Hospital

f, g n -mal diffbare Funktionen, $g^{(n)}(x_0) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, sowie x_0 ein (möglicherweise uneigentlicher) Häufungspunkt von I .

- (a) Falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ (möglicherweise uneigentlich) existiert, so existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

(1. Regel von l'Hospital)

- (b) Falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ existiert, so existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

falls auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ (möglicherweise uneigentlich) existiert. **(2. Regel von l'Hospital)**

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $I =]a, b[$ und $x_0 = b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Wir beweisen nur die Hauptfälle $b \in \mathbb{R}$ und $c := \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, (Nebenfälle: $b = \pm\infty$, $c = \pm\infty$).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in]b - \delta, b[$ (vergeich mit Satz 2.4.6, dem $\varepsilon - \delta$ - Kriterium für einseitige Konvergenz). Für beliebige x, y mit $b - \delta < x < y < b$ gibt es dann nach dem erweiterten Mittelwertsatz (Satz 4.2.5) ein $\bar{x} \in]x, y[\subset]b - \delta, b[$ mit

$$Q(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$$

also

$$|Q(x, y) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- (a) falls $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = 0$ folgt daraus durch Konvergenzübergang $y \rightarrow b$ wegen

$$\lim_{y \rightarrow b} Q(x, y) = \frac{f(x)}{g(x)} : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für alle $x \in]b - \delta, b[$. Also ist

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- (b) Falls $\lim_{y \rightarrow \infty} (f(y))^{-1} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{g(y)} = 0$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{f(y)}{g(y)} &= Q(x, y) + \frac{f(x) - Q(x, y) \cdot g(x)}{g(y)} \quad (\text{Nachrechnen}) \\ &= Q(x, y) + R(x, y) \quad \text{mit} \quad \lim_{y \rightarrow b} R(x, y) = 0, \quad \text{da} \quad \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{g(y)} = 0 \end{aligned}$$

4.2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seine Anwendung

Folglich gibt es (zu obigen ε) ein $\tilde{\delta} > 0$ (wobei ohne Einschränkung $\tilde{\delta} < \delta$ ist), mit $|R(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in]b - \tilde{\delta}, b[$. Für diese y gilt dann also

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - c \right| \leq |Q(x, y) - c| + |Q(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also ist ebenfalls

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y)}{g(y)} = c = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

In den Nebenfällen betrachte man „ r -Umgebungen von $\pm\infty$ “ □

Beispiel.

1. Gesucht:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1+x)}$$

(was dem Fall $\frac{0}{0}$ entspricht). Die 1. Regel liefert wegen $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{1 - \frac{1}{1+x}}$ liefert kein Ergebnis.

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\frac{1}{(1+x)^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 2$$

2. Gesucht: Nochmals $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m}$ für $m \in \mathbb{N}$ (entspricht Fall $\frac{\infty}{\infty}$) die 2. Regel liefert:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{m \cdot x^{(m-1)}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{m! x^0} = +\infty$$

Bemerkung.

1. Die Regel gilt nicht für komplexwertige Funktionen

Beispiel.

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g(x) &= x \cdot e^{\frac{-i}{x}} \\ \text{mit } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+i} e^{\frac{i}{x}} = 0 \text{ existiert, aber} \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{i}{x}} \end{aligned}$$

existiert nicht!

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

2. Grenzwerte der Form „ $0 - \infty$ “ oder „ $\infty - \infty$ “ können auf die behandelten Fälle „ $\frac{0}{0}$ “ angewendet werden.

Beispiel.

$$\underbrace{f}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{g}_{\rightarrow \infty} = \frac{f \rightarrow 0}{\frac{1}{g} \rightarrow 0}$$
$$\underbrace{f}_{\rightarrow +\infty} - \underbrace{g}_{\rightarrow -\infty} = \frac{\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right) \rightarrow 0}{\left(-\frac{1}{fg}\right) \rightarrow 0}$$

3. Weitere Möglichkeit solche Grenzwerte zu bestimmen ist **Potenzreihenentwicklung** (falls sie bekannt ist).

Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tanh x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) - x}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{3} + \dots} = -3$$

C Diffbarkeit von Funktionenfolgen und Reihen

Bemerkung. Bekannte Polynome

$$x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

können Gliedweise differentiert werden, es ist also

$$p'(x) = \sum_{k=0}^n k \cdot a_k x^{k-1}$$

Frage: Gilt das auch für Potenzreihen

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n k \cdot a_n x^{k-1}?$$

Genauer:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)' \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \right]'$$

Für allgemeine Funktionenfolgen/-reihen gilt dies nicht!

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right)' \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k,$$

selbst wenn alle Ableitungen existieren (siehe Übung 4 Aufgabe 18).

Ein Kriterium für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung liefert:

Satz 4.2.7. Diffbarkeit von Funktionenfolgen

$(f_k : I, \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge diffbarer Funktionen mit den Eigenschaften:

- (1) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert (punktweise) bzw.: $(\sum_{k=1}^l f_k)_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert Punktweise
- (2) $(f'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig bzw.: $(\sum_{k=1}^l f'_k)_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert glm.

Dann ist auch die **Grenzfunktion** $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ bzw.: $\sum_{k=1}^l f_k$ diffbar.

Weiter gilt auch:

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k$$

bzw.:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$$

Gegeben: $f_k(I \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ und es sind alle f_k diffbar.

Vorraussetzung:

1. (f_k) punktweise Konvergent
2. (f_k) gleichmäßig konvergent

Zusammen folgt:

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k$$

Beweis. Sei $f = \lim f_k$, $\tilde{f} = \lim f'_k$ zu zeigen ist:

f ist diffbar mit $f' = \tilde{f}$. Sei $x_0 \in I$ beliebig. Nach Vorraussetzung gilt

$$\forall_{x \in I} f_k(x) = f_k(x_0) + \Delta_k(x)(x - x_0)$$

ist stetige Funktion $\Delta_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, denn f_k ist in x_0 diffbar. Wir zeigen zunächst, dass $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf I konvergent ist.

Da die Folge (f'_k) nach Vorraussetzung **2.** gleichmäßig konvergiert gilt nach dem Cauchy-Konvergenz-Kriterium (Satz 2.5.3):

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{k, l \geq m} \forall_{x \in I} |f'_k(x) - f'_l(x)| < \varepsilon$$

1. $(x \neq x_0)$:

$$\Delta_k(x) - \Delta_l(x) = \frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(x_0)}{x - x_0}$$

$$\stackrel{4.2.3}{=} (f_k - f_l)'(\bar{x}) = f'_k(\bar{x}) - f'_l(\bar{x}) \text{ mit } \bar{x} \in \overline{x_0 x}$$

2. $(x = x_0)$:

$$\Delta_k(x_0) - \Delta_l(x_0) = f'_k(x_0) - f'_l(x_0)$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Zusammen:

$$\forall_{k,l \geq m} \forall_{x \in I} |\Delta_k(x) - \Delta_l(x)| < \varepsilon$$

das heißt $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig nach dem Cauchy-Konvergenz-Kriterium und der Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwerten (einer Folgerung aus Satz 2.5.2) kann angewendet werden. Er liefert:

Da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x_0) = \tilde{f}(x_0)$$

existiert, existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ist $f'(x_0) = \tilde{f}(x_0)$ □

Bemerkung.

1. Man kann zeigen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes auch die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zumindest auf kompakte Teilintervalle von I gleichmäßig konvergiert.
2. Satz 4.2.7 ist auch für Folgen und Reihen im $\mathbb{R}^m$ beziehungsweise $\mathbb{C}$ anwendbar, wenn man die Voraussetzung komponentenweise überprüft.

Spezialfall. Gliedweise differentiation der Potenzreihe

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

mit dem Konvergenzradius $R > 0$, liefert die Reihe

$$x \mapsto \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k(x - x_0)^{k-1}$$

mit gleichem Konvergenzradius $\tilde{R} = R$, denn

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \limsup \sqrt[k]{|k \cdot a_k|} = \limsup \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\rightarrow 1} \cdot \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$$

Dies ist auf alle Teilintervalle $[x_0 - r, x_0 + r] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ gleichmäßig konvergent. Dort ist auch der letzte Satz (Satz 4.2.7) anwendbar. Da man jeden Punkt des Konvergenzintervalles in einem solchen Teilintervall wieder findet, erhält man insgesamt durch vollständige Induktion:

Satz 4.2.8. Satz der Potenzreihen

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in ihrem **Konvergenzintervall** $]x_0 - R, x_0 + R[$ beliebig oft diffbar und ihre Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation.

Anwendung. 1. Die Potenzreihe

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k$$

besitzt den Konvergenzradius $R = 1$ und für $|x| < 1$ gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$$

Für $x \mapsto g(x) := \log(1+x) - f(x)$ gilt dann $g' \equiv 0$, also auch $g = \text{const}$ und wegen $g(0) = 0$ sogar $g \equiv 0$. Ergebnis für $|x| < 1$:

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k}$$

Da die Reihe auch für $x = +1$ konvergiert, gilt nach dem Abelschen Grenzwertsatz (Satz 2.6.4) auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \lim_{x \rightarrow +1} \log(1+x) \stackrel{\log \text{ stetig}}{=} \log 2$$

2. Die Binominalreihe

$$x \mapsto B_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

besitzt für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius $R = 1$ (ansonsten ist es ein Polynom, siehe auch Kapitel 2.6.A). Für $|x| < 1$ gilt auf jeden Fall

(a) $B'_{\alpha} = \alpha \cdot B_{\alpha-1}$, denn

$$\begin{aligned} B'_{\alpha} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot \frac{(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} x^{k-1} \\ &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} = \alpha \cdot B_{\alpha-1}(x) \end{aligned}$$

(b) $B_{\alpha}(x) = (1+x) \cdot (B_{\alpha-1}(x))$, denn

$$\begin{aligned} (1+x) \cdot B_{\alpha-1}(x) &= (1+x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} x^k = x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} \right)}_{\binom{\alpha}{k}} x^k \\ &= B_{\alpha}(x) \end{aligned}$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Aus (a) und (b) folgt für

$$x \mapsto q(x) : \frac{B_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha} \quad (|x| < 1),$$

wobei $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$ ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{B'_\alpha(x)(1+x)^\alpha - (\alpha(1+x)^{\alpha-1}B_\alpha(x))}{(1+x)^{2\alpha}} \\ &\quad \curvearrowright B'_\alpha(x) = \alpha \cdot B_{\alpha-1}(x) \\ &\quad \curvearrowright B_\alpha(x) = (1+x)B_{\alpha-1}(x) \\ &= \frac{\alpha B_{\alpha-1}(x)(1+x)^\alpha - (1+x)^\alpha \cdot \alpha \cdot B_{\alpha-1}(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{0}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \end{aligned}$$

also $q = \text{const.}$ Wegen $q(0) = 1$ ist $q \equiv 1$, das heißt

$$\boxed{B_\alpha(x) = (1+x)^\alpha} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1$$

Spezialfall.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= B_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-k)}{1 \cdot \dots \cdot k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \\ \sqrt{1+x} &= B_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \overbrace{\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)}^{(\frac{1}{2}-k)}}{k!} x^k \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Konvergenzverhalten auf den Rande des Konvergenzintervalles kann sich beim Differenzieren ändern!

Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k = \log(1+x)$$

konvergiert für $x+1$ **nicht**, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x}$$

4.3. Stammfunktion (unbestimmte Integrale)

Das Suchen der Stammfunktion ist die Umkehraufgabe zur Differentiation und hat (noch) nichts mit der eigentlichen Integration zur Maßbestimmung zu tun, trotz der Bezeichnung. Wir beschränken uns auf Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall I . Da Komponentenweise differenziert wurde, kann man auch Abbildungen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}$) komponentenweise „integrieren“.

Definition. Eine Funktion heißt **unbestimmt integrierbar**, wenn es eine diffbare Funktion $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $F' = f$. F heißt dann **Stammfunktion** von f .

Offensichtlich gilt wegen $F' \equiv 0 \leftrightarrow F = \text{const}$:

Satz 4.3.1. Satz über Stammfunktionen:

Für eine unbestimmt integrierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

- (a) Stammfunktionen F von f sind bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Die Äquivalenzklasse aller Stammfunktionen von f heißt **unbestimmtes Integral** von f , bezeichnet mit

$$\int f := [F],$$

wenn F ein spezieller Repräsentant ist. Üblicherweise schreibt man (inkonsequenterweise bzw. schlampig)

$$\int f = F + c \text{ bzw. } \forall_{x \in I} \int f(x) dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

- (b) Für $a, b \in I$ ist die Differenz

$$\int_a^b f(x) dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

unabhängig von der Auswahl der Stammfunktion F . Sie heißt **bestimmtes Integral** von f zwischen a und b

- (c) Für festes $a \in I$ ist

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

die eindeutig bestimmte Stammfunktion um f .

Bemerkung.

1. Nicht jede Funktion ist unbestimmt integrierbar

Beispiel. $x \in \mathbb{R} \mapsto \text{sign } x \in \mathbb{R}$. Für eine Stammfunktion F müsste gelten:

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & \text{für } x > 0 \\ -x + c_2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

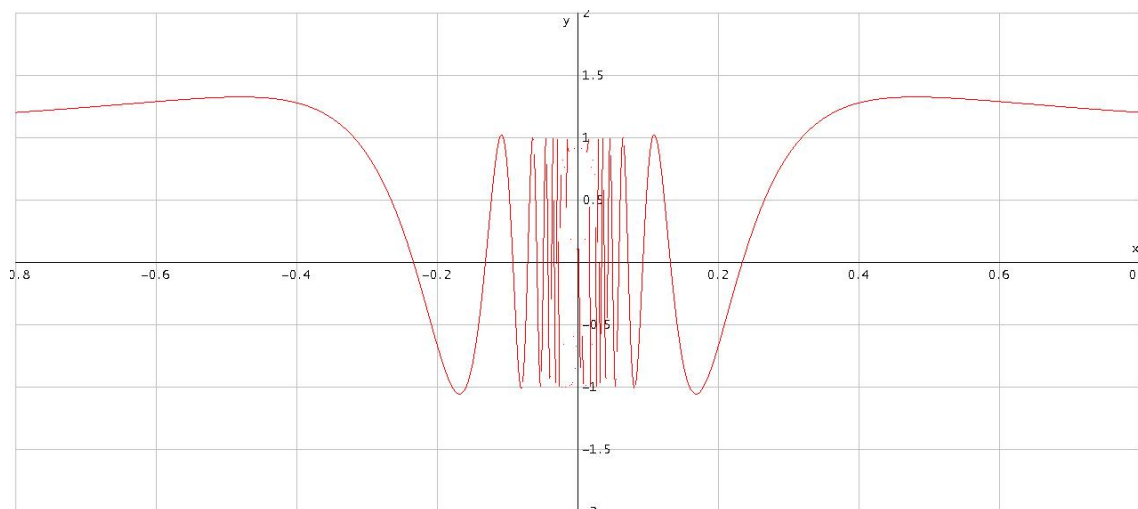
also $F(x) = \text{abs } x + c$: Diese Funktion ist aber in $x = 0$ **nicht diffbar! Widerspruch**

2. Auch unstetige Funktionen können Stammfunktionen besitzen

Beispiel.

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos 1x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen



besitzt auf $\mathbb{R}$ die Stammfunktion

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Beispiele.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x > 0$ $x^\alpha := e^{\alpha \log x}$

$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$ für $x \neq 0$, denn für $x < 0$ gilt: $(\log |x|)' = (\log |-x|)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

2. $\int \exp(kx) = \frac{1}{k} \exp(kx) + c$. Damit folgt für

$$\sin x = -\cos x + c$$

$$\cos x = \sin x + c$$

und so weiter

3. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$ für $x \in \mathbb{R}$ (siehe Übungsblatt 2)

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arctan x + c \text{ für } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \text{ für } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin \mathbf{h} x + c \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Die Rechenregeln für die Differentiation liefern sofort Regeln für unbestimmte Integration. Trivial ist der folgende Satz:

Satz 4.3.2. Satz der unbestimmten Integrale

Sind $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unbestimmt integrierbar, so auch $f + g$, $\lambda \cdot f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\int (f + g) = \int f + \int g, \quad \int \lambda \cdot f = \lambda \int f$$

Bemerkung. Dies sind im Prinzip Gleichungen zwischen Äquivalenzklassen. Mit der Integrationskonstante c kann man nicht so rechnen

$$(F + c) + (G + c) = (F + G) + (2c),$$

das ist *unfug!*

Folgerung. Polynome sind demnach unbestimmt integrierbar und ihre Stammfunktionen sind wieder Polynome

Die Produktregel für die Differentiation liefert:

Satz 4.3.3. Satz der partiellen Integration

$f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien diffbar und $f \cdot g'$ unbestimmt integrierbar. Dann ist auch $f' \cdot g$ unbestimmt integrierbar mit

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

Beweis.

$$\left(f \cdot g - \int (f \cdot g') \right)' = (f' \cdot g + f \cdot g') - f \cdot g' = f' \cdot g$$

□

Formulierung in bestimmten Integralen:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Beispiele.

4. $\int x \cdot e^x = \int x (e^x)' dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x - 1)e^x + c$

5. Wiederherstellung des Ausgangsintegrals:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x &= \int \sin x (-\cos x)' dx = -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} \\ &= x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x dx \end{aligned}$$

Falls das Ausgangsintegral existiert, muss gelten:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

Differentiation „beweist“ die Gleichung („Probe“)

6. $\int \log x dx = \int (x)' \log(x) = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log x - x + c$

7.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2 + \boxed{1-1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \arcsin x\end{aligned}$$

falls das Integral existiert, muss gelten:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c$$

Die Kettenregel für Differentiation liefert:

Satz 4.3.4. Substitutionsregel

- (a) $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei unbestimmt integrierbar und $\phi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ diffbar. Dann ist auch $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ unbestimmt integrierbar und es gilt

$$\boxed{\int (f \circ \phi) \phi' = \left(\int f \right) \circ \phi}$$

bzw.:

$$\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx \left[\int f(y) dy \right]_{y=\phi(x)}$$

- (b) Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von $\phi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ eine diffbare Bijektion mit $\forall_{x \in J} \phi'(x) \neq 0$, sowie $(f \circ \phi) \phi'$ unbestimmt integrierbar. Dann ist auch

$$\int f = \left(\int (f \circ \phi) \phi' \right) \circ \phi^{-1}$$

bzw.:

$$\forall_{y \in I} \int f(y) dy = \left[\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx \right]_{y=\phi^{-1}(x)}$$

Für bestimmtes Integral gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx}$$

Beweis.

- (a) $((f \circ \phi))' = ((f \circ \phi) \circ \phi') = (f \circ \phi) \circ \phi'$

- (b) Nach Satz 4.1.3 ist mit ϕ auch ϕ^{-1} diffbar. Ist G eine Stammfunktion von $(f \circ \phi) \circ \phi'$, so folgt:

$$\begin{aligned}(G \circ \phi^{-1})' &= (G' \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi^{-1})' = ((f \circ \phi) \phi') \circ \phi^{-1} \frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}} \\ &= (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi' \circ \phi^{-1}) \cdot \frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}} = f\end{aligned}$$

□

Formulierung in bestimmten Integralen:

Satz.

(a) Für $\alpha, \beta \in J$ gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(y) dy$$

(b) Für $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b f(y) dy = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

Beispiele.

8. Methode (a)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \Big|_{y=1-x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{y} \Big|_{y=1-x^2} \\ &= -\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

9. Substitution $y = \phi(x) = e^x$, mit $\phi(x) = e^x$ und $x = \phi^{-1}(y) = \log y$

$$\begin{aligned} \int \log y dy &\stackrel{\text{Subst. s.o.}}{=} \int x \cdot e^x dx \Big|_{x=\log y} = (x-1)e^x \Big|_{x=\log y} + c \\ &= (\log y - 1) \cdot y + c \end{aligned}$$

B Unbestimmte Integrierbarkeit von Funktionenfolgen Die Sätze aus Kapitel 4.2.C liefern sofort:

Satz 4.3.5. (Korollar zu Satz 4.2.7)

Ersetze f mit F und f' mit f , dann erhält man:

$(f_k : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge unbestimmt integrierbarer Funktionen und $(F_k : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stammfunktionen mit

1. $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise

beziehungsweise $(\sum_{k=1}^l F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise

2. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig

beziehungsweise $(\sum_{k=1}^l f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Dann ist die Grenzfunktion $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ beziehungsweise die Summe $\sum_{k=1}^l f_k$ unbestimmt integrierbar mit

$$\int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k + c$$

beziehungsweise

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} F_k + c$$

Vorsicht: Aus einer konvergenten Folge $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von einer Stammfunktion kann man leicht eine divergente machen, beispielsweise durch $(F_k + k)_{k \in \mathbb{N}}$

Satz 4.3.6. (Korollar zu Satz 4.2.8)

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k$ in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ gliedweise unbestimmt integrierbar.

Anwendung. 4.2.8/4.3.6

Sie bieten manchmal die Möglichkeit, die Summe einer Potenzreihe explizit darzustellen.

Beispiel.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$

Für $|x| < R = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{\infty} (k)^2 \cdot x^{k-1} \text{ in } x = 0 \text{ fortgesetzt} \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k \\ \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} &= \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt \\ \Rightarrow \int_0^x \left[\frac{1}{s} \int_0^s \frac{f(t)}{t} dt \right] ds &= \sum_{k=1}^{\infty} x^k \stackrel{!}{=} \frac{x}{1-x} \\ \xrightarrow{\text{Rückgängig}} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow \frac{f(x)}{x} &= [\text{nach einer Seite Rechnung}] \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

C Stammfunktion rationaler Funktionen**Bemerkung.**

1. Welche Funktionen sind überhaupt unbestimmt „integrierbar“, das heißt, welche Funktionen besitzen eine Stammfunktion?

Teilweise Antwort in der eigentlichen Integrationstheorie (Kapitel 4.5)

2. Welche Funktionen sind elementar integrierbar, das heißt, bei welchen Funktionen ist die Stammfunktion aus den elementaren Funktionen von Kapitel 3 zusammensetzbar?

Gegenbeispiel zu 2.: Der Integralsinus

$$x \mapsto \operatorname{si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Die Elliptischen Integrale

$$x \mapsto E(k, x) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad \text{Elliptisches Integral 1.Art}$$

$$x \mapsto E(k, x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt \quad \text{Elliptisches Integral 2.Art}$$

mit $0 < k < 1$, wobei $k = 1$ und $k = 0$ elementar integrierbare Funktionen bilden.

Wir wollen zeigen, dass wenigstens die rationalen Funktionen elementar integrierbar sind. Hierzu benötigen wir Hilfsmittel aus der Algebra, verwenden sie aber ohne Beweis!

Satz. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes (normierte) Polynom $z \in \mathbb{C} \mapsto p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbb{C}$ mit $a_n = 1$ besitzt eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige **Primfaktorzerlegung**

$$p(z) = \prod_{j=1}^r (z - \alpha_j)^{l_j} \quad (4.1)$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Nullstellen und $l_1, \dots, l_r$ die Vielfachheit der jeweiligen Nullstellen beschreibt

Satz. Fundamentalsatz (komplex)

Ein normiertes reelles Polynom $x \in \mathbb{R} \mapsto p(x) \in \mathbb{R}$ besitzt eine **Primfaktorzerlegung der Form**

$$p(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{l_j} \cdot \prod_{j=1}^s [(x - \beta_j)^2 + \gamma_j]^{m_j} \quad (4.2)$$

mit **reellen Nullstellen** $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ und **echt komplexe Nullstellen** $\beta_j \pm i\gamma_j$ und den Vielfachheiten $l_1, \dots, l_r$ bzw. $m_1, \dots, m_s$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Bemerkung. Echt komplexe Nullstellen $\alpha_j = \beta_j + \gamma_j$ treten paarweise **konjugiert Komplex** (mit gleicher Vielfachheit) auf. Aus der Zusammenfassung der Produkte

$$(x - \alpha_j) \cdot (x - \bar{\alpha}_j) = (x - \beta_j - i\gamma_j) \cdot (x - \beta_j + i\gamma_j) = (x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2$$

Satz. Satz der Partialbruchzerlegung

Jede rationale Funktion $z \mapsto r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $q(z) \neq 0$ in $\mathbb{C}$ mit einer **Primfaktorzerlegung** wie in 4.1 des Nenners q besitzt eine Darstellung:

$$r(z) = p_0(z) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{l_j} \frac{A_{jk}}{(z - \alpha_j)^k} \quad (4.3)$$

mit einem Polynom p_0 (falls $\deg p \geq \deg q$) und Koeffizienten $A_{jk} \in \mathbb{C}$

Beispiel.

$$r(z) = p_0(z) = \frac{p(z)}{z^2(z-i)} = p_0(z) + \frac{A_{11}}{z} + \frac{A_{12}}{z^2} + \frac{A_{21}}{z-i}$$

Folgerung. Jede reelle rationale Funktion $x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit einer Primfaktorzerlegung 4.2 des Nenners q besitzt eine Partialbruchzerlegung der Form:

$$r(x) = p_0(x) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{l_j} \frac{A_{jk}}{(x - \alpha_j)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{m_j} \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{[(x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2]^k} \quad (4.4)$$

mit einem reellen Polynom p_0 (falls $\deg p \geq \deg q$) und Koeffizienten $A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} \in \mathbb{R}$.

Beispiel.

$$1. \quad r(x) = \frac{p(x)}{x^3(x^2+1)^2} \stackrel{!}{=} p_0(x) + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

$$2. \quad r(x) = \frac{x^3}{(x^2-1)^4} = \frac{x(x^2+1)-x}{(x^2+1)^4} = \frac{x}{(x^2-1)^3} + \frac{x}{(x^2+1)^3}$$

Methode zur Berechnung durch Polynomdivision

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = p_0 + \text{Rest } \tilde{p}(x)}$$

das heißt

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = p_0 + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}}$$

mit $\deg \tilde{p} < \deg q$.

Bestimmung der Koeffizienten a_{jk}, B_{jk}, C_{jk} durch Ansatz in dem reduzierten Polynom

$$\boxed{\tilde{r}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}}$$

Dies liefert ein lösbares lineares Gleichungssystem. Jetzt brauchen wir nur noch die Stammfunktion für die in 4.4 auftretende Summanden zu bestimmen.

Reelle Partialbruchzerlegung:

$$r(z) = p_0(z) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{l_j} \frac{A_{jk}}{(x - \alpha_j)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{m_j} \frac{B_{jk} + C_{jk}}{[(x - \beta_j)^2 + \gamma_j^2]^k}$$

Beispiele. von Stammfunktionen der einzelnen Summanden:

(0)

$$\int p_0(x) dx : \text{ bekannt}$$

(1a)

$$\int \frac{1}{x - \alpha} dx = \log |x - \alpha| + c$$

(1b)

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}} + c \quad \boxed{k \geq 2}$$

(2a)

$$\int \frac{x - \beta}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{2} \log ((x - \beta)^2 + \gamma^2) + c$$

(2b)

$$\int \frac{x - \beta}{[(x - \beta)^2 + \gamma^2]^k} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{k-1} \frac{1}{[(x - \beta)^2 + \gamma^2]^{k-1}} + c \quad \boxed{k \geq 2}$$

(3a)

$$\int \frac{1}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} dx \stackrel{y=\frac{x-\beta}{\gamma}}{=} \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x - \beta}{\gamma} + c$$

(3b)

$$\int \frac{1}{[(x - \beta)^2 + \gamma^2]^k} dx \quad \boxed{k \geq 2}$$

Hier gibt es eine Rekursionsformel. Mit $f(x) := (x - \beta)^2 + \gamma^2$ gilt (mittels der partiellen Integration):

$$\int \frac{1}{f^{k+1}(x)} dx = \frac{1}{2k\gamma^2} \left[\frac{x - \beta}{f^k(x)} + 2(k-1) \int \frac{1}{f^k(x)} dx \right]$$

Zusammenfassend gilt:

Satz 4.3.7. Satz der elementaren Integrierbarkeit (Bezug auf Stammfunktionen einzelner Summanden)

Jede rationale Funktion über $\mathbb{R}$ ist **elementar** integrierbar. Eine Stammfunktion erhält man als Linearkombination aus rationalen Funktionen, Logarithmen von linearen Funktionen und quadratischen Polynomen und arctan- Gliedern von Linearkombinationen.

Bemerkung. Durch geeignete Substitutionen lassen sich viele Integrale elementarer Funktionen auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen, und man erhält dadurch wieder elementare Stammfunktionen.

4.4. Taylorapproximation und Anwendung

A Die Taylorschen Sätze

Problem: Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soll in der Umgebung von $x_0 \in I$ möglichst gut durch ein Polynom $x \mapsto T(x)$ von Grade $\deg \leq p$ approximiert werden.

Forderung: $\forall_{k=0}^p T^{(k)}(x_0)$, falls f p -mal diffbar ist. Der Ansatz

$$T(x) = \sum_{k=0}^p a_k (x - x_0)^k$$

liefert wegen

$$\forall_{k=0}^p T^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

als einzige Lösung:

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Satz 4.4.1. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei in der Umgebung von x_0 p -mal diffbar ($p \in \mathbb{N}_0$). Dann gibt es genau ein Polynom $x \mapsto T_p(x)$ (höchstens vom Grade p) mit

$$\forall_{k=0}^p T_p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

nämlich

$$T_p(x) := \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

genannt: **p -tes Taylorpolynom** von f im Punkte x_0

Bemerkung.

1. T_p hängt natürlich von x_0 ab! Deswegen auch die Schreibweise

$$T_p|_{x_0}(x) \text{ oder } T_p(x, x_0)$$

2. Es ist

$$\begin{aligned} T_0 &= f(x_0) = \text{const} \\ T_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned} \quad [Tangente]$$

Beispiel. Bei einer Potenzreihe

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^p a_k (x - x_0)^k$$

ist das p -te Taylorpolynom in x_0 genau die p -te Partialsumme

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p a_k (x - x_0)^k$$

Wie gut approximiert T_p die Funktion f ?

Wir betrachten das **Restglied**

$$R_p := f - T_p$$

Nach Definition ist

$$\forall_{k=0}^p R_p^{(k)}(x_0) = 0$$

und

$$R_p^{(p+1)}(x_0) = f^{(p+1)}(x_0)$$

falls f in x_0 $(p+1)$ -mal diffbar ist. Für etwa $x > x_0$ folgt daraus nach dem Mittelwertsatz (Satz 4.2.3)

$$\begin{aligned} \frac{R_p(x) - 0}{(x - x_0)^{p+1} - 0} &= \frac{R_p'(\bar{x}_1) - 0}{(p+1)(\bar{x}_1 - x_0)^p - 0} && \text{mit } x_0 < \bar{x}_1 < x \\ &= \frac{R_p''(\bar{x}_2) - 0}{(p+1)p(\bar{x}_2 - x_0)^{p-1} - 0} && \text{mit } x_0 < \bar{x}_2 < \bar{x}_1 < x \\ &\vdots && \text{Vollständige Induktion} \\ &= \frac{R_p^{(p)}(\bar{x}_p)}{(p+1)!(\bar{x}_p - x_0)} && \text{mit } x_0 < \bar{x}_p < \dots < \bar{x}_1 < x \end{aligned}$$

(analog für $x < x_0$)

Für die für $x \neq x_0$ definierte Funktion

$$x \mapsto \Delta_{p+1}(x) := (p+1)! \frac{R_p(x)}{(x - x_0)^{p+1}} = \frac{R_p^{(p)}(\bar{x}_p(x))}{\bar{x}_p(x) - x_0}$$

gilt dann, falls $f^{(p)}$ und damit $R_p^{(p)}$ nochmals in x_0 diffbar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta_{p+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_p^{(p)}(\bar{x}_p(x)) - R_p^{(p)}(x_0)}{\bar{x}_p(x) - x_0} \\ \left[\begin{array}{c} x \rightarrow x_0 \\ \Rightarrow \bar{x}_p(x) \rightarrow x_0 \end{array} \right] &= (R_p^{(p)})'(x_0) = R_p^{(p+1)}(x_0) \\ &= f^{(p+1)}(x_0) \end{aligned}$$

das heißt, sie kann durch

$$\Delta_{p+1}(x_0) := f^{(p+1)}(x_0)$$

stetig ergänzt werden.

Ergebnis:

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Satz 4.4.2. Taylorscher Satz, 1. Form

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei p -mal diffbar ($p \in \mathbb{N}_0$) und auch $f^{(p+1)}(x_0)$ für $x_0 \in I$. Dann gibt es genau eine x_0 stetige Funktion mit $\Delta_{p+1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{x \in I} f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!} \Delta_{p+1}(x)(x-x_0)^{p+1} \quad (4.5)$$

$$\Delta_{p+1}(x_0) = f^{(p+1)}(x_0) \quad (4.6)$$

Für $p = 0$ erhält man die Kennzeichnung 1 der Differenzierbarkeit in x_0 zurück

$$\forall_{x \in I} f(x) = f(x_0) + \Delta_1(x)(x-x_0)$$

Umformulierung: Aus 4.5 und 4.6 folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= T_p(x) + \frac{1}{(p+1)!} \boxed{f^{(p+1)}(x_0)} \cdot (x-x_0)^{(p+1)} + \frac{1}{(p+1)!} \left(\Delta_{p+1}(x) \boxed{-\Delta_{p+1}(x_0)} \right) \cdot (x-x_0)^{p+1} \\ &= T_{p+1}(x) + R_{p+1}(x) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{p+1}(x)}{(x-x_0)} = 0 \end{aligned}$$

das heißt, es ist $R_{p+1}(x) = 0 \cdot ((x-x_0)^{p+1})$ für $x \rightarrow x_0$. Umbenennung: $p+1 \rightarrow p$ liefert die

Folgerung. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ p -mal diffbar, wobei $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \mathcal{O}((x-x_0)^p) \text{ für } x \rightarrow x_0$$

Das Restglied R_p geht also schneller gegen 0 als $x \rightarrow (x-x_0)^p$ für $x \rightarrow x_0$

Bemerkung. Für $p = 1$ erhält man die Kennzeichnung 2 der Diffbarkeit in x_0 zurück:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)$$

Taylorformel 1. Form

$$f(x) = T_p(x) \frac{1}{(p+1)!} \Delta_{p+1}(x)(x-x_0)^{p+1}$$

mit $\Delta_{p+1}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x) = f^{(p+1)}(x_0)$. Ist die Funktion f auf I sogar $(p+1)$ -mal diffbar, so lässt sich das Restglied ganz durch $f^{(p+1)}$ ausdrücken:

$$\frac{R_p(x)}{(x-x_0)^{p+1}} = \dots = \frac{R^{(p)}(\bar{x}_p) - 0}{(p+1)! (\bar{x}_p - x_0) - 0} \stackrel{4.2.5}{=} \frac{R_p^{(p+1)}(\bar{x})}{(p+1)!} = \frac{f^{(p+1)}(\bar{x})}{(p+1)!}$$

ist etwa $x_0 < \bar{x} < \bar{x}_p < \dots < \bar{x}_1 < x$.

Satz 4.4.3. Taylorscher Satz, 2. Form

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(p+1)$ mal diffbar ($p \in \mathbb{N}_0$) und $x_0 \in I$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\bar{x} \in \bar{x}_0 \bar{x}$ mit

$$f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{p+1}$$

(Lagrange-Form des Restgliedes)

Bemerkung. Für $p = 0$ erhält man nach Satz 4.2.3 (Mittelwertsatz) $f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x-x_0)$ zurück

B Taylorreihe, Analytische Funktionen

Definition. Bei einer C^∞ Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die Folge der Taylorpolynome in $x_0 \in I$

$$x \mapsto (T_p|_{x_0}(x))_{p \in \mathbb{N}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von f in x_0

Bemerkung. Dies ist eine **Potenzreihe** um x_0 , die außerhalb von x_0 nicht unbedingt konvergieren muss!

Zum Konvergenzverhalten der Taylorreihe: Es gilt:

$$\forall_{p \in \mathbb{N}_0} \quad f = T_p + R_p$$

mit R_p als Folge der Restglieder.

Drei Möglichkeiten bestehen in der Umgebung von x_0

1. Idealfall: $(R_p) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} T_p = f$

Die Taylorreihe konvergiert also in einer Umgebung von x_0 und stellt dort auch die Funktion f dar. Es gilt also:

$$f(x) \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

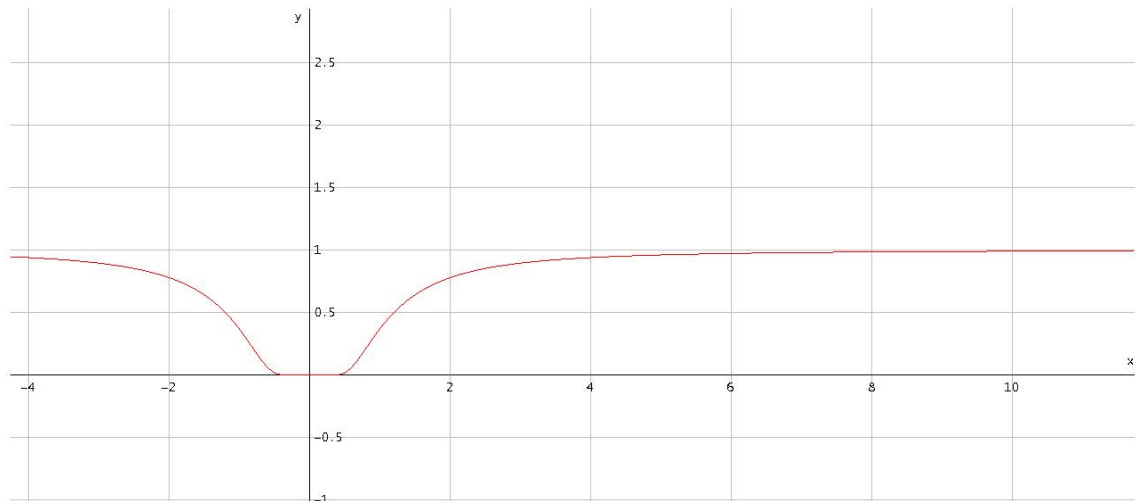
Beispiel. Funktionen, die eine Potenzreihendarstellung um x_0 besitzen. Diese Potenzreihe ist dann auch Taylorreihe!

2. Schlechter Fall: $(R_p) \rightarrow R \Leftrightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} T_p = f - R \neq f$

Die Taylorreihe konvergiert zwar in einer Umgebung von x_0 , stellt dort aber nicht die Funktion f dar.

Beispiel. Die „Glockenfunktion“:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

3. Schlechtester Fall: $(R_p) \rightarrow \infty \Rightarrow T_p$ ebenfalls divergent (außerhalb von x_0)

Merke Nicht jede C^∞ Funktion besitzt eine (konvergente) Potenzreihendarstellung!

Satz 4.4.4. Satz der Konvergenz von Taylorreihen

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^∞ diffbare Funktion und $x_0 \in I$ (Es genügt, dass I eine kleine Umgebung von x_0 ist, also $I = U_\delta(x_0)$). Wenn Konstanten $M, r > 0$ mit $|f^{(k)}(x)| \leq M \cdot r^k$ $\forall x \in I$ und fast allen $k \in \mathbb{N}$ so konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 auf I gegen f , das heißt

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Beweis. Für die **Lagrangeschen Restglieder** R_p gilt dann $\forall x \in I$ und fast alle $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leq |R_{p-1}| &= \left| \frac{1}{p!} f^{(p)}(\bar{x})(\bar{x} - x_0)^p \right| \\ &\leq M \cdot \frac{(r \cdot |x - x_0|)^p}{p!} \leq M \cdot \frac{(r \cdot |x - x_0|)^p}{p!} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(als Glieder eine Exponentialreihe)

Also ist $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p(x) = 0$ □

Ideale Funktionen besitzen einen eigenen Namen:

Definition. Eine auf einem offenem Intervall definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (reell) **analytisch**, wenn sie in der Umgebung **jedes** Punktes $x_0 \in I$ eine Potenzreihendarstellung $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ besitzt. (Diese Reihe ist natürlich jeweils ihre Taylorreihe um x_0)

Für $C^w(I) : \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ analytisch}\}$ gilt also:

$$C^w(I) \subsetneq C^\infty(I) \subsetneq \dots \subsetneq C^0(I)$$

Satz 4.4.5. Satz der analytischen Potenzreihen

Jede durch eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $R > 0$ dargestellte Funktion

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

ist in ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ analytisch.

Beweis. Wir zeigen: Ist $x_1 \in]x_0 - R, x_0 + R[$ ein beliebiger Punkt, so gibt es eine für

$$|x - x_1| < R - |x_0 - x_1| \tag{4.7}$$

eine konvergierende Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} b_j(x - x_1)^j$$

Die Transformation auf einen neuen Entwicklungspunkt x_1 führt jetzt wegen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((\boxed{x_1} - x_0) + (x - \boxed{x_1}) \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_k \binom{k}{j} \cdot (x_1 - x_0)^{k-j} (x - x_1)^j \right] \end{aligned}$$

auf die Doppelreihe

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_k \binom{k}{j} ((x_1 - x_0)^{k-j} \cdot (x - x_1)^j)^j \right)_{l,m \in \mathbb{N}}$$

welche die Voraussetzung des **großen Umordnungssatzes** (Satz 2.6.5) erfüllt.

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=0}^l |a_{jk}| &= \sum_{k=0}^l \sum_{j=0}^l |a_k| \binom{k}{j} |x_1 x_0|^{k-j} \cdot |x - x_1|^j \\ &\leq \sum_{k=0}^l |a_k| \left(\underbrace{|x_1 - x_0| + |x - x_1|}_{< R \text{ nach 4.7}} \right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| y^k := M < \infty \end{aligned}$$

da die Ausgangsreihe für $x = |y| < R$ nach 4.7 absolut konvergent ist. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k &= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} (x_1 - x_0)^{k-j} (x - x_1)^j}_{b_j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x - x_1)^j \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

1. Die neuen Koeffizienten b_j sind natürlich die Taylorkoeffizienten von f in x_1 . Test:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_1) &= \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} a_k k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) \cdot (x_1 - x_0)^{k-j} \\ &= \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a_k (x_1 - x_0)^{k-j} \end{aligned}$$

2. Der Konvergenzbereich der neuen Reihe kann wieder über den Konvergenzbereich der alten Reihe hinausgehen. (**analytische Fortsetzung**) (Siehe auch Übung 7 Aufgabe 30)

3. Die obige Transformation ist auch für komplexe Potenzreihen möglich. Der Beweis ist der gleiche.

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

4. C^ω -Funktionen sind die „schönen“ Funktionen, die aber für viele Anwendungen zu „starr“ sind. Ihr Verhalten in einer beliebigen kleinen Umgebung eines Punktes ($\rightarrow a_k$) bestimmt vollständig ihr Verhalten auf dem ganzen maximalen Definitionsbereich ($\leftarrow b_j \leftarrow a_k$). „Nur C^∞ -Funktionen“ sind viel flexibler, zum Beispiel kann man verschiedene C^∞ -Funktionen aneinander anschließen, wenn sie an der Schnittstelle gleiche Ableitungen besitzen.

C Anwendung der Taylorformel bei der Kurvensikussion

Hier ist bei Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von Interesse:

1. **Monotonieverhalten** Hilfsmittel: Definitionen, Monotoniekriterium (Satz 4.2.4)

$$f' \stackrel{(\geq)}{\leq} 0$$

2. **Bestimmung von lokalen Extremas** Hilfsmittel: Definition, notwendige Bedingung (Satz 4.2.1) f in x_0 stationär, das heißt $f'(x_0) = 0$

Satz 4.4.6. Satz der hinreichenden Bedingung für lokale Extrema

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf dem offenen Intervall I diffbar. Dann gilt: **Wechselt f' in $x_0 \in I$ das Vorzeichen, so besitzt f in x_0 ein lokales Extremum.**

Präzisierung: Gibt es in der Umgebung $U \subset I$ von x_0 mit

$$\forall x \in U \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 & (\geq 0) \\ x > x_0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 & (\leq 0) \end{cases}$$

so besitzt f in x_0 ein **lokales Minimum** (**lokales Maximum**)

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 4.2.3) gilt

$$\forall x \in U \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{f''(x_0)}_{\substack{\leq 0 \\ \geq 0}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\substack{< 0 \\ > 0}} \geq f(x_0)$$

□

Bemerkung. Diese Bedingung ist nicht **notwendig**

Satz 4.4.7. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt $x_0 \in I$ (mit I offen) p -mal diffbar ($p \geq 2$) mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0$$

Dann gilt:

p -gerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 ein lokales Extremum.

Es ist ein Minimum, wenn $f^{(p)}(x_0) > 0$

Es ist ein Maximum, wenn $f^{(p)}(x_0) < 0$

p -ungerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 **kein** lokales Extremum

Beweis. Nach der Taylorformel **1. Form** (Satz 4.4.2) gilt:

$$\forall_{x \in I} f(x) = f(x_0) + \frac{1}{p!} \Delta_p(x)(x - x_0)^p$$

mit etwa $\Delta_p(x_0) = f^{(p)}(x_0) > 0 \xrightarrow{\text{Permutat., Prinzip}} \Delta_p(x) > 0$ in $U(x_0)$

(a) p gerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 ein (strenges) Minimum

$$\Rightarrow \forall_{x \in \dot{U}(x_0)} f(x) > f(x_0)$$

(b) p ungerade $\Rightarrow$ kein lokales Extremum in x_0

$$\Rightarrow \forall_{x \in \dot{U}(x_0)} \begin{cases} x < x_0 & \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 & \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

□

3. Konvexitätsverhalten

Definition. Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auch **konvex**, (**konkav**), falls der Graph f zwischen zwei Punkten $x_0, x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$ jeweils unterhalb (überhalb) der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ liegt, das heißt, wenn gilt

$$\forall_{x \in]x_0, x_1[} f(x) \stackrel{(\geq)}{\leq} f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (4.8)$$

(Analog definiert man **streng konkav** (**streng konvex**))
Äquivalent zu 4.8 ist die Bedingung

$$\forall_{x \in]x_0, x_1[} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (4.9)$$

Beweisbar durch äquivalente Umformungen.

Satz 4.4.8. Satz der Konvexitätskriterien

Für eine auf dem Intervall I stetige und im inneren dieses Intervalles ($\overset{\circ}{I}$) diffbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

(a) f ist (streng) monoton konvex $\Leftrightarrow f'$ ist in $\overset{\circ}{I}$ (streng) monoton wachsend

Ist f in $\overset{\circ}{I}$ sogar 2-mal diffbar, so gilt

(b) f ist konvex $\Leftrightarrow \forall_{x \in \overset{\circ}{I}} f''(x) \geq 0$

(c) f ist streng konvex $\Leftrightarrow \forall_{x \in \overset{\circ}{I}} f''(x) \geq 0 \cap$ es gibt **kein** triviales Teilintervall (also nur triviale Teilintervalle) $J \subset \overset{\circ}{I}$ mit $f''|_J = 0$

Beweis. von (a)

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

„ $\Rightarrow$ “ Aus 4.9 folgt durch Grenzwertbildung

$$f'(x_0) \stackrel{x \rightarrow x_0}{\leq} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \stackrel{x \rightarrow x_1}{\leq} f'(x_1)$$

Wäre im Falle der **strengen** Konvexität $f'(x_0) = f'(x_1)$ für $x_0 < x_1$, so wäre wegen der Monotonie $f'|_{[x_0, x_1]} = \text{const}$, also $f|_{[x_0, x_1]}$ ein Geradenstück. **Widerspruch**

„ $\Leftarrow$ “ Für beliebige $x_0, x, x_1 \in I$ mit $x_0 < x < x_1$ gilt nach dem Mittelwertsatz 4.2.3

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\bar{x}_0) \stackrel{\equiv}{<} f'(\bar{x}_1) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

(b) und (c) nach dem Monotoniekriterium (Satz 4.2.4) □

4. Bestimmung von Wendepunkten In Wendepunkten ändern Funktionen ihr Konvexitätsverhalten. Hier eine mögliche Definition für diffbare Funktionen.

Definition. Eine diffbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in I$ ein **Wendepunkt**, wenn eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 existiert mit

$$\forall_{x \in U} \left\{ \begin{array}{ll} x < x_0 & \Rightarrow f(x) \leq T(x) \\ x > x_0 & \Rightarrow f(x) \geq T(x) \end{array} \right\} \text{ (oder umgekehrt)}$$

mit der Tangente $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in x_0

Bemerkung. Wendepunkte können wie Extrema nur im Inneren des Definitionsintervalles auftreten.

Satz 4.4.9. Notwendige Bed. für WP's

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf dem offenen Intervall 2 mal diffbar. Dann gilt:
 f besitzt in x_0 ein Wendepunkt $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Beweis. Nach der Taylorformel **1. Form** (Satz 4.4.2) gilt

$$\forall_{x \in I} f(x) = T(x) + \frac{1}{2} \Delta_2(x)(x - x_0)^2$$

(a) Es liegt kein Wendepunkt vor, wenn gilt:

$$f''(x_0) = \Delta_2(x_0) > 0 \Rightarrow \forall_{x \in U} \Delta(x) > 0 \Rightarrow \forall_{x \in \dot{U}(x_0)} f(x) > T(x)$$

(b) Es liegt auch kein Wendepunkt vor, wenn:

$$f''(x_0) < 0 \text{ (Rechnung analog wie in (a))}$$

Es bleibt nur $f''(x_0) = 0$ übrig. □

Satz 4.4.10. Hinreichende Bed. für WP's

f sei auf dem offenen Intervall I 2 mal diffbar, dann gilt: **Wechselt $f''(x)$ in x_0 das Vorzeichen, so liegt in x_0 ein Wendepunkt vor.**

Beweis. Nach der Taylorformel **2. Form** (Satz 4.4.3) gilt:

$$\forall_{x \in U(x_0)} f(x) = T(x) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x - x_0)^2 \text{ mit } \bar{x} \in \overline{x_0 x}$$

Daraus folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall_{\bar{x} < x_0} f''(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \forall_{x < x_0} f(x) \leq T(x) \\ \forall_{\bar{x} > x_0} f''(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \forall_{x > x_0} f(x) \geq T(x) \end{array} \right\} \text{ (oder Umgekehrt)}$$

□

Bemerkung. Wenn f auf der einen Seite von x_0 konvex, auf der anderen Seite konkav ist (oder Umgekehrt), liegt ein Wendepunkt vor. Dies ist aber nicht notwendig!

Satz 4.4.11. f sein in $x_0 \in I$ p -mal diffbar (≥ 3) mit

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0$$

Dann gilt:

p ungerade $\Rightarrow$ in x_0 liegt ein Wendepunkt vor

p gerade $\Rightarrow$ in x_0 liegt **kein** Wendepunkt vor

Beweis. Nach der Taylorformel **1. Form** (Satz 4.4.2) gilt

$$\forall_{x \in I} f(x) = T(x) + \frac{1}{p!} \Delta_p(x)(x - x_0)^p$$

□

4.5. Das Riemannsche Integral

A Der Riemannsche Integralbegriff

Bemerkung. Es ist vom Aufbau her nur Anwendbar auf **beschränkte Funktionen** $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf **abgeschlossenen Intervallen** $I = [a, b]$ mit $a < b$.

Es existiert also ein $M > 0$ mit $\forall_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq M$.

Ziel: Der sogenannten **Ordinatenmenge** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y \in \overline{0f(x)}\}$ soll ein vernünftiger Flächeninhalt zugeordnet werden.

Idee: Approximieren von f durch die Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < x_1 < \dots < x_N = b$, $\varphi|_{[x_{k-1}, x_k]}$ $\varphi(x_k)$ beliebig, bei denen der Flächeninhalt durch $I_f = \sum_{k=1}^N c_k(x_k - x_{k-1})$ beschrieben wird.

Definition. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion

(a) Eine **Zerlegung (partition)** des Intervalles $[a, b]$ ist eine $(N + 1)$ -elementige Teilmenge $Z = \{x_0, \dots, x_N\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 1$).

Sie liefert N Teilintervalle $I_k [x_{k-1}, x_k]$ mit der Länge $|I_k| = \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$

Die **Feinheit** der Zerlegung sei $\|z\| := \max_{k=1, \dots, N} |I_k|$ (=Länge des größten Teilintervalles)

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

(b) Die **Riemannsche Obersumme** von f bezüglich der Zerlegung Z sei

$$\overline{R_f(z)} = \sum_{k=1}^N M_k \cdot \Delta x_k \text{ mit } M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$$

Die **Riemannsche Untersumme**

$$\underline{R_f(z)} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \Delta x_k \text{ mit } m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$$

sowie die **Variation (Schwankungssumme)** von f bezüglich z

$$V_f(z) = \overline{R_f(z)} - \underline{R_f(z)} = \sum_{k=1}^N |\Delta f_k|_{I_k} \cdot \Delta x_k$$

wenn $|\Delta f_k|_{I_k} := \sup_{x, x' \in I_k} |f(x) - f(x')|$ die Schwankung von f im Intervall I_k bezeichnet.

Bemerkung.

1. Die Suprema/Infima in obiger Definition existieren, da f als beschränkt vorausgesetzt wurde. Es braucht aber kein Maxima/Minima zu sein, da f nicht als **stetig** vorausgesetzt wurde.
2. Es gilt $|\Delta f|_{I_k} = M_k - m_k$ (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 35)

Da f **beschränkt** ist ($\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M$), gilt für **jede** Zerlegung:

$$z : m \cdot (b - a) \leq \underline{R_f(z)} \leq \overline{R_f(z)} \leq M \cdot (b - a)$$

Die Menge $\{\overline{R_f(z)} \mid z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \subset \mathbb{R}$ und $\{\underline{R_f(z)} \mid z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \subset \mathbb{R}$ sind ebenfalls beschränkt und besitzen ein Infimum/Supremum.

Definition. Bei einer beschränkten Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\overline{R_f(z)} := \inf_z \overline{R_f(z)} \quad \text{das **Riemannsche Oberintegral**}$$

und

$$\underline{R_f(z)} := \sup_z \underline{R_f(z)} \quad \text{das **Riemannsche Unterintegral**}$$

wobei Infimum und Supremum bezüglich **jeder** Zerlegung Z von $[a, b]$ zu bilden sind.

Zunächst einige einfache Eigenschaften dieser Größen:

Lemma 4.1.

- (a) Ist die Zerlegung z' von $[a, b]$ eine Verfeinerung der Zerlegung z , das heißt entsteht z' aus z durch hinzufügen weiterer Teilpunkte (mit Umnummerierung) so gilt für R -Ober- und Untersumme:

$$\overline{R_f}(z') \leq \overline{R_f}(z), \quad \underline{R_f}(z') \geq \underline{R_f}(z)$$

Obersummen nehmen also beim Verfeinern ab, wohingegen die Untersummen zunehmen.

- (b) Für das Riemannsche Ober- und Unterintegral gilt stets

$$\underline{R_f} \leq \overline{R_f}$$

Keine Untersumme ist jemals größer als eine Obersumme.

Beweis.

- (a) Wier nehmen an, z' enthält genau einen Punkt $x' \in]x_{k-1}, x_k[$ mehr als die Zerlegung $z = \{x_0, \dots, x_N\}$.

$$\begin{aligned} \overline{R_f}(z') &= \sum_{i \neq k} M_i \Delta x_i + \sup_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x) \cdot (x' - x_{k-1}) + \sup_{x \in [x', x_k]} f(x) \cdot (x_k - x') \\ &\leq \sum_{i \neq k} M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k = \overline{R_f}(z) \end{aligned}$$

Entsprechend für mehr zusätzliche Teilpunkte (Maximal endlich viele). Analog kann man auch für $\underline{R_f}(z') \geq \underline{R_f}(z)$ Vorgehen.

- (b) Sei z_1, z_2 zwei **beliebige** Zerlegungen von $[a, b]$ und $z' := z_1 \cup z_2$ ihre **gemeinsame Verfeinerung**. Dann gilt nach (a):

$$\underline{R_f}(z_1) \leq \underline{R_f}(z') \leq \overline{R_f}(z') \leq \overline{R_f}(z_2)$$

Aus

$$\begin{aligned} \forall_{x_1} \forall_{z_2} \quad \underline{R_f}(z_1) &\leq \overline{R_f}(z_2) \\ \Rightarrow \forall_{z_1} \quad \underline{R_f}(z_1) &\leq \inf_{z_2} \overline{R_f}(z_2) = \overline{R_f} \\ \Rightarrow \sup_{z_1} \underline{R_f}(z_1) &\leq \overline{R_f}, \\ \text{also } \underline{R_f} &\leq \overline{R_f} \end{aligned}$$

Keine Untersumme ist jeweils größer als die Obersumme.

□

Normalerweise bleibt $\underline{R_f} < \overline{R_f}$, im Idealfall ist $\underline{R_f} = \overline{R_f}$

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **R-integrierbar**, wenn **Riemann Oberintegral** und **Riemann Unterintegral** übereinstimmen. Der gemeinsame Wert $R_f := \underline{R_f} = \overline{R_f}$ heißt dann **R-Integral** von f über $[a, b]$ und wird bezeichnet mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Bemerkung. Das R -Integral $\int_a^b f(x)dx$ hat (vorerst) nichts mit dem in Kapitel 4.3 über Stammfunktion eingeführten bestimmten Integral mit gleicher Bezeichnung zu tun. Zur Unterscheidung ist bei Bedarf

$$S - \int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad R - \int_a^b f(x)dx \left(= \int_{[a,b]} f(x)dx \right)$$

zu verwenden.

Beispiel. für eine nicht R -integrierbare Funktion:
Für die **Dirichlet-Funktion**

$$x \in [0, 1] \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

gilt bei jeder Zerlegung von z $\underline{R}_f(z) = 0$, $\overline{R}_f = 1$, also **immer** $\underline{R}_f = 0 \neq 1 = \overline{R}_f(z)$

Die R -integrierbarkeit mit Hilfe der Definition zu überprüfen ist mühsam. Ein einfaches Kriterium liefert:

Satz 4.5.1. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ist genau dann R -integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung z von $[a, b]$ gibt mit der **Varianz**

$$V_f(z) = \overline{R}_f - \underline{R}_f < \varepsilon$$

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Sei f R -integrierbar mit $R_f := \int_a^b f(x)dx$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Definition von Supremum/Infimum eine Zerlegung z_1, z_2 von $[a, b]$ mit

$$\underline{R}_f(z_1) > R_f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{R}_f(z_2) < R_f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Für die gemeinsame Verfeinerung $z := z_1 \cup z_2$ gilt dann nach Lemma 4.1 (a)

$$\overline{R}_f(z) \leq \overline{R}_f(z_2) < R_f + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{R}_f + \varepsilon \leq \underline{R}_f(z) + \varepsilon$$

„ $\Leftarrow$ “ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere eine Zerlegung z mit $\overline{R}_f(z) - \underline{R}_f(z) < \varepsilon$. Wegen $\underline{R}_f(z) \leq \underline{R}_f \stackrel{4.1(b)}{\leq} \overline{R}_f \leq \overline{R}_f(z)$ ist dann auch $\overline{R}_f - \underline{R}_f < \varepsilon$.
Da ε beliebig ist, muss $\underline{R}_f = \overline{R}_f$ sein, das heißt f ist R -integrierbar!

□

Definition.

$$\begin{aligned} f : R - \text{integrierbar} : & \Leftrightarrow \underline{R}_f = \sup_z \underline{R}_f(z) \stackrel{!}{=} \inf_z \overline{R}_f(z) = \overline{R}_f \\ & \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_z V_f(z) < \varepsilon \end{aligned}$$

Satz 4.5.2. Satz der R Integrationsbed.

- (a) Jede **stetige** Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist R -integrierbar
- (b) Jede **monotone** Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist R -integrierbar (beschränktheit ist bei Monotonie automatisch erfüllt)

Beweis.

- (a) Nach Satz 2.4.10 ist f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ sogar **gleichmäßig stetig**, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y' \in [a, b] \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Ist jetzt z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit Feinheit $\|z\| < \delta$ (sie existiert), so gilt

$$\forall_{k=1, \dots, N} \quad (z = \{x_0, \dots, x_N\}) \quad x, x' \in I_k \Rightarrow |x - x'| < \delta \Rightarrow |\Delta f|_{I_k} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

also

$$V_f(z) = \sum_{k=1}^N \underbrace{|\Delta f|_{I_k}}_{\leq \varepsilon} \cdot \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

- (b) Sei f monoton wachsend. Wir wählen eine **äquidistante Zerlegung** von $[a, b]$ mit $|I_k| = \Delta x_k = \frac{b-a}{N}$. wegen $|\Delta f|_{I_k} = f(x_k) - f(x_{k-1})$ gilt

$$V_f(z) = \sum_{k=1}^N |\Delta f|_{I_k} \cdot \Delta x_k = \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{1}{N}(b-a) \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

für N genügend groß.

□

Verschärfung: Man kann auch zeigen, dass jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die bis auf endlich viele Ausnahmen stetig ist (sogar bis auf abzählbare viele Ausnahmen) ebenfalls R integrierbar ist.

Wie rechnet man das R -Integral aus?

Definition. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $z = \{x_0, \dots, x_N\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$

- (a) Ein **Zwischenpunktvektor (ZPV)** zur Zerlegung z ist ein N -Tupel $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ mit

$$\forall_k \quad x_k \in I_k \subset [x_{k-1}, x_k]$$

- (b) Die **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung z und des Zwischenpunktvektors $\bar{x}$ sei

$$R_f(z, \bar{x}) = \sum_{k=1}^N f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Um zu zeigen, dass beliebige Riemannsche Summen einer R -integrierbare Funktion gegen das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergieren, wenn nur $\|z\| \rightarrow 0$ geht, brauchen wir noch 2 Lemmata:

Lemma 4.2. Bei einer R -integrierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt für eine beliebige Riemannsche Summe

$$\left| R_f(z, \bar{x}) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq V_f(z) < \varepsilon$$

Beweis. Es gilt stets

$$\underline{R}_f(z) \leq R_f(z, \bar{x}) \leq \overline{R}_f(z)$$

und ebenso

$$\underline{R}_f(z) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{R}_f(z)$$

Also ist auch

$$\left| R_f(z, \bar{x}) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \overline{R}_f(z) - \underline{R}_f(z) = V_f(z)$$

□

Lemma 4.3. (rein technisch)

Sind z, z' beliebige Zerlegungen von $[a, b]$ mit

$$\|z'\| = \max_{j=1, \dots, N} |I'_j| \leq \min_{k=1, \dots, N} |I_k|$$

(das längste Teilintervall von z' ist höchstens so lang, wie das kürzeste Teilintervall von z) so gilt für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: $V_f(z') \leq 3V_f(z)$

Beweis.

1. Für jedes $j = 1, \dots, N'$ gilt schlimmstenfalls $I'_j \subset I_k \cup I_{k+1}$ mit einem $k = 1, \dots, N$.
Für beliebige $x, x' \in I'_j$ mit etwa $x \in I_k, x' \in I_{k+1}$ folgt:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_{k+1})| \leq |\Delta f|_{I_k} + |\Delta f|_{I_{k+1}}$$

(dies ist auch richtig, wenn $x, x' \in I_k$ oder $x, x' \in I_{k+1}$).

Also ist auch

$$|\Delta f|_{I'_j} \leq |\Delta f|_{I_k} + |\Delta f|_{I_{k+1}} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{jk} |\Delta f|_{I_k} \quad (4.10)$$

mit der **Inzidenzmatrix** (ε_{jk}) , definiert durch

$$\varepsilon_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } I'_j \cap I_k \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Gleichung 4.10 ist auch richtig, falls $I'_j \subset I_k$

2. Für jedes $k = 1, \dots, N$ gilt

$$\sum_{j=1}^{N'} \varepsilon_{jk} |I'_j| \leq |I_k| + 2 \max_j |I'_j| \leq |I_k| + 2 \min_l |I_l| \leq 3 |I_k| \quad (4.11)$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} V_f(z') &= \sum_j |\Delta f|_{I'_j} |I'_j| \stackrel{4.10}{\leq} \sum_j \sum_k \varepsilon_{jk} |\Delta f|_{I_k} |I'_j| \\ &\leq \sum_k |\Delta f|_{I_k} \left(\sum_j \varepsilon_{jk} |I'_j| \right) \stackrel{4.11}{\leq} 3 \sum_k |\Delta f|_{I_k} |I_k| \\ &= 3 \cdot V_f(z) \end{aligned}$$

□

Damit können wir nachfolgenden Satz zeigen:

Satz 4.5.3. Satz über den GW der Verfeinerung

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei R -integrierbar. Dann gilt für eine beliebige Folge $(z_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ und für **jede** Folge $(\bar{x}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von zugehörigen **Zwischenpunktvektoren (ZPV)**

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|z_l\| = 0 \Rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} (R_f(z_l, \bar{x}_l)) = \int_a^b f(x) dx$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $V_f(z) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ist $L := \max_k |I_k|$, so gibt es wegen $\|z_l\| \rightarrow 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall l \geq m \ \|z_l\| \leq L$. Nach Lemma 4.2 und Lemma 4.3 folgt dann:

$$\forall l \geq m \left| R_f(\bar{z}_l, \bar{x}_l) - \int_a^b f(x) dx \right| \stackrel{4.2}{\leq} V_f(z_l) \leq 3 \cdot V_f(z) < \varepsilon$$

□

Beispiel. $x \mapsto f(x) = e^x$ ist stetig/monoton über jedem Intervall $[a, b]$ R -integrierbar. Wir wählen die äquidistante Zerlegung z mit $x_k = a + k \cdot h$, $h = \frac{b-a}{N}$, ($k = 0, \dots, N$) und Zwischenpunkt $\bar{x}_k = x_{k-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_f(z, \bar{x}) &= \sum_{k=1}^N e^{a+(k-1)h} \cdot h = e^a \cdot \sum_{k=1}^N (e^h)^{k-1} \cdot h \\ &= e^a \frac{1 - (e^h)^N}{1 - e^h} \cdot h = e^a \frac{1 - e^{b-a}}{1 - e^h} \cdot h \\ &= (e^b - e^a) \underbrace{\frac{h}{e^h - 1}}_{\substack{\{h \rightarrow 0\} \rightarrow 1}} \stackrel{\{\|z\| \rightarrow 0\} \rightarrow 0}{\rightarrow} e^b - e^a = R_f \int_a^b e^x dx \end{aligned}$$

Nur eine Umformulierung (Verwendung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums statt dem Folgenkriterium) ist:

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Korollar. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R -integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für **jede** z um $[a, b]$ und für jede Wahl von ZPV $\bar{x}$ gilt

$$\|z\| < \delta \Rightarrow \left| R_f(z, \bar{x}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Oder in Kurzschreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|z\| \rightarrow 0} R_f(z, \bar{x}) = \lim_{\|z\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N f(\bar{x}_k) \Delta x_k$$

B. Grundeigenschaften des R -Integrals

Satz 4.5.4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ komponentenweise $\mathbb{R}$ -integrierbar
 $\Rightarrow |f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei $|f|$ der Normierung entspricht) R -integrierbar mit

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Beweis.

1. Wir zeigen $\forall_{i=1}^n f$ R -integrierbar $\Rightarrow |f|$ R -integrierbar. Nach der Umgekehrten 3-Ecks-Ungleichung, die ja für **jede** Norm gültig ist, gibt es für ein festes Teilintervall J eine Zerlegung z von $[a, b]$

$$\begin{aligned} \forall_{x, x' \in J} \quad ||f(x)| - |f(x')|| &\leq |f(x) - f(x')| \leq \alpha |f(x) - f(x')| \\ &= \alpha \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(x')| \\ \Rightarrow |\Delta |f||_J &\leq \alpha \sum_{i=1}^m |\Delta f_i|_J \end{aligned}$$

Also ist auch

$$V_{|f|}(z) \leq \alpha \sum_{i=1}^m V_{f_i}(z)$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun eine Zerlegung $z_1, \dots, z_m$ von $[a, b]$ mit $V_{f_i}(z_i) < \frac{\varepsilon}{m\alpha}$. Für die gemeinsame Verfeinerung $z := z_1 \cup \dots \cup z_m$ gilt dann

$$V_{|f|}(z) \leq \alpha \sum_{i=1}^m V_{f_i}(z) \leq \alpha_{i=1}^m V_{f_i}(z_i) < \alpha m \frac{\varepsilon}{m\alpha} = \varepsilon$$

2. Abschätzung der Integrale:
Für Riemannsche Summen gilt:

$$R_{|f|}(z, \bar{x}) = \sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_k)| \Delta x_k \geq \left| \sum_{k=1}^N f(\bar{x}_k) \Delta x_k \right|$$

Grenzübergang $\|z\| \rightarrow \infty$ liefert, da $|\cdot|$ stetig ist, die bekannte Ungleichung:

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

□

Mit der gleichen Methode

- Abschätzung der Varianz zum Beweis der Integrierbarkeit
- Vergleich von Riemannschen Summen zur Abschätzung des Riemannschen Integrals
- lassen sich auch die zwei Sätze 4.5.5 und 4.5.6 beweisen. (**Übungsaufgabe**)

Satz 4.5.5. Rechenregel für integrierbare Funktionen

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien R -integrierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) über $[a, b]$ R -integrierbar mit

$$(a) \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(b) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Weiter gilt

$$(c) \forall_{x \in [a, b]} f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Das R -Integral ist also eine monotonen lineares Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{R}([a, b])$ aber auf $[a, b]$ R integr. Funktion

Bemerkung. Die Komposition $g \circ f$ R -integrierbarer Funktionen f, g braucht nicht R -integrierbar zu sein. Hierfür gibt es böse Gegenbeispiele

Satz 4.5.6.

- (a) ist $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $[b, c] \subset \mathbb{R}$ R -integrierbar, dann ist f auch über $[a, c]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

- (b) ist umgekehrt f über $[a, b] \subset \mathbb{R}$ integrierbar, so auch über jedes Teilintervall $[a', b'] \subset [a, b]$

Folgerung. Für eine R -integrierbare Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\forall_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq M \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \cdot (b - a)$$

Beweis.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \stackrel{4.5.4}{\leq} \int_a^b |f(x)| dx \stackrel{4.5.5(c)}{\leq} \int_a^b M dx = M \cdot (b - a)$$

□

Eine weitere Folgerung ist:

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Satz 4.5.7. Mittelwertsatz der Integralrechnung

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x})(b-a)$$

Bemerkung. Vergleiche mit dem MWS der Differentialrechnung (Satz 4.2.3): Falls f eine Stammfunktion F besitzt, gilt:

$$\left(S - \int_a^b F'(x)dx = \right) F(b) - F(a) = F'(\bar{x})(b-a)$$

Beweis. f nimmt als stetige Funktion auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an, das heißt es existiert

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1), \quad m = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \forall_{x \in [a, b]} m \leq f(x) \leq M \\ & \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ & \Rightarrow c := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \in [m, M] = [f(x_1), f(x_2)] \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.4.11) existiert ein $\bar{x} \in \overline{x_1 x_2} \in [a, b]$ bin $f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ □

C Die Hauptsätze der Differential und Integralrechnung

Definition. Definition der Integrierbarkeit

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein beliebiges Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal R integrierbar**, wenn sie über **jedem kompakten Teilintervall** $[a, b] \subset I$ R -integrierbar ist. In diesem Falle heißt:

$$x \in I \mapsto F_c := \begin{cases} \int_c^x f(t)dt & \text{falls } x > c \\ 0 & \text{falls } x = c \\ -\int_x^c f(t)dt & \text{falls } x < c \end{cases} \text{ mit } x \in I$$

ein R -Integral von f , ebenfalls ist $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ definiert.

Beispiele.

1. f auf $[a, b]$ R -integrierbar $\Rightarrow f$ auf $[a, b]$ auch, nach Satz 4.5.6(b) lokal R -integrierbar
2. f auf I (beliebig) stetig/monoton $\Rightarrow f$ auf I lokal R -integrierbar

Wir zeigen, dass in bestimmten Fällen die Begriffe „Integralfunktion“ und „Stammfunktion“ zusammen fallen. Ist F_c eine R -integralfunktion von f , so gibt es nach Rechenregeln für beliebige $a, b \in I$:

$$F_c(b) - F_c(a) = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Zum Beweis betrachte man die Fallunterscheidung nach der Lage von a, b und c .

Satz 4.5.8. 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal R -integrierbar und $c \in I$ beliebig gewählt. Dann gilt für die R -Integralfunktion

$$x \in I \mapsto F_c(x) = \int_c^x f(t) dt \in \mathbb{R}$$

(a) F_c ist stetig

Integrieren macht stetig

(b) Ist f in $x_0 \in I$ stetig, dann ist F_c in x_0 sogar differenzierbar mit $F'_c(x_0) = f(x_0)$

Integrieren stetiger Funktionen macht „glatt“

Folgerung. Ist $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz I stetig, so liefert jede R -Integralfunktion eine Stammfunktion von f

$$\forall_{x \in I} F'_c(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt \stackrel{!}{=} f(x) + F(c)$$

Merke: Jede auf einem Intervall I stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion (vgl. Satz 4.5.2)

Insbesondere gilt:

$$\forall_{a,b \in I} \int_a^b f(t) dt = F_c(b) - F_c(a) \left(= R - \int_a^b f(t) dt \right)$$

Beweis. von Satz 4.5.8

(a) Sei $K \subset I$ ein beliebiges kompaktes Teilintervall, dann existiert, da f beschränkt ist, ein $M > 0$ mit

$$\forall_{x \in K} |f(x)| \leq M.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \forall_{x,x' \in K} |F_c(x) - F_c(x')| &= \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \leq \underbrace{\left| \int_x^{x'} |f(t)| dt \right|}_{\text{da } x' < x \text{ sein kann}} \\ &\leq M |x - x'| < \varepsilon, \text{ falls } |x - x'| < \delta := \frac{\varepsilon}{M} \text{ ist} \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass F_c auf K sogar gleichmäßig stetig ist.

(b) Ist f **stetig** in x_0 , so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass gilt:

$$\forall_{x \in I} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für solche $x (\neq x_0)$ folgt dann auch:

$$\begin{aligned} |F_c(x) - F_c(x_0) - f(x_0) \cdot (x - x_0)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| < \varepsilon \cdot |x - x_0|, \end{aligned}$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

also

$$\left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Damit existiert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right) = 0, \text{ das heißt:}$$

$$F'_c(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$\stackrel{4.5.8}{\Rightarrow}$ das R -Integral liefert eine Stammfunktion.

□

Eine Art Umkehrung der obigen Folgerung ist:

Satz 4.5.9. 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal R -integrierbar und besitzt f eine Stammfunktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ so gilt

$$\forall_{a,b \in I} \quad R - \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \left(= S - \int_a^b f(x)dx \right)$$

(Das R -Integral lässt sich also mit Hilfe der Stammfunktion von f ausrechnen

Beweis. Sei $z = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ wobei hier immer $a < b$ angenommen wird. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.2.3)

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(\bar{x}_k) = f(\bar{x}_k)$$

mit einem Zwischenpunkt $\bar{x}_k \in]x_{k-1}, x_k[$.

Für die Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung z und dem so bestimmten Zwischenpunktvektor $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N]$ gilt dann:

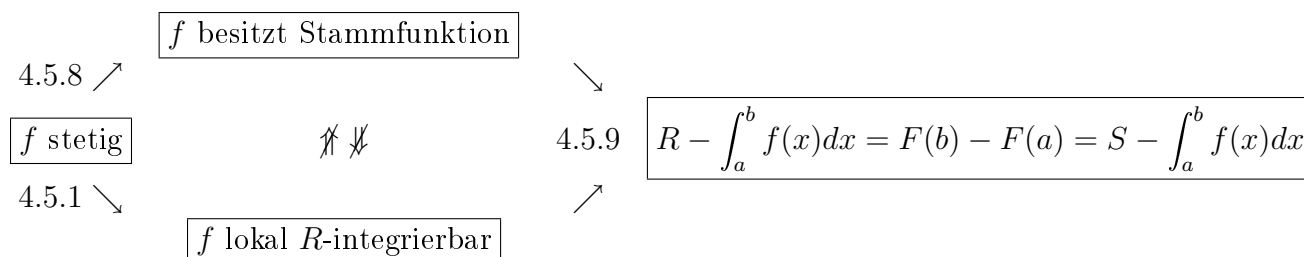
$$\begin{aligned} R_f(z, \bar{x}) &= \sum_{k=1}^N f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Für $\|z\| \rightarrow 0$ erhält man dann auch

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

□

Für $b < a$ ist der Beweis völlig analog, einzig a und b tauschen die Plätze.

Zusammenstellung

für $\mathcal{R}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lokal Integrierbar}\}$
 und $\mathcal{I}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ besitzt Stammfunktion}\}$

Beispiele.

1. f lokal R -integrierbar $\not\Rightarrow f$ besitzt Stammfunktion
 $x \mapsto f(x) = \text{sign } x$ besitzt auf $\mathbb{R}$ die Integralfunktion $x \mapsto F_0(x) = |x|$, aber keine Stammfunktion
2. f besitzt Stammfunktion $\not\Rightarrow f$ lokal R -integrierbar

$$x \mapsto F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist auf $[0, \infty[$ Stammfunktion von

$$x \mapsto f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist aber auf keinem Intervall Riemann integrierbar, da sie unbeschränkt ist, denn $\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$ ist für $x \rightarrow 0$ unbeschränkt

Anwendung des 1. Hauptsatzes (Satz 4.5.8):

Gegeben: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liefert äquidistante Zerlegungen $z = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, N\}$ von $[0, 1]$ mit Zwischenpunkt $\bar{x}_k := x_k = \frac{k}{N}$, die Riemannsche Summen:

$$R_f(z, \bar{x}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^N f\left(\frac{k}{N}\right) \text{ mit } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) \stackrel{\|z\| \rightarrow 0}{=} \int_0^1 f(x) dx$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k^2}{n^2} + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Nur eine Umformung des 2. Hauptsatzes (Satz 4.5.9) ist, wenn $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar mit R integrierbare Ableitung F' , so gilt

$$\forall_{x_0, x \in I} F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x F'(x) dx \quad (4.12)$$

Eine Verallgemeinerung (setze f statt F) ist:

Satz 4.5.10. Taylor'scher Satz, Integralfunktion

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(p+1)$ -mal diffbar sowie $f^{(p+1)}$ lokal R -integrierbar. Dann gilt (mit $x_0 \in I$)

$$\forall_{x_0 \in I} f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{p!} \int_{x_0}^x f^{(p+1)}(t)(x-t)^p dt$$

(Integralfunktion des Restgliedes)

Beweis. Vollständige Induktion: Setze $\tilde{R}(x) := \frac{1}{p!} \int_1^x f^{(p+1)}(t)(x-t)^p dt$. Zu Zeigen ist:

$$R_p(x) = \tilde{R}_p(x)$$

1. Induktionsanfang $p = 0$: siehe 4.12

2. Induktionsschritt $p \rightarrow p+1$: Sei f $(p+2)$ mal diffbar und $f^{(p+2)}$ lokal R -integrierbar. Dann ist

$$t \rightarrow F(t) := \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t)(x-t)^{p+1}$$

noch einmal diffbar.

$$t \rightarrow F'(t) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)(x-t)^{p+1} - \frac{1}{p!} f^{(p+1)}(t)(x-t)^p$$

nach Voraussetzung R -integrierbar. Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x F'(t) dt &\stackrel{4.12}{=} \underbrace{F(x)}_{=0} - F(x_0) = -F(x_0), \text{ das heißt:} \\ \tilde{R}_{p+1}(x) - \tilde{R}_p(x) &= -\frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0)(x-x_0)^{p+1} \\ &= T_p(x) - T_{p+1}(x) \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme folgt:

$$f(x) = T_p(x) + \tilde{R}_p(x) = T_{p+1}(x) + \tilde{R}_{p+1}(x)$$

□

D Die Länge parametrisierter Kurven

Eine C^1 Abbildung $t \in [a, b] \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^m$ kann als **Parameterdarstellung** einer (Raum-) Kurve aufgefasst werden. $\dot{c}(t) := \frac{dc}{dt}$ ist der Geschwindigkeitsvektor ($t = \text{Zeitintervalle}$). $|\dot{c}(t)|$ ist dann die **skalare Geschwindigkeit**, $|\cdot|$ ist die euklidische Norm. Wir wollen ihre Länge bestimmen, in dem wir sie durch **Sehnepolygonzüge** approximieren.

Versuch: Eine Zerlegung $z = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ von $[a, b]$ definiert einen **Polygonzug** der euklidischen Länge

$$l(z) = \sum_{k=1}^N |c(t_k) - c(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i(t_k) - c_i(t_{k-1}))^2}$$

Anwendung des Mittelwertsatzes (Satz 4.5.7) auf die einzelnen kompakten Funktionen liefert:

$$l(z) = \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^m \dot{c}_i^2(\bar{t}_{ik})} \Delta t_k$$

Bemerkung. Wäre der Mittelwertsatz auch für vektorwertige Funktionen richtig, das hieße $\forall_{i=1}^m \bar{t}_{ik} = \bar{t}_k$, so ließe sich

$$l(z) = \sum_{k=1}^N |\dot{c}(\bar{t}_k)| \Delta t_k$$

als Riemannsche Summe $R(z, \bar{t})$ der nach Voraussetzung stetigen Funktion $t \mapsto |\dot{c}(t)|$ auffassen, und erhielte als Grenzwert:

$$l = \lim_{\|z\| \rightarrow 0} l(z) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$$

Dies ist aber nicht so. Trotzdem ist das Ergebnis richtig!

Für die Riemannsche Summe $R(z, t) := \sum_{k=1}^N |\dot{c}(t_k)| \Delta t_k$ gilt

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} R(z, t) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \quad (4.13)$$

Abschätzung der Differenz $l(z) - R(z, t)$: Nach der Umgekehrten Δ -Ungleichung ($||a|_2 - |b|_2|_2 \leq |a - b|_2$) gilt:

$$\begin{aligned} |l(z) - R(z, t)| &= \left| \sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \dot{c}_i^2(t_k)} - \sqrt{\sum_{i=1}^m \dot{c}_i^2(\bar{t}_{ik})} \right) \Delta t_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^m [\dot{c}_i(t_{ik}) - \dot{c}_i(\bar{t}_{ik})]^2} \cdot \Delta t_k \end{aligned}$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Da jede Komponente auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ jeweils ein $\delta_i > 0$ mit

$$\forall_{t, t' \in [a, b]} |t - t'| \delta_i \Rightarrow |\dot{c}_i(t) \dot{c}_i(t')| < \varepsilon$$

$\forall_z$ mit $\|z\| < \delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ folgt dann

$$|l(z) - R(z, t)| < \sqrt{m\varepsilon^2}(b - a) = \sqrt{m}(b - a) \cdot \varepsilon \quad (=:\bar{\varepsilon})$$

Dies bedeutet

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} |l(z) - R(z, t)| = 0 \quad (4.14)$$

Aus 4.13 und 4.14 folgt

$$\boxed{\lim_{\|z\| \rightarrow 0} l(z) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt = l}$$

Satz 4.5.11. Satz über die Länge parametrisierter Kurven

Die parametrisierte Kurve $t \in [a, b] \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ sei **stetig diffbar**, dann konvergiert die Länge der eingezogenen **Sehnenpolygonzüge** für $\|z\| \rightarrow 0$ gegen

$$l := \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$$

also gegen die **Länge der Kurve**

Beispiel. Bestimmung des Umfanges einer Ellipse

$$t \in [0, 2\pi] \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit $a < b$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = 4b \cdot E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

mit **numerischer Exzentrizität** $k = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \Rightarrow$ Vollständiges elliptisches Integral nicht elementar Ausdrückbar. Für $r = a = b$ gilt natürlich $l = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi r$

E Uneigentliche R-Integrale

Bemerkung. Das *R-Integral* ist nach Konstruktion nur definiert für **beschränkte Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen**. Manchmal möchte man aber durch die **Ordnatenmenge** anderen Funktionen einen vernünftigen Flächeninhalt zuordnen.

Beispiel.

$$\forall_{x>0} \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \rightarrow 1$$

Definition. Eine lokal R -integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b \leq \infty$ heißt über $[a, b[$ **uneigentlich R -integrierbar**, wenn

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$$

in $\mathbb{R}$ (oder eventuell auch uneigentlich) existiert.

Analog sind uneigentliche R -Integrale

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt$$

über $]a, b]$ mit $-\infty \leq a < b$ und $c \in]a, b[$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ bei

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t)dt$$

integrierbar.

Beispiel.

$$\forall_{x>0} \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\log x \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty$$

Bemerkung. Uneigentliche Integrale haben Formal große Ähnlichkeiten mit unendlichen Funktionenreihen.

$$\boxed{\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \sum_{k=0}^\infty f_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(t)}$$

Es gelten auch analog die Konvergenzkriterien (Cauchy-Konvergenzkriterium oder Majorantenkriterium).

Uneigentliche Integrale liefern noch ein nützliches Konvergenzkriterium für unendliche Reihen:

Satz 4.5.12. Satz über Integralkriterien uneigentlicher Integrale

Sei $f : [m, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) nichtnegativ und monoton fallend. Dann existiert

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n f(k) - \int_m^n f(t)dt \right) \text{ mit } 0 \leq c \leq f(m)$$

Insbesondere gilt:

$$\sum_{k=m}^\infty f(k) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_m^\infty f(t)dt \text{ konvergiert}$$

Beweis. f ist als monotone Folge R -integrierbar

$$\forall_{k \geq m} \forall_{t \in [k, k+1]} f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \forall_{k \geq m} f(k+1) \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \forall_{n \geq m} \sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) \left(= \sum_{k=m+1}^n f(k) \right) \stackrel{1}{\leq} \int_m^n f(t)dt \stackrel{2}{\leq} \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \quad (4.17)$$

4. Differential und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Für die Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=m}^n f(k) \quad (4.18)$$

und die Integralfunktion $s \mapsto F(x) = \int_m^x f(t)dt$ folgt:

$$(4.19)$$

$$\forall_{n \geq m} F(n+1) \stackrel{2}{\leq} s_n \stackrel{1}{\leq} F(n) + f(m) \quad (4.20)$$

Für die durch $c_n := s_n - F(n)$ definierte Folge $(c_n)_{n \geq m}$

$$\begin{aligned} [4.16 \Rightarrow] \quad f(n+1) &\leq \int_n^{n+1} f(t)dt \Rightarrow s_{n+1} - s_n \leq F(n+1) - F(n) \\ &\Leftrightarrow c_{n+1} \leq c_n \text{ das heißt, die Folge ist monoton fallend.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [4.20 \Rightarrow] \quad 0 &\leq \int_n^{n+1} f(t)dt = F(n+1) - F(n) \leq s_n - F(n) \\ &= c_n \leq f(m) \\ &\Rightarrow 0 \leq c_n \leq f(m) \text{ das heißt } c_n \text{ ist beschränkt} \end{aligned}$$

Also konvergiert $(c_n)_{n \geq m}$ monoton fallend gegen

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in [0, f(m)]$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} &\Leftrightarrow (s_n)_{n \geq m} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow (F(n))_{n \geq m} \text{ konvergiert} \\ &\Leftrightarrow \left(\int_m^n f(t)dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{monotonie}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_m^x f(t)dt \text{ existiert} \end{aligned}$$

□

Beispiel. Für $f(x) = \frac{1}{x}$, $m = 1$ erhält man wegen

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \log x$$

die Existenz der sogenannten **Eulerschen Konstanten**

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) [\approx 0,577] \in [0, 1]$$

sowie nach 4.20 die Abschätzung

$$\log(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \log n + 1$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Wir betrachten im folgenden wieder Funktionen $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Beziehungsweise Abbildungen der Form:

$$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

Forderungen an den Definitionsbereich:

1. G soll **offen** sein, denn für $n > 1$ ist Diffbarkeit in den Randpunkten problematisch
2. G soll (**bogenweise**) **zusammenhängend** sein, ansonsten betrachtet man die **Zusammenhangskomponenten** einzeln

Definition.

Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gebiet**, wenn sie **offen** und (**bogenweise**) **zusammenhängend** ist

5.1. Partielle und totale Diffbarkeit

A. Partielle Diffbarkeit

Definition. Eine Abbildung heißt im Punkt $\overset{\circ}{x} \in G$ **partiell Diffbar**, wenn für $k = 1, \dots$, die **partiellen Abbildungen** $f(x_k) : x_k \mapsto f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, x_k, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ als stetige Funktion einer Veränderlichen in $\overset{\circ}{x}_k$ diffbar sind.
Der Wert $\partial_k f(\overset{\circ}{x}) : f_{(k)}(\overset{\circ}{x}_k)$ heißt **partielle Ableitung von f nach dem k -ten Argument** in $\overset{\circ}{x}$.

Bemerkung.

1. Beim partiellen Differenzieren von f nach x_k fasst man die übrigen Argumente als **Konstanten** auf. Man interessiert sich nur dafür, wie sich f auf achsenparallelen Geraden verhält.
2. Weitere Bezeichnungen:

$$\text{für } (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \text{ auch } \frac{\partial}{\partial x_k} f := \partial_k f$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

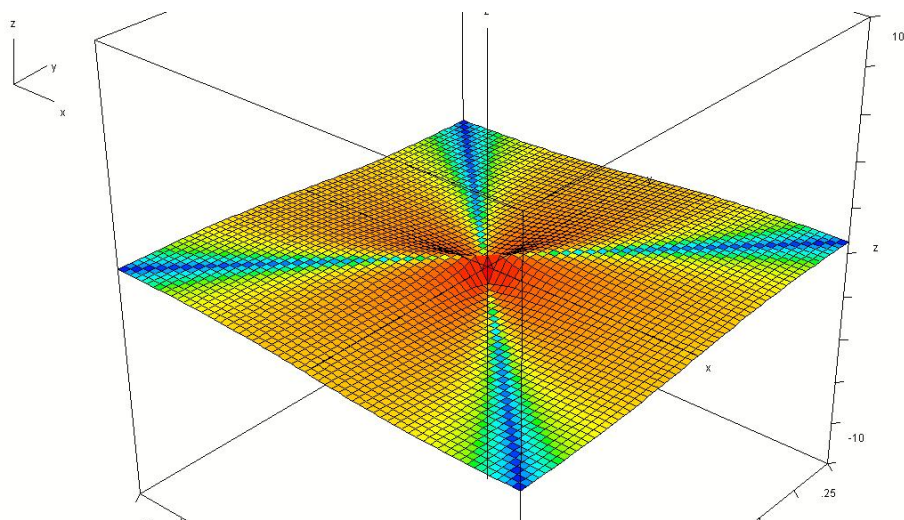
für $(x, y, z, \dots) \mapsto f(x, y, z, \dots)$ auch

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \partial x_k & = & f x & := & \partial_1 f \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \partial_y f & = & f_y & := & \partial_2 f \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \right\}$$

Beispiel. Die Funktion

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist überall diffbar.



1. partielle Ableitung

für $y \neq 0$:

$$x \mapsto f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \partial_x f(x, y) = \frac{(y^2 - x^2)y}{(x^2 + y^2)^2}$$

für $y = 0$:

$$x \mapsto f(x, 0) = \partial_x f(x, 0) = 0$$

2. partielle Ableitung

für $x \neq 0$:

$$y \mapsto f(x) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\partial_y(fx, y) = \frac{(x^2 - y^2)x}{(x^2 + y^2)^2}$$

für $x = 0$:

$$\Rightarrow \partial_y = 0$$

Aber: f ist in $(0,0)$ nicht stetig, denn

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

Rekursiv lassen sich höhere partielle Ableitungen einführen

Definition. Eine Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **p -mal partiell diffbar**, wenn alle p -ten partiellen Ableitungen

$$\partial_{k_p} \dots \partial_{k_1} f := \partial_{k_p} (\partial_{k_{p-1}} \dots \partial_{k_1}) \quad (k_1, \dots, k_p \in \{1, \dots, n\})$$

existieren und **p -mal stetig partiell diffbar** ($p \geq 1$), wenn zusätzlich die p -ten partiellen Ableitungen $\partial_{k_p} \dots \partial_{k_1} f$ als Abbildung $G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig sind.

Weitere Bezeichnungen

$$\frac{\partial^p}{\partial_{x_k} \dots \partial_{x_m}} f := \partial_{k_p} \dots \partial_{k_1} f$$

$$\frac{\partial f}{\partial_y \partial_x^2 \partial_y} := \partial_y \partial_x^2 \partial_y f := \partial_y \partial_x \partial_x \partial_y f$$

Beispiele.

$$1. \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 + 2xyz + y^2 z$$

$\partial_x f(\dots) = 3x^2 + 2y^2$	$\partial_x^2 f(\dots) = 6x$	$\partial_x \partial_y f(\dots) = 2z$
$\partial_y f(\dots) = 2xz + 2yz^2$	$\partial_y \partial_x f(\dots) = 2z$	$\partial_x \partial_z f(\dots) = 2y$
$\partial_z f(\dots) = 2xy + 2y^2 z$	$\partial_z \partial_x f(\dots) = 2y$	

$\Rightarrow$ Gilt eventuell immer $\partial_a \partial_b f(a, b, \dots) = \partial_b \partial_a f(a, b, \dots)$?

2.

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \forall (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y^2-x^2)y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{x[3y^2(x^2+y^2)-2y^4]}{(x^2+y^2)^2} & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\partial_x f(0, y) = \begin{cases} y & \forall y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_x \partial_y f(0, 0) = 1$$

$$\partial_y f(x, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_x \partial_y f(0, 0) = 0$$

Ergebnis: „Nur“ partielle diffbare Abbildungen haben misserable Eigenschaften

- Sie brauchen nicht mal stetig zu sein
- partiell Differentiation hängt im allgemeinen von der Reihenfolge ab.

B. (totale) Diffbarkeit

Sei zunächst $m = 1$ Vorbild für die Definition (Kennzeichnung 1) für die Diffbarkeit bei Funktion einer Veränderlicher ($\Delta \dots$)

Definition. Eine Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $\overset{o}{x} \in G$ **(total) Diffbar**, wenn in $\overset{o}{x}$ stetige Funktion $\Delta_1, \dots, \Delta_n : G \rightarrow \mathbb{R}$ abbildet.

$$\forall_{x \in G} f(x) = f(\overset{o}{x}) + \sum_{k=1}^n \Delta_k(x)(x_k - \overset{o}{x}_k) \quad (5.1)$$

Der (von der Auswahl unabhängige) Vektor

$$\text{grad } f(\overset{o}{x}) := (\Delta_1(\overset{o}{x}), \dots, \Delta_n(\overset{o}{x}))^T$$

heißt **Gradient** von f in $\overset{o}{x}$

Bemerkung. (1) Die Funktionen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ mit 5.1 kann man immer konstruieren. Sertze etwa

$$\Delta_k(x) := \frac{f(x) - f(\overset{o}{x})}{|x - \overset{o}{x}|} (x_k - \overset{o}{x}_k) \quad [x \neq \overset{o}{x}]$$

und $\Delta_k(\overset{o}{x})$ beliebig. **Entscheidend ist die Stetigkeit in $\overset{o}{x}$**

(2) Die Funktionen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ in 5.1 sind für $n \geq 1$ **nicht eindeutig bestimmt**, wohl aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} \Delta_k(x),$$

wenn sie existieren! Siehe Hierzu auch die Übung 50!

Satz 5.1.0.

(3) Es gilt also für f bei der (totalen) Differentiation:

$$\boxed{f \text{ in } \overset{o}{x} \text{ diffbar} \Rightarrow f \text{ in } \overset{o}{x} \text{ stetig}}$$

(als Zusammensetzung in $\overset{o}{x}$ stetiger Funktionen)

Geometrische Interpretation

Definition. **Hessesche Normalform einer Hyperebene [HNF] (Tangentialhyperebene)**

da 5.1 äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k(x) - (x_k - \overset{o}{x}_k) + (-1)(f(x) - f(\overset{o}{x})) = 0$$

also mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} \Delta_1(x) \\ \vdots \\ \Delta_k(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overset{o}{x}_1 \\ \vdots \\ \overset{o}{x}_n \\ f(\overset{o}{x}) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Deswegen folgt für die **Tangentialhyperebene**

$$N(\overset{o}{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad}(\overset{o}{x}) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ liegt also in der **Sekantenhyperebene** durch $\begin{pmatrix} \overset{o}{x} \\ f(\overset{o}{x}) \end{pmatrix}$ mit **Normalenvektor** $\begin{pmatrix} \Delta(x) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Beim Annähern $x \mapsto \overset{o}{x}$ geht diese über in eine **Tangentialhyperebene** mit **Normalenvektor**

$$N(\overset{o}{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad} f(\overset{o}{x}) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Folgerung. Eine in $\overset{o}{x}$ (total) diffbare Funktion besitzt in $(\overset{o}{x}, f(\overset{o}{x}))$ eine **wohlbestimmte Tangentialhyperebene** mit Normalenvektor $N(\overset{o}{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad} f(\overset{o}{x}) \\ -1 \end{pmatrix}$

Beispiele.

1. Der Graph der Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ ist ein **Rotationsparaboloid**. Die Funktion sieht aus, wie eine um den Punkt $(0, 0)$ rotierende Parabel, daher auch der Name. Wegen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \cdot x + y \cdot y \\ &= f(0, 0) + \Delta_1(x, y) \cdot x + \Delta_2(x, y) \cdot y \end{aligned}$$

und mit f in $(0, 0)$ total diffbar mit $\text{grad} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Tangentialebene in

$(0, 0)$ besitzt also den Normalenvektor $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

ist in $(0,0)$ total diffbar, denn

$$f(x, y) = f(0, 0) + \underbrace{\frac{y^3}{x^2 + y^2}}_{\Delta_1(x, y)} \cdot x + \underbrace{0}_{=\Delta_2(x, y)} \cdot y$$

$$\Delta_1(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und ist in $(0,0)$ stetig:

$$|\Delta_1(x, y) - \Delta_1(0, 0)| = \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)| < \varepsilon$$

Also ist f in $(0,0)$ total diffbar.

Ist $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorwertig und komponentenweise total diffbar, so kann man die für jedes $j = 1, \dots, m$ existierende Vektorfelder $x \mapsto \Delta_j(x) = (\Delta_{j1}(x), \dots, \Delta_{jn}(x))$ zeilenweise zu einem Matrixfeld

$$x \mapsto (\Delta_{jk}(x)) \quad \begin{array}{l} \text{Zeile: } j = 1, \dots, m \\ \text{Spalte: } k = 1, \dots, n \end{array}$$

zusammenfügen.

Satz 5.1.1. Eine Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $\overset{\circ}{x} \in G$ (**komponentenweise total**) diffbar, wenn ein in $\overset{\circ}{x}$ **stetiges Matrixfeld** $x \in G \mapsto \Delta(x) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ existiert mit

$$\forall_{x \in G} f(x) = f(\overset{\circ}{x}) + \Delta(x) \cdot (x - \overset{\circ}{x})$$

Die Matrix

$$D f(\overset{\circ}{x}) := \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

heißt **Funktionalmatrix** oder **Jacobimatrix** von f in $\overset{\circ}{x}$

Was steht eigentlich im Gradienten beziehungsweise der Funktionsmatrix?

Satz 5.1.2. Eine in $\overset{\circ}{x}$ (**total**) **diffbare** Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist damit auch **partiell diffbar** und es gilt:

$$D f(\overset{\circ}{x}) = \left(\partial_k f_j(\overset{\circ}{x}) \right)_{\substack{j = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n}}$$

beziehungsweise für $m = 1$

$$\text{grad } f(\overset{\circ}{x}) = \left(\partial_1 f(\overset{\circ}{x}) \dots \partial_n f(\overset{\circ}{x}) \right)^T$$

Die Umkehrung ist nicht richtig

Beweis. Ohne Einschränkung sei $m = 1$. Für die partielle Abbildung

$$\begin{aligned} f_{(k)}(x_k) &= f(\overset{o}{x}_1, \dots, x_k, \dots, \overset{o}{x}_n) = f(\overset{o}{x}) + \Delta_k(\overset{o}{x}_1, \dots, x_k, \dots, \overset{o}{x}_n) \cdot (x_k - \overset{o}{x}_k) \\ \partial_k f(\overset{o}{x}) &= \lim_{x_k \rightarrow \overset{o}{x}_k} \frac{f(\overset{o}{x}_1, \dots, x_k, \dots, \overset{o}{x}_n) - f(\overset{o}{x})}{x_k - \overset{o}{x}_k} \\ &= \lim_{x_k \rightarrow \overset{o}{x}_k} \Delta_k(\overset{o}{x}_1, \dots, x_k, \dots, \overset{o}{x}_n) = \Delta_k(\overset{o}{x}) \end{aligned}$$

□

Vorsicht! Man kann also $\text{grad } f$ bzw. $D f$ ausrechnen, ohne zu wissen, ob es existiert!! Auch die **Kennzeichnung 2** der Diffbarkeit bei Funktionen mit einer Veränderlichen lässt sich übertragen:

$$f(x) = f(\overset{o}{x}) + \sum_{k=1}^n \Delta_k(x) \cdot (x_k - \overset{o}{x}_k) = f(\overset{o}{x}) + \sum_{k=1}^n \Delta_k(\overset{o}{x}) \cdot (x_k - \overset{o}{x}_k) + R(x)$$

mit R als Restglied

$$x \mapsto R(x) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k(x) - \Delta_k(\overset{o}{x})) \cdot (x_k - \overset{o}{x}_k)$$

für das gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|R(x)|}{|x - \overset{o}{x}|} &= \left| \left\langle \Delta(x) - \Delta(\overset{o}{x}), \frac{x - \overset{o}{x}}{|x - \overset{o}{x}|} \right\rangle \right| \stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} \underbrace{\left| \Delta(x) - \Delta(\overset{o}{x}) \right|}_{\substack{x \rightarrow \overset{o}{x} \\ \rightarrow 0}} \\ f(x) &= f(x) + \sum_{k=1}^n \Delta_k(\overset{o}{x}) x_k + R(x) \quad \text{mit} \quad \frac{R(x)}{|x - \overset{o}{x}|} \xrightarrow{x \rightarrow \overset{o}{x}} 0 \end{aligned}$$

für $m = 1$ gilt das Komponentenweise und man erhält die

Kennzeichnung:

Eine Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $\overset{o}{x} \in G$ **(total) diffbar**, wenn sie sich **linear approximieren** lässt, das heißt, wenn es eine Matrix der Form $A (= D f(\overset{o}{x})) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ existiert mit

$$f(x) = f(\overset{o}{x}) + A(x - \overset{o}{x}) + R(x)$$

mit einem Restglied $x \mapsto R$. Für dieses R gilt: $\lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} \frac{R(x)}{|x - \overset{o}{x}|} = 0$ das heißt $R(x) =$

$o(|x - \overset{o}{x}|)$ für $x \mapsto \overset{o}{x}$.

Wie kann man totale Diffbarkeit „einfach“ erkennen (für den Hausgebrauch)?

Ein Kriterium ist der

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Satz 5.1.3. Satz über die Erkennbarkeit der Diffbarkeit

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei in $\overset{o}{x} \in G$ stetig partiell diffbar. Dann ist sie auch in $\overset{o}{x}$ (total) diffbar

Beweis. Nach Voraussetzung existiert die partielle Ableitung $\partial_k f$ in einer würfelförmigen Umgebung U von $\overset{o}{x}$ und sind in $\overset{o}{x}$ stetig.

Für ein festes $x \in U \setminus \{\overset{o}{x}\}$ gilt dann

$$f(x) - f(\overset{o}{x}) = \sum_{k=1}^n \left(f(x_1, \dots, \boxed{x_k}, \overset{o}{x}_{k+1}, \dots, \overset{o}{x}_n) - f(x_1, \dots, \boxed{\overset{o}{x}_k}, \overset{o}{x}_{k+1}, \dots, \overset{o}{x}_n) \right)$$

Anwendung des 1 dimensionalen Mittelwertsatz auf diffbar partielle Abbildungen $t \mapsto (x_1, \dots, \overset{o}{x}_{k+1}, \dots, \overset{o}{x}_n)$ liefert jeweils ein $\bar{x}_k \in \overline{\overset{o}{x}_k x}$, sodass gilt:

$$f(x) - f(\overset{o}{x}) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x_1, \dots, \bar{x}_k, \overset{o}{x}_{k+1}, \dots, \overset{o}{x}_n) \cdot (x_k - \overset{o}{x}_k)$$

Für die Funktion

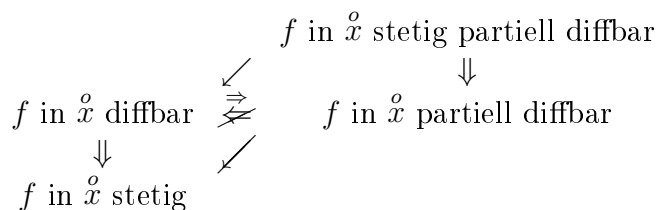
$$x \mapsto \Delta_k(x_1, \dots, x_n) := \partial_k f(x_1, \dots, \bar{x}_k, \overset{o}{x}_{k+1}, \dots, \overset{o}{x}_n)$$

folgt dann

$$\lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} \Delta_k(x) = \partial_k f(\overset{o}{x}),$$

da $\partial_k f$ in $\overset{o}{x}$ stetig und auch $\bar{x}_k(x) = \overset{o}{x}_k$ konvergent, wenn $x_k \rightarrow \overset{o}{x}_k$ geht. Also sind die Δ_k 's in $\overset{o}{x}$ stetig ergänzbar und f ist in $\overset{o}{x}$ total diffbar. $\square$

Zusammenfassung partielle Differentiation und totale Differentiation



Definition. $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt

p -mal (total) diffbar, wenn f selbst und partielle Ableitungen bis zur Ordnung p total diffbar sind

p -mal stetig diffbar, wenn die partiellen Ableitungen zusätzlich noch stetig sind

Satz 5.1.4. f in $\overset{o}{x}$ p -mal stetig diffbar $\Leftrightarrow f$ in $\overset{o}{x}$ p -mal stetig partiell diffbar.

Bezeichnung: $f \in C^p(G)$

Beispiel. $f(x, y, z) = e^{\cos(x^2 y z)} \sin(x \cdot y^{17})$ ist ∞ oft diffbar

Merkregel: Alle Abbildungen, denen man es ansieht, dass alle partiellen Ableitungen (zum Beispiel als elementare Funktionen) existieren und stetig sind, sind auch partiell diffbar.

C. Differentiationsregeln

Satz 5.1.5. Satz über Rechenregeln diffbarer Abbildungen

1. $f, g : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R}^m)$ seien in $\overset{\circ}{x} \in G$ diffbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls definiert) in $\overset{\circ}{x}$ diffbar mit den üblichen Rechenregeln für die partiellen Ableitungen.
2. Kettenregel

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{G} \subset \mathbb{R}^m$ sei in $\overset{\circ}{x} \in G$ diffbar sowie

$g : \tilde{G} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $\overset{\circ}{y} := f(\overset{\circ}{x}) \in \tilde{G}$

Dann ist auch $g \circ f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $\overset{\circ}{x}$ diffbar mit

$$D(g \circ f)(\overset{\circ}{x}) = Dg(f(\overset{\circ}{x}))Df(\overset{\circ}{x})$$

das heißt (vgl. Matrizenmultiplikation aus Lineare Algebra):

$$\begin{aligned} \forall_{i=1}^p \forall_{k=1}^n \partial_k (g \circ f)_i &= \sum_{j=1}^m (\partial_j g_j)(f(\overset{\circ}{x})) \partial_k f_j(\overset{\circ}{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (g \circ f)_i(\overset{\circ}{x}) &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(\overset{\circ}{x})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x}) \end{aligned}$$

Beispiel. Sei $(x, y) \mapsto f(x, y)$ diffbar. Dann gilt für Polarkoordinaten $(r, t) \mapsto (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) = g(r, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) \cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) \sin t \\ \frac{\partial g(r, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) (-r \cdot \sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) \cdot r \cdot \cos t \end{aligned}$$

Beweis.

1. wie üblich mit den Δ -Ungleichungen

- 2.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(\overset{\circ}{x}) + \Delta_1(x)(x - \overset{\circ}{x}) \\ g(y) &= g(\overset{\circ}{x}) + \Delta_2(y)(y - \overset{\circ}{y}) \end{aligned} \right\} \begin{cases} y = f(x) \\ \overset{\circ}{y} = f(\overset{\circ}{x}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(f(y)) &= g(f(\overset{\circ}{x})) + \Delta_2(f(x)) \cdot (f(x) - f(\overset{\circ}{x})) \\ &= g \circ f(\overset{\circ}{x}) + \underbrace{\Delta_2(f(x)) \cdot \Delta_1(x)}_{\Delta(x)} \cdot (x - \overset{\circ}{x}) \end{aligned}$$

hat

$$\lim_{x \rightarrow \overset{\circ}{x}} \Delta(x) = Dg(f(\overset{\circ}{x})) \cdot Df(\overset{\circ}{x}) = D(g \circ f)(\overset{\circ}{x})$$

□

D. Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

Satz 5.1.6. Satz von Schwarz

$f : g \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei in $\overset{o}{x} \in G$ 2 mal total diffbar. Dann sind die 2 partiellen Ableitungen in $\overset{o}{x}$ vertauschbar, das heißt, es gilt:

$$\forall_{k,l=1,\dots,n} \partial_l \partial_k f(\overset{o}{x}) = \partial_k \partial_l f(\overset{o}{x})$$

Beweis. Ohne Einschränkung gilt $m = 1$, $n = 2$ (da immer 2 Variablen betroffen sind) sowie $\overset{o}{x} = (0, 0)$. Wir zeigen also für eine in $(0, 0)$ 2 mal differenzierbare Funktion $(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$, dass $\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \partial_1 \partial_2 f(0, 0)$ ist.

Sei (x, y) mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ aus einer quadratischen Umgebung von $(0, 0)$ fest gewählt. Für die Funktion

$$t \in [0, 1] := g_1(t) = f(tx, y) - f(tx, 0) \in \mathbb{R}$$

$$t \in [0, 1] := g_2(t) = f(x, ty) - f(0, ty) \in \mathbb{R}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} g_1(1) - g_1(0) &= f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) \\ &= g_2(1) - g_2(0) \\ g'_1(t) &= [\partial_1 f(tx, y) - \partial_1 f(tx, 0)] \cdot x \\ &= [\partial_1 f(0, 0) + \Delta_{11}(tx, y) + \Delta_{12}(tx, y)y - \partial_1 f(0, 0) - \Delta_{11}(tx, 0)tx - 0] \\ &= [\Delta_{11}(tx, y) - \Delta_{11}(tx, 0)]tx^2 + \Delta_{12}(tx, y)xy \end{aligned}$$

mit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \Delta_{11}(x, y) = \partial_1 \partial_1 f(0, 0),$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \Delta_{12}(x, y) = \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$$

und analog

$$g'_2(t) = \Delta_{21}(x, ty)xy + [\Delta_{22}(x, ty) - \Delta_{22}(0, ty)]ty^2$$

mit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \Delta_{21}(x, y) = \partial_1 \partial_2 f(0, 0),$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \Delta_{22}(x, y) = \partial_2 \partial_2 f(0, 0)$$

Anwendung des Mittelwertsatzes (Satz 4.2.3) auf g_1, g_2 liefert:

$$g_1(1) - g_1(0) = g'_1(t_1) = g'_2(t_2) = g_2(1) - g_2(0)$$

mit $t_1, t_2 \in]0, 1[$. Speziell für $x = y (\neq 0)$ erhält man also Werte $t_1(x), t_2(x) \in]0, 1[$ mit

$$\begin{aligned} & [\Delta_{11}(t_1(x) \cdot x, x) - \Delta_{11}(t_1(x) \cdot x, 0)] \cdot t_1(x) + \Delta_{12}(t_1(x) \cdot x, x) \\ & \stackrel{!}{=} \Delta_{21}(x, t_2(x) \cdot x) + [\Delta_{22}(x, t_2(x) \cdot x) - \Delta(0, t_2(x) \cdot x)] t_2(x) \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow 0$ folgt daraus, da Δ_{jk} in $(0, 0)$ stetig und $t_1(x), t_2(x) \in]0, 1[$ beschränkt ist:

$$\begin{aligned} 0 + \Delta_{12}(0, 0) & \stackrel{!}{=} \Delta_{21}(0, 0) + 0 \\ \Rightarrow \partial_2 \partial_1 f(0, 0) & = \partial_1 \partial_2 f(0, 0) \end{aligned}$$

□

Folgerung. $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei p -mal diffbar ($p \geq 2$). Dann sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung p unabhängig von der Reihenfolge, das heißt für die Permutation $\pi \in S_0$ gilt:

$$\partial_{k_p} \dots \partial_{k_1} f = \partial_{k_{\pi(p)}} \dots \partial_{k_{\pi(1)}} f$$

5.2. Die Taylorschen Sätze

Ziel: Approximation einer Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von (o.E.) $\overset{o}{x} := o \in G$ durch Polynome (in n Variablen) etwa in der Darstellung

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{r=0}^p \sum_{k_r \dots k_1=1}^n a_{k_1 \dots k_r} \overbrace{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}}^{\text{Monom vom Grad } r} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x_k + \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l + \dots \\ &= a_0 + \langle a, x \rangle + x^T A x \end{aligned}$$

Der Grad von p sei die größte Zahl p , sodass ein Koeffizient $a_{k_1}, \dots, a_{k_p} \neq 0$ auftritt.

Die Koeffizienten $a_{k_1}, \dots, a_{k_r}$ können als **symmetrisch** angenommen werden, d.h. $a_{k_{\pi(1)}}, \dots, a_{k_{\pi(r)}} = a_{k_1}, \dots, a_{k_r}$ für jede Permutation $\pi \in S_p$. Notfalls ersetze man $a_{k_1}, \dots, a_{k_r}$ durch $\tilde{a}_{k_1 \dots k_r} = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in S_r} a_{k_{\pi(1)}} \dots a_{k_{\pi(r)}}$.

Beispiel. In $(x^T A x)^T = x^T A^T x$ kann A notfalls auch durch $\tilde{A} := \frac{1}{2}(A + A^T)$ ersetzt werden.

Unter dieser Symmetrievoraussetzung kann man mit vollständiger Induktion zeigen:

$$\partial_{l_1} \dots \partial_{l_r} p(0) := \partial_{l_r} \dots \partial_{l_1} p(0) = r! a_{l_1 \dots l_r}$$

und man erhält:

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Satz 5.2.1. Satz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen des p -ten Taylorpolynoms

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $0 \in G$ p -mal diffbar ($p \in \mathbb{N}_0$). Dann gibt es genau ein Polynom $x \mapsto T_p(x)$ höchstens vom Grade p mit

$$\forall_{r=0}^p \forall_{l_1, \dots, l_r=1}^n \partial_{l_1 \dots l_r} T_p(0) = \partial_{l_1 \dots l_r} f(0)$$

nämlich

$$x \mapsto T_p(x) := \sum_{r=0}^p \frac{1}{r!} \sum_{k_1 \dots k_r=1}^n \partial_{k_1 \dots k_r} f(0) x_{k_1} \dots x_{k_r}$$

genannt p -tes Taylorpolynom von f im Punkte 0

Bemerkung. Bei Entwicklung um einen anderen, beliebig gewählten Punkt $\overset{o}{x} \neq 0$ ersetze man die 0 einfach durch $\overset{o}{x}$ und x_{k_j} durch $x_{k_j} - \overset{o}{x}_{k_j}$

Zur Gestalt des Restgliedes $R_p = f - T_p$:

Sei zunächst f in $U_r(0)$. Gilt dann für die Funktion

$$g : t \in [0, 1] \mapsto g(t) := f(tx) \in \mathbb{R}$$

nach der Kettenregel

$$g'(t) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(tx) \cdot x_k$$

$$g''(t) = \sum_{k,l=1}^n \partial_l \partial_k f(tx) \cdot x_k \cdot x_l$$

und so weiter bis schließlich

$$\forall_{r=0}^{p+1} g^{(r)}(t) = \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^n \partial_{k_1} \dots \partial_{k_r} f(tx) \cdot x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_r}$$

Anwendung des 1 dimensionalen Taylorsatzes **1.Form** (Satz 4.4.2) auf g liefert

$$g(1) = \sum_{r=0}^p \frac{1}{r!} g^{(r)}(0) \cdot 1^r + \frac{1}{(p+1)!} \cdot g^{(p+1)}(\theta) \cdot 1^{p+1} \quad \text{mit } \theta \in]0, 1[$$

Satz 5.2.2. Taylorscher Satz, 2. Form

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $U_\delta(0)$ von $0 \in G$ $(p+1)$ -mal diffbar. Dann gibt es zu jedem $x \in U_\delta(0)$ ein $\theta \in]0, 1[$ mit

$$f(x) = T_p(x) + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1 \dots k_{p+1}=1}^n \partial_{k_1 \dots k_{p+1}} f(\theta x) x_{k_1} \dots x_{k_{p+1}}$$

(Lagrangesche Form des Restgliedes)

Bemerkung.

1. für $\overset{o}{x} \neq 0$ ersetze man wieder 0 durch $\overset{o}{x}$ und x_{k_j} durch $x_{k_j} - \overset{o}{x}_{k_j}$ und θx durch $\bar{x} = \overset{o}{x} + \theta(x - \overset{o}{x})$.

2. Für $p = 0$ erhält man den Mittelwertsatz

$$f(x) = f(x_0) + \langle \text{grad } f(\bar{x}), x - \overset{o}{x} \rangle$$

mit $\bar{x} = \overset{o}{x} + \theta(x - \overset{o}{x})$ und $\theta \in]0, 1[$

Sei jetzt f nur in $x = 0$ $p + 1$ mal diffbar. Dann ist

$$x \mapsto R(x) := f(x) - T_{p+1}(x)$$

sowie f in $U_r(0)$ noch p -mal diffbar und Satz 5.2.2 liefert mit $\theta_x \in]0, 1[$:

$$R(x) = 0 + \frac{1}{p!} \sum_{k_1, \dots, k_p} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_p} R(\theta_x \cdot x) \cdot x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_p}$$

Da alle $\partial_{k_1} \dots \partial_{k_p} R$ in $x = 0$ nochmal diffbar sind, gilt nach Definition der Diffbarkeit:

$$\partial_{k_1} \dots \partial_{k_p} R(x) = 0 + \sum_{k=1}^n \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_p}(x) \cdot x_k$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_p}(x) = \partial_{k_1} \dots \partial_{k_p} R(0) \stackrel{!}{=} 0$$

zusammen folgt:

$$R(x) = \frac{1}{p!} \sum_{k_1, \dots, k_p} \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_p} (\theta_x \cdot x) \theta_x \cdot x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_{p+1}}$$

und

$$\begin{aligned} R_p(x) &= f(x) - T_p(x) = R(x) + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1, \dots, k_{p+1}} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_{p+1}} f(0) \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{p+1} \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1, \dots, k_{p+1}} \underbrace{[(p+1) \cdot \tilde{\Delta}_{k_1} \dots \tilde{\Delta}_{k_{p+1}}(\theta_x x) \theta_x + \theta_{k_1} \dots \theta_{k_{p+1}} f(0)]}_{\Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_{p+1}}(x)} \cdot x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_{p+1}} \end{aligned}$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_{k_1} \Delta_{k_{p+1}}(x) = 0 + \partial_{k_1} \dots \partial_{k_{p+1}} f(0),$$

da $\tilde{\Delta}$ in 0 stetig ist mit $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{\Delta}(x) = 0$ und $\theta_x \in]0, 1[$ beschränkt ist.

Ergebnis:

Satz 5.2.3. Taylorscher Satz, 1. Form

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $0 \in G$ $(p+1)$ -mal diffbar. Dann gibt es eine stetige Funktionen $\Delta_{k_1 \dots k_{p+1}} : U_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad f(x) = T_p(x) + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1 \dots k_{p+1}=1}^n \Delta_{k_1 \dots k_{p+1}}(x) x_{k_1} \dots x_{k_{p+1}}$$

$$(2) \quad \Delta_{k_1 \dots k_{p+1}}(0) = \partial_{k_1 \dots k_{p+1}} f(0)$$

Bemerkung. Für $p = 0$ erhält man die Definition der Diffbarkeit zurück

Aus der Taylorformel erhält man noch

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{p+1}(x) + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1, \dots, k_{p+1}} (\Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_{p+1}}(x) - \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_{p+1}}(0)) \cdot x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_{p+1}} \\ &= T_{p+1}(x) + R_{p+1}(x) \text{ mit:} \\ 0 &\leq \frac{|R_{p+1}(x)|}{|x|^{p+1}} \leq \frac{1}{(p+1)!} \underbrace{\left| \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_{p+1}}(x) - \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_{p+1}}(0) \right|}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{|x_{k_1}|}{|x|}}_{\leq 1} \dots \underbrace{\frac{|x_{k_{p+1}}|}{|x|}}_{\leq 1} \end{aligned}$$

$$\text{also } \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{R_{p+1}(x)}{|x|^{p+1}} = 0$$

Übergang $p+1 \rightarrow p$ liefert:

Folgerung. $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $0 \in G$ p mal diffbar. Dann gilt:

$$f(x) = T_p(x) + \mathcal{O}(|x|^p) \quad x \rightarrow 0$$

Spezialfälle $p = 1$ bei beliebigen Entwicklungspunkt $\overset{\circ}{x}$: Mit dem Gradienten

$$\text{grad } f(x) = (\partial_k f(x))_{k=1, \dots, n}$$

und der **Hesse-Matrix** (die Symmetrisch, falls f in x 2 mal diffbar ist)

$$H_f = (\partial_l \partial_k f(x))_{k, l=1, \dots, n}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(\overset{\circ}{x}) + \langle \text{grad } f(\overset{\circ}{x}), x - \overset{\circ}{x} \rangle + \frac{1}{2} \left((x - \overset{\circ}{x})^T \Delta(\overset{\circ}{x}) \cdot (x - \overset{\circ}{x}) \right) \\
 \text{wobei } \Delta(\overset{\circ}{x}) &= H_f(\overset{\circ}{x}) \\
 &= f(\overset{\circ}{x}) + \langle \text{grad } f(\overset{\circ}{x}), x - \overset{\circ}{x} \rangle + \frac{1}{2} (x - \overset{\circ}{x})^T H_f(\bar{x}) \cdot (x - \overset{\circ}{x}) \\
 \text{mit } \bar{x} &= \overset{\circ}{x} + \theta(x - \overset{\circ}{x}), \text{ wobei } \theta \in]0, 1[\\
 &= f(\overset{\circ}{x}) + \langle \text{grad } f(\overset{\circ}{x}), x - \overset{\circ}{x} \rangle + \frac{1}{2} (x - \overset{\circ}{x})^T H_f(0) (x - \overset{\circ}{x}) + \mathcal{O}(|x - \overset{\circ}{x}|)
 \end{aligned}$$

5.3. Lokale Extrema

Definition. Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in $\overset{\circ}{x}$ ein **lokales Minimum**, wenn die Umgebung von $U \subset D$ um $\overset{\circ}{x}$ existiert und außerdem gilt:

$$\forall_{x \in U} f(x) \geq f(\overset{\circ}{x})$$

Analog folgt das lokale Maximum wobei hier natürlich das $\geq$ mit dem $\leq$ ersetzt werden muss.

Wichtig: Lokale Extrema können nur in Innenpunkten $\overset{\circ}{x} \in \overset{\circ}{D}$ auftreten, niemals in Randpunkten.

Satz 5.3.1. Satz der notwendigen Bedingungen für lokale Extrema

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung von $\overset{\circ}{x} \in G$ diffbar.. Dann gilt:
 f besitzt in $\overset{\circ}{x}$ ein lokales Extrema $\Rightarrow \text{grad } f(\overset{\circ}{x}) = 0$

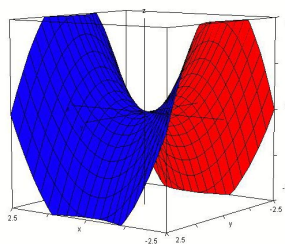
Beweis. f besitzt in $\overset{\circ}{x}$ ein lokales Extremum $\Rightarrow$ jede partielle Funktion $x \mapsto f(\overset{\circ}{x}_1, \dots, x_k, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ mit $k = 1, \dots, n$ besitzt in $\overset{\circ}{x}_k$ ein lokales Extremum $\Rightarrow \partial_k f(\overset{\circ}{x}) = 0, k = 1, \dots, n.$ $\square$

Bemerkung.

1. Beim Beweis wird an sich nur die partielle Diffbarkeit benötigt
2. Punkte x mit $\text{grad } f(x) = 0$ heißen auch **stationäre Punkte** oder **kritische Punkte** von f . Sie sind „Kandidaten“ für lokale Extrema!
 Geometrische Bedingung ist also, dass die **Tangentialhyperebene** horizontal ist
3. Die Bedingung ist **nicht hinreichend!**

Beispiel. $f(x, y) = x^2 - y^2$. Es gilt $\text{grad } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber es gilt: $\forall_{x \neq 0} f(x, 0) > 0 \cap \forall_{y \neq 0} f(0, y) < 0$, der Graph ist ein **Hyperbolischer Paraboloid** mit einer **Sattelfläche**.

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen



Hinreichende Bedingung für lokale Extrema findet man mit Hilfe der „2. Ableitung“, der **Hesse-Matrix** $H_f(\partial_l \partial_k f)_{l,k=1,\dots,n}$. Sie besitzt kein „Vorzeichen“ als Ersatz dient die **Definitheit**

Definition. Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. sie definiert eine quadratische Form

$$q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q_A(x) := x^T A x = \sum_{j,k} a_{jk} x_j x_k$$

positiv definit, falls $q_A = x^T A x > 0$ für $x \neq 0$

negativ definit, falls $q_A = x^T A x < 0$ für $x \neq 0$

positiv semidefinit, falls $q_A = x^T A x \geq 0 \quad \forall x$

negativ semidefinit, falls $q_A = x^T A x \leq 0 \quad \forall x$

indefinit falls $y, z \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $q_A(y) = y^T A y < 0 < z^T A z = q_A(z)$

Satz 5.3.2. Satz über lokale Extrema

$f : g \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $\overset{\circ}{x}$ 2 mal diffbar mit $\text{grad } f(\overset{\circ}{x}) = 0$. Dann gilt also mit der Hesse-Matrix $H_f(\overset{\circ}{x})$

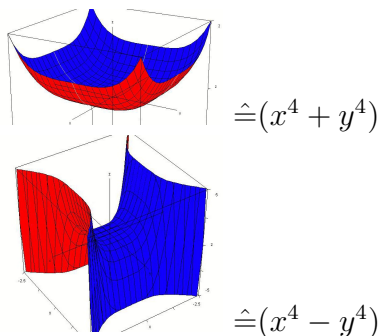
- (a) $H_f(\overset{\circ}{x})$ **positiv (negativ) definit** $\Rightarrow f$ besitzt in $\overset{\circ}{x}$ ein (strenges) lokales Minimum (Maximum)
- (b) $H_f(\overset{\circ}{x})$ **indefinit** $\Rightarrow f$ besitzt in $\overset{\circ}{x}$ **kein** lokales Extremum
- (c) $H_f(\overset{\circ}{x})$ echt **indefinit** $\Rightarrow$ kann man keine Aussage treffen

Beispiel.

$$f(x, y) = x^4 \pm y^4 \Rightarrow \text{grad } f(0, 0) = 0, \quad H_f(0, 0) = 0 \quad (\text{echt semidefinit})$$

Keine Entscheidung möglich.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^4 + y^4 & \Rightarrow (0, 0) \text{ lokales Min.} \\ f(x, y) = x^4 - y^4 & \Rightarrow (0, 0) \text{ Sattelpunkt} \end{cases}$$



Beweis. Sei ohne Einschränkung $\overset{o}{x} = 0$.

- (a) nach dem Taylorschen Satz (Satz 5.2.3) gilt $f(x) = f(0) + 0 + x^T H_f(0)x + R(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{|x|^2} = 0$. Falls $H_f(0)$ **positiv definit** ist, nimmt die **stetige** Funktion $y \mapsto y^T H_f(0)y$ auf der **kompakten Sphäre** $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ ein positives Minimum $m > 0$ an.
Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{|x|^2} = 0$ existiert eine Umgebung U von 0 mit

$$\forall_{x \in \overset{o}{U}} \frac{|R(x)|}{|x|^2} < \frac{m}{2}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \forall_{x \in \overset{o}{U}} |R(x)| &< \frac{1}{2} m |x|^2 \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left[\left(\frac{x}{|x|} \right)^T H_f(0) \left(\frac{x}{|x|} \right) \right]}_{\geq m} \cdot |x|^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^T H_f(0) \cdot x \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} x^T H_f(0)x + R(x) &> 0 \\ \text{das hei\ss t } f(x) &> f(0). \end{aligned}$$

Es liegt also ein **lokales Minimum** vor.

- (b) Nach Voraussetzung existiert $y, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $y^T H_f(0)y < 0 < z^T H_f(0)z$. F\u00fcr die Funktion $g_1 : t \mapsto f(t \cdot y)$ gilt dann in $U_\delta(0)$:

$$g'_1 = \sum_k \partial_k f(t \cdot y) \cdot y_k = \langle \text{grad } f(ty), y \rangle,$$

also

$$g'_1(0) = 0$$

und

$$g''_1(t) = \sum_{k,l} \partial_l \partial_k f(ty) \cdot y_k \cdot y_l = y^T H_f(ty) y,$$

also

$$g''_1(0) = y^T H_f(0)y < 0$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Also besitzt g_1 in $t = 0$ (das heißt auch $x = 0$) ein **strenges lokales Minimum**. Also kann f selbst in $x = 0$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzen.

□

Wie erkennt man die **definitheit** einer Matrix?

(1) **Möglichkeit** aus der Linearen Algebra:

Symmetrische $(n \times n)$ sind **reell diagonalisierbar**, **genauer**: Es existiert eine **Orthonormalbasis (ONB)** $(e_1, \dots, e_n)$ aus **Eigenvektoren (EV)** zu **Eigenwerten (EW)** $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (das heißt $A \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i$ ($i = 1, \dots, n$)))

Satz 5.3.3. Satz der Definitheit

Eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann

- **positiv definit**, wenn **alle Eigenwerte (EW)** positiv sind
- **negativ definit**, wenn **alle EW** negativ sind
- **positiv semidefinit**, wenn $\text{EW} \geq 0$ sind
- **negativ semidefinit**, wenn $\text{EW} \leq 0$ sind
- **indefinit**, wenn sowohl positive als auch negative EW existieren

Beweis.

Bezüglich einer ONB-Darstellung $x = \sum \zeta_i e_i$ mit **Eigenvektoren (EV)**

$$\begin{aligned} x^T A x &= \langle x, A x \rangle = \sum_{i,k} \zeta_i \zeta_k \langle e_i, A e_k \rangle \\ &= \sum_{i,k} \zeta_i \zeta_k \lambda_k \underbrace{\langle e_i, e_k \rangle}_{\delta_{ik}} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \zeta_k^2 \\ &= x^T A x \end{aligned}$$

Daraus ist **alles** ablesbar!

□

(2) **Möglichkeit** Betrachtung der k -reihigen **Hauptdeterminanten** und **Unterdeterminanten**

Satz 5.3.4. Kriterium von Hurwitz

Eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann **positiv definit**, wenn

$$\forall_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

ist. Dann folgt, A ist **negativ definit**, wenn $-A$ positiv definit ist.

Beweis. nur für $n = 2$, der Rest ist Thema für die Lineare Algebra.

Für $a_{11} \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} q_A(x) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 \right)^2 + \frac{1}{a_{11}} \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{\det A} x_2^2 \end{aligned}$$

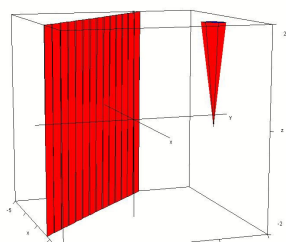
$$„\Rightarrow“ \quad A \text{ positiv definit} \Rightarrow a_{11} = q_A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) > 0, \det A = \frac{1}{a_{11}} q_A \left(\begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \end{pmatrix} \right) > 0$$

$$„\Leftarrow“ \quad a_{11} > 0, \det A > 0 \Rightarrow \forall_{x \neq 0} q_A(x) > 0, \text{ denn } x_2 = 0 \Rightarrow q_A = a_{11}x_1^2, \quad x_2 \neq 0 \Rightarrow q_A(x) \geq \frac{1}{a_{11}} \det A x_2^2$$

□

Beispiel.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9x \cdot y + 27$$



Der kritische Punkt ist bei:

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 9y \\ 3y^2 - 9x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$$

Es folgt also

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

1. $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Hurwitz-Kriterium (Satz 5.3.4) nicht brauchbar, da $\det H_f = 0$. Also verwenden wir Satz 5.3.3. Bestimmung der Eigenwerte von $A := H_f$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 9^2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \pm 9$$

H_f ist damit also identifiziert und in $(0,0)$ liegt kein lokales Extremum vor.

2. $H_f(3,3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$ Nach dem Satz von Hurwitz ist H_f in diesem Punkt positiv definit, somit liegt in $(3,3)$ ein lokales Minimum vor.

Ergänzungen: Die Suche nach **absoluten Extrema** (**globalen Extrema**) ist im allgemeinen schwierig.

Gegeben: $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, im inneren $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$ 2 mal diffbar.

1. Fall: $\mathbb{D}$ **ist kompakt** Dann existiert nach dem Satz 4.2.4 Maxima und Minima. Die Extrema können

(a) Im **inneren** $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$ angenommen werden. Dann sind es auch lokale Extrema und können demnach mit Hilfe der Differentialrechnung **eventuell!** gefunden werden.

(b) auf dem Rand $\partial\mathbb{D}$. Dann sind es sogenannte **Randextrema** und können durch gesonderte Untersuchungen gefunden werden.

Rezept: Bestimmung **aller** kritischen Punkte in $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$ und **aller** Randextrema. Der kleinste Wert liefert das **absolute Minimum** und der größte Wert das **absolute Maximum**.

2. Fall $\mathbb{D}$ **ist nicht kompakt** Dann brauchen überhaupt keine absoluten Extrema zu existieren, können aber! Es existiert allerdings kein Rezept zur Bestimmung!

Beispiel. f wie in der letzten Funktion, $D = \mathbb{R}^2$. In $(3,3)$ liegt ein lokales Minimum vor mit $f(3,3) = 0$. Es gilt aber

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x,0) = x^3 + 27 \rightarrow \pm\infty$$

Es gibt kein absolutes Maximum oder Minimum.

5.4. Lokale Umkehrsätze

Gegeben: $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$, ohne Einschränkung surjektiv (setze $B := f[G]$)

Frage:

Unter welchen Voraussetzungen ist f **invertierbar** (**umkehrbar**)?

Existiert also ein $f^{-1} : B \rightarrow G$?

Ist mit f auch f^{-1} diffbar?

was ist $(Df^{-1})(x)$?

Für $n = 1$ ist das Problem weitestgehend gelöst:

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall I diffbar mit

$$\forall_{x \in I} f'(x) \neq 0 \Rightarrow f \text{ ist streng Monoton}$$

$\Rightarrow f$ ist injektiv mit $J := f[I]$ wieder ein offenes Intervall

$\Rightarrow$ eine $f^{-1} : J \rightarrow I$, die nach Satz 2.4.13 stetig und nach Satz 4.1.3 (Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion) sogar diffbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Bei $n > 1$ ist die Antwort schwieriger, weil es keinen Monotoniebegriff wie bei $n = 1$ gibt.

Beispiel.

$$\begin{aligned} f : G :=]0, \infty[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (r, t) &\mapsto f(r, t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)^T \end{aligned}$$

ist **surjektiv und diffbar**. Die Funktionsmatrix

$$D f(r, t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}$$

ist überall wegen

$$\forall_{(r,t) \in G} \det D f(r, t) = r \neq 0 \text{ definiert.}$$

Trotzdem ist f nicht injektiv

$$f(r, t + 2\pi) = f(r, t).$$

Aber f ist **lokal** invertierbar, das heißt jeder Punkt $(r_0, t_0) \in G$ besitzt eine Umgebung U , etwa $U :=]0, \infty[\times]t_0 - \pi, t_0 + \pi[$, sodass $f|_U$ bijektiv ist.

$$V := f[U] = \text{„geschlitzte Ebene“}.$$

A. Die Operatornorm

Matrizen $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ konnte man bisher als $(m; n)$ Tupel $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ auffassen. Damit waren definiert:

- **Normen** $|A|$, zum Beispiel $|A|_2, |A|_1, \dots, |A|_\infty$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

- **Umgebung** $U_k(A_0) : \{A \in M(m \times n, \mathbb{R}) \mid |A - A_0| < \varepsilon\}$
- **Konvergenz**, zum Beispiel $\lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} \Delta(x) = Df(\overset{o}{x})$
- **Stetigkeit**, etwa von Abbildungen $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \Delta(x) \in M(m \times n, \mathbb{R})$
 $\Leftrightarrow$ **komponentenweise Konvergenz** (Stetigkeit)

Nachteile dieser Äquivalenznormen:

- Sie berücksichtigen nicht, dass Matrizen A lineare Operatoren $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow A \in \mathbb{R}^m$ sind ($M(m \times n, \mathbb{R}) \cong L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$)
- Sie sind nicht Erweiterbar auf andere Abbildungsräume

Deshalb:

Satz 5.4.1. Satz der Operatornorm

In dem VR $M(m \times n, \mathbb{R})$ wird durch

$$\|A\| := \max\{|A \cdot x| \mid |x| = 1\}$$

ein Norm definiert, genannt die **Operatornorm**. Diese hat die Eigenschaften:

- (a) $\forall_{x \in \mathbb{R}} |A \cdot x| \leq \|A\| \cdot |x| \quad \forall_{A \in M(m \times n, \mathbb{R})}$
- (b) $\|B \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \quad \forall_{A \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall_{B \in M(p \times m, \mathbb{R})}$
- (c) $\|E - A\| < 1 \Rightarrow A$ **regulär** $\forall_{A \in M(m \times n, \mathbb{R})}$

(im $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ werden jeweils die euklidischen Normen verwendet)

Beweis. Existenz: Die stetige Funktion $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow |Ax| \in \mathbb{R}$ nimmt auf der kompakten Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ ihr Maximum an. Also ist $\|A\|$ wohl definiert und Normeigenschaften sind leicht zu überprüfen:

Eigenschaften

(a) $\forall_{x \neq 0} |A \cdot x| = \left| A \frac{x}{|x|} \right| \cdot |x| \leq \|A\| |x|$

(b)

$$\begin{aligned} \forall_x |(B \cdot A)x| &= |B(Ax)| \stackrel{(a)}{\leq} \|B\| |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| |x| \\ &\Rightarrow \forall_{|x|=1} |(B - A) \cdot x| \leq \|B\| \cdot \|A\| \\ &\Rightarrow \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

(c) A nicht regulär $\Rightarrow$ es existiert ein $x \neq 0$ mit $A \cdot x = 0$. Für ein solches x gilt dann

$$(E - A) \cdot x = x \Rightarrow (E - A) \frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow \|E - A\| \geq \left| (E - A) \frac{x}{|x|} \right| = 1$$

Diese Operatornorm $\|A\|$ ist mit der euklidischen Norm $|A|$ (und damit auch mit $|A|_1, \dots, |A|_\infty$) verträglich. □

Satz 5.4.2. Satz über Konvergenz und Stetigkeit bei der Operatornorm

Im Matrizenraum $M(m \times n, \mathbb{R})$ liefern die Operatornorm und die euklidische Norm dieselben Umgebungssysteme und damit denselben Konvergenz- und Stetigkeitsbegriff

Beweis.

(a) Wir müssen $\|A\|$ und $|A|$ gegeneinander abschätzen.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ mit Zeilensystem $a_i \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall_x A \cdot x &= \begin{pmatrix} \langle a_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \end{pmatrix} \Rightarrow \forall_x |A \cdot x|^2 \\ &= \sum_{j=1}^m |\langle a_j, x \rangle|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right) |x|^2 \\ &= |A|^2 \cdot |x|^2 \\ \Rightarrow \forall_{|x|=1} |A \cdot x|^2 &\leq |A| \\ \Rightarrow \|A\| &\leq |A| \end{aligned}$$

(b) Für die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \forall_{k=1}^n |A \cdot e_k|^2 &= \sum_{j=1}^m \leq \|A\|^2 \\ \Rightarrow |A| &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}^2 \right) \leq n \cdot \|A\|^2 \\ \Rightarrow |A| &\leq \sqrt{n} \cdot \|A\| \end{aligned}$$

□

Zusammen: Jede Umgebung bezüglich $\|\cdot\|$ ist auch Umgebung bezüglich $|\cdot|$.
Aus dem Mittelwertsatz vektorwertiger Funktionen (Übung 52) folgt:

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= g'(\bar{x})(b - a) \\ \Rightarrow |g(b) - g(a)| &\leq |g'(\bar{x})| (b - a) \end{aligned}$$

für $[a, b]$ stetige Funktionen in $]a, b[$ diffbare Abbildung $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ lässt sich folgender wichtiger Satz ableiten:

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Satz 5.4.3. Satz über die Abschätzungs Vektorwertiger Funktionen

Für eine diffbare Abbildung $f : U_r(\overset{o}{x}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

Existiert eine Konstante $M > 0$ mit

$$\forall_{x \in U_\delta(\overset{o}{x})} \|D f(x)\| \leq M,$$

so ist auch

$$\forall_{x,y \in U_\delta(\overset{o}{x})} |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

Beweis.

Zu $x, y \in U_\delta(\overset{o}{x})$ betrachte man die Abbildung

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\mapsto g(t) := f(x + t(y - x)) \in \mathbb{R}^m \text{ mit} \\ \forall_{0 < t < 1} g'(t) &= D f(x + t(y - x)) \cdot (y - x) \quad [\text{Kettenregel}] \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \forall_{0 < t < 1} |g'(t)| &= |D f(x + t(y - x)) \cdot (y - x)| \leq \|D f(x + t(y - x))\| \cdot |y - x| \\ &\leq M \cdot |y - x| \end{aligned}$$

der obige Mittelwertsatz liefert:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |g(1) - g(0)| \leq |g'(t)| \cdot |1 - 0| \\ &\leq M \cdot |y - x| \end{aligned}$$

Der Satz gilt auch bei beliebigen streng konvexen Definitionsbereichen $\mathbb{D}$, wenn f in $\overset{o}{\mathbb{D}}$ diffbar ist.

$$\begin{aligned} \forall_{x \in D} \|D f(x)\| &\leq M \\ \Rightarrow \forall_{x,y} |f(y) - f(x)| &\leq M \cdot |y - x| \end{aligned}$$

□

B. Der Banachsche Fixpunktsatz

Im Folgenden sei X ein **vollständig normierter Raum (Banach Raum)**, das heißt also, jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiele.

- $\mathbb{R}^n$ bezüglich $|\cdot|_2, |\cdot|_1, \dots, |\cdot|_\infty$
- $M(m \times n, \mathbb{R})$ $|\cdot|_2, \|\cdot\|$
- $C(K)$ bezüglich $\|f\| := \max\{|f(x)| \mid x \in K\}$

Satz 5.4.4. Banachscher Fixpunktsatz

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines **Banach-Raumes** X und $f : A \rightarrow A$ eine kontrahierende Selbstabbildung, das heißt es gilt:

$$\forall_{x,y \in A} \quad |f(y) - f(x)| \leq L |y - x| \quad (5.2)$$

mit einer Konstanten $L \in [0, 1[$. Dann besitzt f in A genau einen **Fixpunkt** $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Man erhält als Grenzwert für jede durch

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad x_{k+1} = f(x_k) \quad (5.3)$$

rechnerisch gebildeten Folge bei **beliebigen Startwert** $x_0 \in A$ und es gilt die Abschätzung

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad |x_k - \bar{x}| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

Bemerkung.

1. Abbildungen mit den Eigenschaften 5.2 (aber $L \geq 0$ beliebig) heißen auch **lokal Lipschitz-Stetig**. Die Zahl L heißt demnach eine **Lipschitzkonstante**
2. L -stetige Abbildungen sind auch **stetig** (zu $\varepsilon > 0$ kann man ein $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ wählen, falls $L \neq 0$). Die Umkehrung ist im allgemeinen **nicht** richtig.
3. Der Fixpunktsatz gilt auch in **vollständig metrischen Räumen**

Beweis.

Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \bar{x}, \quad f(\bar{y}) = \bar{y} \\ \Rightarrow |f(\bar{y}) - f(\bar{x})| &= |\bar{y} - \bar{x}| \\ &\leq L_{L < 1} |\bar{y} - \bar{x}| \\ \Rightarrow \bar{x} &= \bar{y} \end{aligned}$$

Existenz Sei $x_0 \in A$ beliebig, Wegen $f[A] \subset A$ wird durch 5.3 eine Folge $(x_k \in A)_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert. Wir zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge bildet.

Zunächst gilt $\forall_{x,y \in A}$:

$$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x| \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow |f^2(y) - f^2(x)| \leq |f(y) - f(x)| \leq L^2 |y - x| \quad (5.5)$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

und mittels vollständiger Induktion:

(5.6)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \left| f^k(y) - f^k(x) \right| \leq L^k |y - x| \quad (5.7)$$

Daraus folgt für beliebige $j, k \in \mathbb{N}$

(5.8)

$$|x_{k+j} - x_k| \leq \left| f^k(x_j) - f^k(x_0) \right| \stackrel{5.7}{\leq} L^k |x_j - x_0| \quad (5.9)$$

$$\leq L (|x_j - x_{j-1}| + |x_{j-1} - x_{j-2}| + \dots + |x_1 - x_0|) \quad (5.10)$$

$$= L^k \left(|f^{j-1}(x_1) - f^{j-1}(x_0)| + \dots + |x_1 - x_0| \right) \quad (5.11)$$

$$\stackrel{5.7}{\leq} L^k (L^{j-1} + L^{j-2} + \dots + L + 1) \cdot |x_1 - x_0| \quad (5.12)$$

$$= L^k \frac{1 - L^j}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0| \quad (5.13)$$

$$\stackrel{5.7}{\leq} \frac{L^k}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0| \quad (5.14)$$

Wegen $(L^k) \rightarrow 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\forall_{k \geq m, j \in \mathbb{N}}$ gilt: $L^k \leq \frac{1-L}{|x_1-x_0|} \cdot \varepsilon$ also $|x_{k+j} - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$ (und das ist auch richtig für $x_1 = x_0$). $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge, die wegen vollständiger Induktion von x einen Grenzwert $\bar{x} \in X$ besitzt. Da $\forall_k x_k \in A$ und A abgeschlossen ist, ist sogar $\bar{x} \in A$. Aus der Rekursionsformel $x_{k+1} = f(x_k)$ folgt, da f stetig ist, dass $\bar{x} = f(\bar{x})$ ist, das heißt $\bar{x}$ ist ein **Fixpunkt** von f . Grenzübergang $j \rightarrow \infty$ in 5.14 liefert noch die Abschätzung:

$$|\bar{x} - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|$$

□

C. Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz 5.4.5. Satz über die lokale Umkehrbarkeit

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig diffbar und $\overset{\circ}{x} \in G$ ein Punkt mit regulärer Funktionalmatrix $D f(\overset{\circ}{x})$. Dann gilt:

- (a) f ist **lokal** um $\overset{\circ}{x}$ **invertierbar**, das heißt, es existieren **offene Umgebungen** U von $\overset{\circ}{x}$ und V von $f(\overset{\circ}{x})$, sodass $f|_U : U \rightarrow V$ eine Bijektion ist.
- (b) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ ist ebenfalls stetig diffbar mit

$$\forall_{y \in V} D f^{-1}(y) = (D f(f^{-1}(y)))^{-1}$$

Beweis.

- (a) Wir können annehmen, dass $\overset{\circ}{x}=0, \overset{\circ}{y}=f(\overset{\circ}{x})=0$, ansonsten wählt man den Übergang $x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x + \overset{\circ}{x}) - f(\overset{\circ}{x})$, sowie dass $D f(\overset{\circ}{x}) = E$. Ansonsten wählt man den Übergang: $x \mapsto \tilde{f}(x) = D f(0)^{-1} : f(x)$. Dann ist wirklich $D \tilde{f}(0) = D f(0)^{-1} : D f(0) = E$.

Offenbar gilt f ist bijektiv/diffbar $\Leftrightarrow \tilde{f}$ bijektiv/diffbar.

1. **Ziel:** Auflösung der Gleichung $f(x) = y$ nach x in der Umgebung von 0.

Methode: Transformation auf ein Fixpunkt-Problem:

Für ein festes $y \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir die Abbildung

$$x \in G \mapsto g_y(x) := x - f(x) + y \in \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft: $g_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Da $x \mapsto D_{g_y}(x) = E_D f(x)$ stetig ist und f C^1 diffbar ist. Mit $D_{g_y}(0) = 0$ gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{U_{2r}(0)} \subset G$, sodass

$$\forall_{x \in \overline{U_{2r}(0)}} \|D_{g_y}(x)\| = \|E - D f(x)\| \leq \frac{1}{2} (=:\varepsilon)$$

uns somit nach Satz 5.4.3

$$\forall_{x, x' \in \overline{U_{2r}(0)}} |g_y(x) - g_y(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'| \quad (5.15)$$

g_y ist also kontrahierend mit L -konstante $L = \frac{1}{2}$. Speziell für $y \in U_r(0)$ gilt weiter

$$\forall_{x, x' \in \overline{U_{2r}(0)}} |g_y(x)| \leq |g_y(x) - g_y(0)| + |y| \leq \frac{1}{2} |x + y| \leq 2r \quad (5.16)$$

das heißt, $\overline{U_{2r}(0)} \rightarrow \overline{U_{2r}(0)}$ ist eine Selbstabbildung abgeschlossener Teilmengen.

Nach dem Fixpunktsatz (Satz 5.4.4) besitzt also jedes solcher g_y einen Fixpunkt $x \in \overline{U_{2r}(0)}$, der wegen Gleichung 5.16 sogar im Inneren von $U_{2r}(0)$ liegt. Zu jedem $y \in U_r(0)$ gibt es also genau ein $x \in U_{2r}(0)$ mit $f(x) = y$.

Setze $V := U_r(0)$ (offen) und $U := \underbrace{f^{-1}[V]}_{\text{offen}} \cap \underbrace{U_{2r}(0)}_{\text{offen}}$. Dann ist $f^{-1} : V \rightarrow U$

definiert.

2. $f^{-1} : V \rightarrow U$ ist stetig. Für $y, y' \in V$ und $x := f^{-1}(y), x' = f^{-1}(y')$:

$$|x - x'| \leq |g_0(x) - g_0(x')| + |f(x) - f(x')| \stackrel{5.15}{\leq} \frac{1}{2} |x - x'| + |y - y'|$$

also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \leq 2 \cdot |y - y'| (< \varepsilon)$ für $|y - y'| < \delta := \frac{\varepsilon}{2}$

3. $D f(x)$ ist $\forall x \in U$ (sogar $\forall x \in U_{2r}(0)$) invertierbar

$$x \in U_{2r}(0) \Rightarrow \|g_y(x)\| = \|E - D f(x)\| \leq \frac{1}{2} \stackrel{5.4.2}{\Rightarrow} D f(x)$$

regulär, da die Umkehrmatrix existiert.

□

D. Der Satz über implizite Funktionen

Gegeben: $F(x, y) = 0$ mit $D_y F$ regulär.

Definiere $(x, y) \mapsto \hat{F}(x, y) := (x, F(x, y))$. Invertiere diese $(x, y) \mapsto \hat{F}^{-1}(x, z) = (x, g(x, z))$.

Für $x \mapsto f(x) := g(x, 0)$ gilt dann:

$$F(x, f(x)) = 0$$

Anwendung der Kettenregel auf die C^1 Funktion

$$x \mapsto (h(x)) := F(x, f(x)) \equiv 0$$

liefert

$$\begin{aligned} D h(x) &= D F(x, f(x)) \cdot \begin{pmatrix} E \\ D f(x) \end{pmatrix} \\ &= (D_x F(x, y), D_y F(x, f(x))) \cdot \begin{pmatrix} E \\ D f(x) \end{pmatrix} \\ &= D_x F(x, f(x)) \cdot E + D_y F(x, f(x)) \cdot D f(x) = 0 \end{aligned}$$

Da $\hat{F}$ auf ganz $U \times V$ regulär, ist auch (wegen gleicher Determinante) $D_y F(x, f(x))$ auf ganz U regulär und man kann nach $D f(x)$ auflösen.

Aufgabe für alle, denen m und n zu groß waren. Sinngemäßes Abschreiben für den Fall $m = n = 1$. Wem das nichts nützt: die Spezialfälle betrachten.

Beispiel.

$$F(x, y) = e^{2x-3y} + 3x - 5y$$

kann nicht explizit nach x bzw. y aufgelöst werden. Speziell gilt:

$$F(3, 2) = 0$$

es ist:

$$\partial_y F(x, y) = -3e^{2x-3y} - 5,$$

also

$$\partial_y F(3, 2) = -8 \neq 0$$

Es existiert also eine lokale C^1 Funktion

$$x \in U(3) \mapsto f(x) \in V(2)$$

mit

$$f'(3) = -\frac{\partial_x F(3, 2)}{\partial_y F(3, 2)} = +\frac{5}{8}$$

E. lokale Extrema unter Nebenbedingung

Vorbetrachtung: Gegeben ist eine C^1 Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Gesucht sind die lokalen Extrema von f auf der **Nullstellenmenge** $N_F(G)$ einer weiteren C^1 Funktion $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das heißt also Punkt $\overset{\circ}{x} \in N_F(G)$ mit

$$f(x) \geq (\leq) f(\overset{\circ}{x}) \text{ für } x \in U_\delta(\overset{\circ}{x}) \cap N_F(G)$$

Man sucht also (bedingte) lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $F \equiv 0$

Beispiel.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y & G &= \mathbb{R}^2 \\ F(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, & N_F(\mathbb{R}^2) &= S^1 \end{aligned}$$

Lösung: Milchmädchenrechnung:

- Auflösen von $F(x, y) = 0$ nach $y = g(x)$ (oder $x = \tilde{g}(y)$)
- Einsetzen in f liefert eine **Pullback-Funktion**

$$x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x, g(x))$$

- Untersuchung von $\tilde{f}$ auf lokale Extrema

$$\begin{aligned} y = g(x) &= \pm \sqrt{1 - x^2} \\ \tilde{f}(x) &= x \pm \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} &= 0 \Leftrightarrow \pm x = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Leftrightarrow x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\left(\Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Kandidaten für lokale Extrema auf S^1 sind also $x, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ (da S^1 kompakt ist, wird dort sogar das **globale** Minimum/Maximum $f(x, y) = \pm \sqrt{2}$ angenommen)

$$[\text{oder setze } \tilde{f}(t) := f(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]]$$

Problem: Eine explizite Auflösung ist meistens nicht möglich, was dann?

Präzisierung und Verallgemeinerung

Gegeben C^1 Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Zielfunktion)

C^1 Abbildungen $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ siehe definition $m < n$ Nebenbedingung

Annahme f ist in $\overset{o}{x} \in N_F(G)$ lokal extremal unter der Nebenbedingung $F \equiv 0$ (herleitung einer notwendigen Bedingung)

Vorraussetzung $\text{rg } D F(\overset{o}{x}) = m (< n)$, das heißt $D F(\overset{o}{x})$ besitzt maximalen Rang. Dann lassen sich in $D F(\overset{o}{x})$ m linear unabhängige Spalten auswählen, das heißt es existieren $x_{l_1}, \dots, x_{l_m}$, sodass die Teilmatrix $\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_{l_k}}(\overset{o}{x}) \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, m}}$ regulär. Durch Umnummerierung folgt $(x_{l_1}, \dots, x_{l_m}) = (y_1, \dots, y_m, x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ und man kann dann setzen $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = (\bar{x}, y)$. Dann ist die Teilmatrix $D F(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y})$ regulär und nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine C^1 Abbildung $g : U \subset \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \mapsto y = g(\bar{x})$ mit $g(\bar{x}) = \overset{o}{y} \in N_F(U \times V)$ graph g und

$$D g(\overset{o}{x}) = - \left[D_y F(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y}) \right]^{-1} \cdot \left[D_x F(\overset{o}{\bar{x}}, y) \right] \quad (5.17)$$

Da $(\bar{x}, y) \mapsto f|_{N_F(U \times V)}$ in $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{x})$ lokal extremal ist, ist auch $\bar{x} \mapsto f(\bar{x}, g(\bar{x})) =: \bar{f}(\bar{x})$ in $\overset{o}{\bar{x}} \in U$ lokal extremal, das heißt, es muss gelten:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\bar{f}(\overset{o}{\bar{x}}))^T &= D \bar{f}(\overset{o}{\bar{x}}) = D_{\bar{x}} f(\overset{o}{\bar{x}}) + D_y f(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y}) \cdot D g(\overset{o}{x}) \\ &\stackrel{5.16}{=} \underbrace{D_{\bar{x}} D_y f(\overset{o}{\bar{x}})}_{1 \times r-m} - \underbrace{D_y f(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y})}_{1 \times m} \underbrace{\left[D_y F(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y}) \right]^{-1}}_{m \times m} \underbrace{D_{\bar{x}} F(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y})}_{m \times n-m} = 0 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Lambda \in M(1, m)} \end{aligned}$$

$$D_{\bar{x}} f(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y}) = \Lambda \cdot D_{\bar{x}} F(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y})$$

Nach Definition von Λ ist auch

$$D_y f(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y}) = \Lambda D_y F(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y})$$

also insgesamt

$$D f(\overset{o}{x}) = \Lambda \cdot D F(\overset{o}{x}) \quad \overset{o}{x} = (\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{y})$$

In dieser Gleichung ist die Auszeichnung von der Variablen nicht mehr zu erkennen. Mit $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ erhält man

$$\partial_k f(\overset{o}{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial_k F_j(\overset{o}{x})$$

beziehungsweise

$$\text{grad } f(\overset{o}{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } F_j(\overset{o}{x})$$

Das Ergebnis ist:

Satz 5.4.6. Lagrangesche Multiplikatorenregel

$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m < n$) seien C^1 Abbildungen, sowie $\overset{o}{x} \in G$ ein Punkt mit $F(\overset{o}{x}) = 0$ und $\text{rg } D F(\overset{o}{x}) = m$. Ist dann f in $\overset{o}{x}$ lokal Extremal unter der Nebenbedingung $F \equiv 0$, so existieren sogenannte **Lagrangesche Multiplikatoren** $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } f(\overset{o}{x}) = \sum_j \lambda_j \text{grad } F_j(\overset{o}{x})$$

Praktische Anwendung zur Bestimmung bedingter lokaler Extrema. Man löse im Bereich $G := \{x \in G \mid \text{rg } D F(x) = m\}$ das (nichtlineare) Gleichungssystem:

$$\underbrace{F(x) = 0}_{m \text{ Gleichungen}} ; \quad \underbrace{f(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } F_j(x)}_{n \text{ Gleichungen}} \Rightarrow \text{insges. } m + n \text{ Gleichungen}$$

für die $m + n$ Variablen $x_1, \dots, x_n [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$. Die Lösungen $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ sind dann Kandidaten für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $F \equiv 0$ im Bereich G'

Wichtig: Weitere solche Kandidaten können im Punkt $x \in G$ auftreten, wenn $F(x) = 0$ aber $\text{rg } D F(x) < m$ gilt.

Beispiel.

$$\begin{aligned} \underbrace{f(x, y, z)}_{\text{Kugel}} &= x + y + z \\ F(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ \text{rg } D F(x, y, z) &= \text{rg}(2x, 2y, 2z) = 1 \end{aligned} \quad N_F(\mathbb{R}^3) = 1$$

Für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \notin N_F(\mathbb{R}^3)$ lösbar ist

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 + z^2 \\ 1 = \lambda 2x \\ 1 = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} r &= y - z = \frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{3}{4\lambda^2} = 1 \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis $(x, y, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Beiden Punkte liefern sogar die absoluten Extrema, da S^2 im Punkt $\mathbb{R}^3$ kompakt ist.

Noch eine Anwendung:

Gegeben: quadratische Fortsetzung $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto q_A(x) = x^T A x$ mit symmetrischer Matrix.

Behauptung: Ihr Maximum μ auf der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist gleich der größten Eigenwert der Matrix A . Es wird ein zugehöriger Eigenvektor $\overset{o}{x}$ von A angenommen.

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Beweis. Das (absolute) Maximum μ von q_a auf S^{n-1} wird einem Punkt $\overset{o}{x} \in S^{n-1}$ angenommen und ist damit auch vielleicht Maximum von q_A unter der Nebenbedingung

$$F(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 1 \equiv 0$$

Also existiert ein Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\text{grad } q_A(\overset{o}{x}) = \lambda \text{grad } F(\overset{o}{x})$. Wegen $\text{grad } q_A = 2 \cdot A \cdot x$, $\text{grad } F(\overset{o}{x}) = 2x$ gilt damit $A \cdot \overset{o}{x} = \lambda \overset{o}{x}$, das heißt $\overset{o}{x}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Wegen $\mu = q_A(\overset{o}{x}) = \langle \overset{o}{x}, A \cdot \overset{o}{x} \rangle = \lambda \left| \overset{o}{x} \right| \stackrel{\left| \overset{o}{x} \right|=1}{=} \lambda$ ist μ selbst dieser Eigenwert. Für einen weiteren Eigenwert $\tilde{\lambda}$ mit zugleich Eigenvektor $\tilde{x}_0$ ($|\tilde{x}_0| = 1$) folgt schließlich $q_A(\tilde{x}_0) = \langle \tilde{x}_0, A \cdot \tilde{x}_0 \rangle = \tilde{\lambda} |\tilde{x}_0|^2 = \tilde{\lambda} \leq \mu$, das heißt μ ist ein größter Eigenwert von A . $\square$

5.5. Parameterabhängiges R -Integral

Gegeben: Eine Funktion $t \in [a, b] \mapsto f(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$, die von Parametern $x_1, \dots, x_n$ also von einem Punkt $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ stetig/diffbar abhängt.

Frage: Unter welche Voraussetzungen hängt auch das R -Integral $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ stetig diffbar von x ab?

Gilt also

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} \int_a^b f(t, x) dt \\ &\stackrel{?}{=} \int_a^b \lim_{x \rightarrow \overset{o}{x}} f(t, x) dt = \int_a^b f(t, \overset{o}{x}) dt = F(\overset{o}{x}) \end{aligned}$$

beziehungsweise für $n = 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^b f(t, x) dt \\ &\stackrel{?}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt \end{aligned}$$

Generell ist dazu gleichmäßige Konvergenz/stetigkeit nötig. Hier ist das allerdings nicht so tragisch!

Satz 5.5.1.

(a) $f : [a, b] \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ sei stetig auf G

- (b) Existiere zusätzlich auch die partielle Ableitung $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k} f(t, x)$ als stetige Funktion ($k = 1, \dots, n$) so ist auch F stetig diffbar mit

$$\forall_{x \in G} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(t, x) dt$$

Erweiterung auf uneigentliche Integrale

Es muss zusätzlich gelten für

- (a) dass $\int_a^\infty f(t, x) dt$ bezüglich x gleichmäßig konvergiert
 (b) dass $\int_a^\infty \partial_x f(t, x) dt$ bezüglich x gleichmäßig konvergiert

Beweis.

- (a) Sei $\overset{\circ}{x} \in G$ beliebig und $\bar{U} \subset G$ eine kompakte Umgebung von $\overset{\circ}{x}$. Dann ist f auf dem Kompaktum $[a, b] \times \bar{U}$ sogar **gleichmäßig stetig**. Insbesondere gibt es:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x, x' \in \bar{U}} \forall_{t \in [a, b]} (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t, x')| < \varepsilon)$$

also auch:

$$\forall_{x \in \bar{U}} \exists_{\delta > 0} \forall_{x' \in \bar{U}} (|x - \overset{\circ}{x}| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(\overset{\circ}{x})| \leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x')| dt \leq \varepsilon(b - a)),$$

da $\int_a^b \varepsilon = \varepsilon \int_a^b 1 = \varepsilon(b - a)$. Demnach ist F stetig in $\overset{\circ}{x}$

- (b1) Hängt f nur von **einem** Parameter $x \in I \subset \mathbb{R}$ ab, so gilt wie unter (a) in einem kompakte Umgebung $\bar{U}$ von $\overset{\circ}{x} \in I$:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x, x' \in \bar{U}} (|x - x'| < \delta \Rightarrow \forall_{t \in [a, b]} |\partial_x f(t, x) - \partial_x f(t, x')| < \varepsilon)$$

also auch:

$$\begin{aligned} \forall_{x, x' \in \bar{U}} \quad 0 < |x - x'| < \delta \Rightarrow \forall_{t \in [a, b]} \left| \frac{f(t, x) - f(t, \overset{\circ}{x})}{x - \overset{\circ}{x}} - \partial_x f(t, \overset{\circ}{x}) \right| \\ \stackrel{4.5.7}{=} \left| \partial_x f(t, \bar{x}(t)) - \partial_x f(t, \overset{\circ}{x}) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \forall_{x \in \bar{U}} \quad 0 < |x - \overset{\circ}{x}| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(\overset{\circ}{x})}{x - \overset{\circ}{x}} - \int_a^b \partial_x f(t, \overset{\circ}{x}) dt \right| \\ = \left| \int_a^b \left(\frac{f(t, x) - f(t, \overset{\circ}{x})}{x - \overset{\circ}{x}} - \partial_x f(t, \overset{\circ}{x}) \right) dt \right| \\ \leq \int_a^b \left| \frac{f(t, x) - f(t, \overset{\circ}{x})}{x - \overset{\circ}{x}} - \partial_x f(t, \overset{\circ}{x}) \right| dt \leq \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

Demnach ist

$$F'(\overset{\circ}{x}) = \lim_{x \rightarrow \overset{\circ}{x}} \frac{F(x) - F(\overset{\circ}{x})}{x - \overset{\circ}{x}} \stackrel{!}{=} \int_a^b \partial_x f(t, x) dt$$

da $(t, x) \mapsto \partial_x f(t, x)$ stetig ist, ist nach **(a)** auch $x \mapsto F'(x)$ stetig.

(b2) Hängt f von mehreren Parametern ab, so zeigt **(b1)**, dass F nach allen Variablen stetig partiell diffbar ist, also sogar (total) diffbar.

□

Folgerung. Im Fall $n = 1$ kann man die stetige Funktion $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ nochmal im Intervall $[c, d]$ integrieren und darf beide Integrationen miteinander vertauschen.

Satz 5.5.2. Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge

Ist $(t, x) \in [a, b] \times [c, d] \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt$$

Beweis.

Die Funktion

$$y \mapsto \phi(y) := \int_c^y F(x) dx$$

ist nach dem 1. Hauptsatz diffbar mit

$$\forall_{y \in [c, d]} \phi'(y) = F(y) = \int_a^b f(t, y) dt \text{ und } \phi(c) = 0$$

Für die Funktion

$$y \mapsto \psi(y) := \int_a^b f(t, y) dt$$

mit

$$g(t, y) := \int_c^y f(t, x) dt$$

gilt wegen $\partial_y f(t, y) = f(t, y) \Rightarrow$ stetig nach dem letzten Satz (Satz 5.5.2) Teil **(b)** ebenfalls

$$\psi'(y) = \int_a^b \underbrace{\partial_y g(t, y)}_{f(t, y)} dt = \int_a^b f(t, y) dt$$

und

$$\psi(c) = \int_a^b \underbrace{\dot{g}(t, c)}_{\equiv 0} dt = 0$$

Also ist $\psi \equiv \phi$ insbesondere $\Phi(d) = \Psi(d)$.

□

Folgerung.

Wir betrachten jetzt die parameterabhängige Integrale der Form

$$x \mapsto F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \quad (x \in I \subset \mathbb{R})$$

mit zusätzlich Variablen Integrationsgrenzen.

$$dt = (b(x) - a(x)) d\tau$$

Die Substitution

$$t = a(x) + \tau(b(x) - a(x))$$

liefert die Funktion

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 f(a(x) + \tau(b(x) - a(x)), x) \cdot (b(x) - a(x)) d\tau \\ &= \int_0^1 g(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} x \in I &\mapsto a(x), b(x) \text{ stetig} \\ (t, x) \in A := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, t \in \overline{a(x), b(x)}\} &\mapsto f(t, x) \in \mathbb{R} \text{ stetig} \\ &\Rightarrow (\tau, x) \in [0, 1] \times I \mapsto g(\tau, x) \in \mathbb{R} \text{ stetig} \\ &\stackrel{5.5.1}{\Rightarrow} x \in I \mapsto F(x) \in \mathbb{R} \text{ stetig.} \end{aligned}$$

Beweis.

Ist zunächst $x \mapsto a'(x), b'(x)$, $(t, x) \mapsto \partial_t f(t, x)$, $\partial_x f(t, x)$ definiert und stetig. Dann folgt, dass auch

$$\begin{aligned} \partial_x g(\tau, x) &= \partial_t f(a(x) + \tau(b(x) - a(x)), x) \cdot (a'(x) + \tau(b'(x) - a'(x))) \cdot (b(x) - a(x)) \\ &\quad + \partial_x f(a(x) + \tau(b(x) - a(x)), x) \cdot 1 \cdot (b(x) - a(x)) + f(a(x)) \\ &\quad + \tau(b(x) - a(x), x) \cdot (b'(x) - a'(x)) \end{aligned}$$

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

als stetige Funktion existiert

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F'(x) &= \int_0^1 \partial_x g(\tau, x) \, d\tau \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} [f(a(x) + \tau(b(x) - a(x)), x)] \cdot (a'(x) + \tau(b'(x) - a'(x))) \, d\tau \\
 &\quad + \int_0^1 f(a(x) + \tau(b(x) - a(x)), x) \frac{\partial}{\partial \tau} [a'(x) + \tau(b'(x) - a'(x))] \, d\tau \\
 &\quad + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t, x) \, dt \\
 &= [f(a(x) + \tau(b(x) - a(x)), x) \cdot (a'(x) + \tau(b'(x) - a'(x)))]_0^1 \\
 &\quad + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t, x) \, dt \\
 &= f(b(x), x) \cdot b'(x) - f(a(x), x) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t, x) \, dt
 \end{aligned}$$

□

Merkregel:

Man betrachte die Funktion

$$G(x, a, b) = \int_a^b f(t, x) \, dt$$

mit

$$\begin{aligned}
 \partial_x G(x, a, b) &= \int_a^b \partial_x f(t, x) \, dt \\
 \partial_b G(x, a, b) &= f(b, x) \\
 \partial_a G(x, a, b) &= -f(a, b)
 \end{aligned}$$

wegen

$$F(x) = G(x, a(x), b(x))$$

gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \partial_x G(x, a(x), b(x)) \\
 &\quad + \partial_a G(x, a(x), b(x)) \cdot a'(x) \\
 &\quad + \partial_b G(x, a(x), b(x)) \cdot b'(x)
 \end{aligned}$$

Ergänzung.

Interessante parameterabhängige Integrale sind meist **uneigentlich**, etwa von der Form

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) \, dt$$

5.5. Parameterabhängiges R-Integral

gilt dann auch Satz 5.5.1?

Zusätzliches Problem (etwa bei Stetigkeit)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \overset{\circ}{x}} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \overset{\circ}{x}} \int_a^b f(t, x) \, dt = \lim_{x \rightarrow \overset{\circ}{x}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_a^\tau f(t, x) \, dt \\ F(\overset{\circ}{x}) &= \int_a^b f(t, \overset{\circ}{x}) \, dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{x \rightarrow \overset{\circ}{x}}^\tau f(t, \overset{\circ}{x}) \, dt\end{aligned}$$

Hierzu ist **zweifache** Vertauschung des Grenzwertes nötig. Die erste ist nach Satz 5.5.1 erlaubt, falls $(t, x) \mapsto f(t, x)$ stetig ist. Für die zweite Vertauschung ist die **gleichmäßige Konvergenz** des Integrals

$$\int_a^\infty f(t, x) \, dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_a^\tau f(t, x) \, dt$$

bezüglich des Parameters x der Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

vonnöten. Doch was soll das sein?

Ein uneigentliches R-Integral $\int_a^\infty f(t, x) \, dt$ heißt bezüglich $x \in I \subset \mathbb{R}$ **gleichmäßig konvergent**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \geq a \forall \tau' > \tau_0 \forall x \in I \left| \int_\tau^{\tau'} f(t, x) \, dt \right| < \varepsilon$$

Gleichwertig ist das **Cauchy-Kriterium**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \geq \tau_0 \forall \tau', \tau'' > \tau_0 \forall x \in I \left| \int_\tau^{\tau'} f(t, x) \, dt \right| < \varepsilon$$

Das **Weierstraßsche Majorantenkriterium** für gleichmäßige Konvergenz lautet:

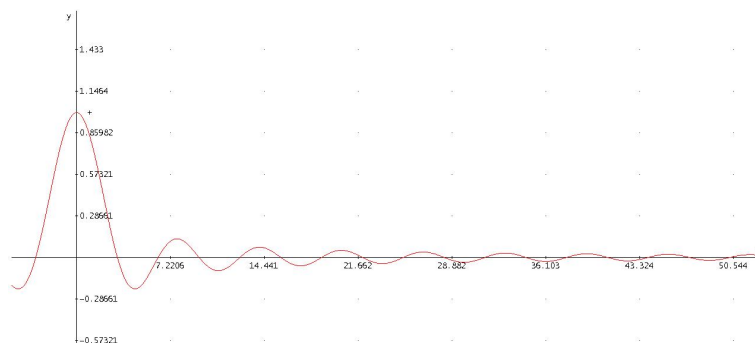
$$\begin{aligned}\forall x \in I \forall t > a \quad |f(t, x)| \leq g(t) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(t) \, dt < \infty \\ \Rightarrow \int_a^\infty f(t, x) \, dt \quad \text{konvergieren Gleichmäßig (und absolut) bezüglich } x \in I\end{aligned}$$

Damit ist die **Erweiterung** von Satz 5.5.1 begründet.

statt eines Beweises lieber ein

Beispiel. Frage existiert $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt$?

5. Differentialrechnung in mehreren Variablen



Gegeben:

$$F(x) = \int_0^\infty f(t, x) dt = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt \quad (t \geq 0)$$

1.

$\int_0^\infty f(t, x) dt$ konvergiert für $x \in [a, \infty[$ (mit $a > 0$ beliebig) **gleichmäßig**. Das Majorantenkriterium liefert:

$$\begin{aligned} \forall_{x>a} \forall_{\varepsilon>0} \quad |f(t, x)| &\leq e^{-tx} \leq e^{-at} \\ \int_0^\infty e^{-at} dt &= \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_0^\infty = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

existiert. Also ist F auf $[a, \infty[$ stetig und da $a > 0$ beliebig ist, sogar auf $]0, \infty[$

2.

$\int_0^\infty \partial_x f(t, x) dt$ konvergiert auch für $x \in [a, \infty[$, (mit $(a > 0)$ **gleichmäßig**. Hier liefert das Majorantenkriterium:

$$\forall_{x \geq a} \forall_{t \geq 0} \quad |\partial_x f(t, x)| = |-e^{-tx} \sin t| \leq e^{-at} \quad (\text{wie oben})$$

Also ist F in $[a, \infty[$ und sogar in $]0, \infty[$ (stetig) diffbar und es gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^\infty e^{-tx} \sin t dt = \dots &= \left[\frac{e^{-tx}}{1+x^2} (x \sin t + \cos t) \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow F(x) &= c - \arctan x \end{aligned}$$

Wegen

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0 = c - \frac{\pi}{2},$$

das heißt

$$\forall_{x>0} \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

3.

Gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = F(0)$$

zu zeigen ist, dass

$$\int_0^\infty f(t, x) dt \text{ konvergiert für } x \in [0, \infty[\text{ gleichmäßig}$$

Das Majorantenkriterium ist hier unbrauchbar, weil $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}$ **nicht** absolut konvergent.

Also wenden wir Cauchy-Kriterium an

Für alle $\varepsilon \geq 0$ und $\tau' > \tau < \tau_0 = \frac{2k}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \left| \int_\tau^{\tau'} (e^{-tx} \sin t) \frac{1}{4} dt \right| &\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} \left| \left[-\frac{e^{tx}}{1+x^2} (x \sin t \cos t) \frac{1}{t} \right]_\tau^{\tau'} - \int_\tau^{\tau'} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \frac{(x \sin t + \cos t)}{t^2} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{1+x^2} (x+1) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} \right) + \frac{1}{1+x^2} (x+1) \left[-\frac{1}{t} \right]_\tau^{\tau'} \\ &= \underbrace{\frac{1+x}{1+x^2}}_{\geq k} \frac{2}{\tau} \leq \frac{2k}{\tau} < \varepsilon \end{aligned}$$

mit $k = \max \frac{1+x}{1+x^2}$, $x \in [0, +\infty[$

Also ist wirklich

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Teil III.

Analysis III

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1. Problemstellung und geometrische Interpretation

Allgemein ist eine Differentialgleichung eine Gleichung („differentielle Relation“) zwischen Funktionen (einer und mehrerer Veränderlicher) und ihren Ableitungen. Das Lösen einer Differentialgleichung bedeutet die Bestimmung – evtl. unter Anfangsbedingungen, Randbedingungen oder sonstigen Bedingungen – derjenigen Funktionen („Integrale der Differentialgleichung“), die diese Relation erfüllen.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

Definition. Eine Gleichung der Form $y' = f(x, y)$ mit einer gesuchten (vektorwertigen) Funktion $x \in I \subset \mathbb{R} \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^m$ und einer vorgegebenen Funktion $f : (x, y) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^m$ heißt (explizite) gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Dabei nennt man D den Definitionsbereich der Differentialgleichung.

Bemerkung.

1. Für eine Lösung muss also $\text{graph } y = \{(x, y(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x \in I\} \subset D$ und $\forall_{x \in I} y'(x) = f(x, y(x))$ gelten.
2. Für $m = 1$ definiert y' ein Richtungsfeld auf D und der Wert $f(x, y) = p = \tan \alpha$ kann als Steigung interpretiert werden. In diesem Fall sucht man Funktionen $x \mapsto y(x)$, die in dieses Richtungsfeld „passen“. Der Tripel $(x, y, p) = (x, y, f(x, y))$ aus dem Punkt (x, y) und der Richtung p heißt Linienelement.
3. Es gibt auch implizite gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung. Diese haben die Form $F(x, y, y') = 0$ und sind nicht immer eindeutig nach y' auflösbar. Zu einem Punkt (x, y) können dann – etwa wie bei $(y')^2 = y$ – mehrere Richtungen p existieren.
4. Für $m > 1$ ist $y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))$ sowie $y'(x) = (y'_1(x), \dots, y'_m(x))$ und $f(x, y) = (f_1(x, y_1, \dots, y_m), \dots, f_m(x, y_1, \dots, y_m))$. Dann spricht man von Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung mit der ausführlichen Form

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ y'_m &= f_m(x, y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition. Eine Gleichung der Form $y^{(p)} = f(x, y', \dots, y^{(p-1)})$ mit einer gesuchten Funktion $x \in I \subset \mathbb{R} \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ und einer vorgegebenen Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (explizite) gewöhnliche Differentialgleichung p -ter Ordnung.

Bemerkung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung p -ter Ordnung lässt sich in ein System 1. Ordnung umwandeln. Mit den Funktionen $Y : x \in I \mapsto Y(x) = (y(x), \dots, y^{(p-1)}(x)) \in \mathbb{R}^p$ und $F : (x, Y_1, \dots, Y_p) \in D \mapsto (Y_2, \dots, Y_p, f(x, Y_1, \dots, Y_p)) \in \mathbb{R}^p$ ist $y^{(p)} = f(x, y', \dots, y^{(p-1)})$ äquivalent zu $Y' = F(x, Y)$. Daher können Sätze zu Differentialgleichungen 1. Ordnung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen werden.

Bemerkung

Bemerkung. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ mit $(x, y) \in D$ untersucht man

1. die – evtl. von einer „Integrationskonstanten“ abhängige – allgemeine Lösung.
2. die Lösbarkeit des Anfangswertproblems (AWP). Dabei wird nach einer Lösung für $y' = f(x, y)$ gefragt, so dass $y(x_0) = y_0$ für $(x_0, y_0) \in D$ gilt. Weiter untersucht man den Definitionsbereich I der Lösungsfunktion und ob die Lösung eindeutig ist.
3. die Stabilität der Lösungen. Dazu betrachtet man das Verhalten der Lösungen bei Modifikation der Anfangsbedingung bzw. der Funktion f .

B. Partielle Differentialgleichungen (PDE)

Definition. Eine Gleichung der Form $\text{grad } y = f(x, y)$ bzw. $\forall_{k=1}^n \partial_k y = f_k(x, y)$ mit einer gesuchten Funktion $x \in G \subset \mathbb{R}^n \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ und einer vorgegebenen Funktion $f : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ heißt (explizite) partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit Definitionsbereich D .

Bemerkung. Man betrachte das C^1 -Vektorfeld $\mathcal{X} : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und suche ein Skalarfeld $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } f = \mathcal{X}$ bzw. $\forall_{k=1}^n \partial_k f = \mathcal{X}_k$. Insbesondere ist dann f eine C^2 -Funktion und nach Satz 5.1.5 gilt $\forall_{k,j=1}^n \partial_k \partial_j f = \partial_j \partial_k f$. Wegen $\partial_k \partial_j f = \partial_k \mathcal{X}_j$ erhält man damit für die Lösbarkeit von $\text{grad } f = \mathcal{X}$ die notwendige Integrabilitätsbedingung $\forall_{k,j=1}^n \partial_k \mathcal{X}_j = \partial_j \mathcal{X}_k$.

Beispiel.

1. Welche Funktionen $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen für

$$\mathcal{X} : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \in G \subset \mathbb{R}^2$$

die Gleichung $\text{grad } f = \mathcal{X}$? Für eine Lösung gilt insbesondere $\partial_x f(x, y) = \mathcal{X}_1(x, y) = 2xy$, d.h. $f(x, y) = x^2 y + g(y)$. Weiter ist $x^2 + g'(y) = \partial_y f(x, y) = \mathcal{X}_2(x, y) = x^2$ und man erhält $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$ für einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt sind daher alle Lösungen durch $f(x, y) = x^2 y + c$ gegeben. Da das System lösbar ist, gilt folglich $\partial_2 \mathcal{X}_1(x, y) = 2x = \partial_1 \mathcal{X}_2(x, y)$.

2. Für das differenzierbare Vektorfeld

$$\mathcal{X} : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \in G \subset \mathbb{R}^2$$

gilt nun $\partial_2 \mathcal{X}_1(x, y) = 0$ und $\partial_1 \mathcal{X}_2(x, y) = 2y$. Daher existiert keine Lösungsfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_1 f = \mathcal{X}_1$ und $\partial_2 f = \mathcal{X}_2$. Für eine solche Funktion müsste $\partial_x f(x, y) = x^2 \Leftrightarrow f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + g(y)$ sowie $\partial_y f(x, y) = 2xy$ und daher $g'(y) = 2xy$ gelten.

Bemerkung. Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung – etwa die Laplacesche Differentialgleichung $\Delta y = \partial_{11}f + \partial_{22}f = 0$ in der Ebene – sind kaum systematisch behandelbar. Dennoch sind sie für viele Anwendungen von Bedeutung.

6.2. Elementare Lösungsmethoden

Wir geben Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen, die sich elementar lösen lassen. „Elementar“ schließt dabei das Auffinden von Stammfunktionen und das Bilden von Umkehrfunktionen ein.

A. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ mit $f, g \in C^0(I \rightarrow \mathbb{R})$ heißt lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit Definitionsbereich $D = I \times \mathbb{R}$. Dabei heißt die Gleichung inhomogen, falls $g \not\equiv 0$ gilt. Ansonsten nennt man sie inhomogen mit der „Störfunktion“ g .

Bemerkung.

1. Eine homogene lineare Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot y$ besitzt stets die triviale Lösung $y : x \in I \mapsto 0 \in \mathbb{R}$, d.h. $y \equiv 0$. Ist $F = \int f$ eine fest gewählte Stammfunktion von f , so ist $y_h = e^F$ eine nichttriviale Lösung.
2. Sei nun $y : \tilde{I} \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung. Dann ist wegen $\forall_{x \in \tilde{I}} y_h(x) > 0$ stets $u = \frac{y}{y_h}$ definiert mit $u' = (ye^{-F})' = y'e^{-F} - ye^{-F}f = 0$. Daher ist u konstant und es folgt $y = c \cdot y_h$ für $c \in \mathbb{R}$. Da dann y sogar auf ganz I definiert ist, bildet die Lösungsmenge des Systems $y' = f(x) \cdot y$ einen eindimensionalen Unterraum von $C^1(I)$ mit der Basis y_h .

Beispiel. Für das auf $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ definierte System $y' + \tan x \cdot y = 0$ findet man den Lösungsraum durch Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = -\tan x$. Wegen $f(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$ gilt $F(x) = \ln(\cos x)$ und man erhält die allgemeine Lösung $y(x) = c \cdot e^{\ln(\cos x)} = c \cdot \cos x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung.

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Sei $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ ein partikuläres Integral – d.h. eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot y + g(x)$. Dann gilt $y' = f(x) \cdot y + g(x) \Leftrightarrow (y - y_p)' = f(x) \cdot (y - y_p)$. Damit ist eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, wenn $y - y_p$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.
2. Eine spezielle Lösung y_p findet man stets durch „Variation der Konstanten“. Der Ansatz $y(x) = c(x) \cdot y_h(x)$ mit einer Lösung $y_h = e^F$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung liefert $y' = c' \cdot e^F + c \cdot e^F \cdot f = c' \cdot e^F + y \cdot f$. Für $y' = f \cdot y + g$ folgt damit $c' \cdot e^F = g$ und man erhält $c = \int g \cdot e^{-F} + c_0$. Eine spezielle Lösung ist also $y_p = (\int g \cdot e^{-F}) \cdot e^F$.
3. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ hat nach 1 und 2 die Form $y = y_p + c \cdot y_h$, wobei y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen und y_h eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Die Lösungsmenge bildet also einen eindimensionalen affinen Unterraum von $C^1(I)$.

Beispiel. Die zu $y' + \tan x \cdot y = 2 \sin x$ mit $|x| < \frac{\pi}{2}$ gehörende homogene Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c \cdot \cos x$ mit $c \in \mathbb{R}$. Nun suchen wir eine spezielle Lösung $y_p' = -\tan x \cdot y_p + 2 \sin x$ und betrachten $y(x) = c(x) \cdot \cos x$. Es folgt

$$\begin{aligned} & c'(x) \cdot \cos x - y(x) \cdot \tan x \\ = & c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \cos x \cdot \tan x \\ = & c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x = y'(x) \stackrel{!}{=} -\tan x \cdot y(x) + 2 \sin x \end{aligned}$$

und daher $c'(x) \cdot \cos x = 2 \sin x \Rightarrow c'(x) = 2 \tan x$. Somit ist $y_p(x)$ etwa durch $c(x) = -2 \ln(\cos x)$ gegeben. Insgesamt lautet die allgemeine Lösung $y(x) = (c - 2 \ln(\cos x)) \cdot \cos x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz 6.2.1. Satz über DGL 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ mit $f, g \in C^0(I)$ besitzt durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ genau eine auf ganz I definierte Lösung mit der Darstellung

$$\forall_{x \in I} y(x) = (y_0 + \int_{x_0}^x g(t) \cdot e^{-F(t)} dt) \cdot e^{F(x)},$$

wobei $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ gilt.

Beweis. Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ ist durch $y(x) = \int_{x_0}^x g(t) \cdot e^{-F(t)} dt \cdot e^{F(x)}$ mit $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ gegeben. Ebenso ist $y(x) = e^{F(x)}$ eine spezielle Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot y$. Damit hat die allgemeine Lösung von $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ die Form $y(x) = (c + \int_{x_0}^x g(t) \cdot e^{-F(t)} dt) \cdot e^{F(x)}$ für $c \in \mathbb{R}$. Mit $y(x_0) = y_0$ ist dann $c = y_0$ eindeutig bestimmt. $\square$

B. Getrennte Veränderliche

Definition. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $f \in C^0(J_1)$ sowie $g \in C^0(J_2)$ heißt Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Veränderlichen und ist auf $D = J_1 \times J_2$ definiert.

Bemerkung. Wir bestimmen eine Lösung y der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit einem festen Punkt $y(x_0) = y_0$. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Für $g(y_0) = 0$ ist $y : x \in J_1 \mapsto y_0 \in \mathbb{R}$ eine konstante Lösung mit $(x_0, y_0) \in \text{graph } y$. Diese Lösung ist aber nicht eindeutig; es können weitere Funktionen y mit $y(x_0) = y_0$ und $y' = f(x) \cdot g(y)$ existieren.
2. Sei nun $g(y_0) \neq 0$. Da g stetig ist, gilt dann etwa $g(y) > 0$ in einer ganzen Umgebung $U(y_0)$. Für eine lokale C^1 -Lösung $x \mapsto y(x)$ durch (x_0, y_0) muss dann $\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$ und daher

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

gelten. Durch die Substitution $y(t) = s$ erhält man

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(s)} ds$$

und damit $G(y(x)) = F(x)$ mit den Stammfunktionen $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ und $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds$. Wegen $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ ist nun G in $U(y_0)$ monoton und daher injektiv. Somit existiert eindeutig eine Umkehrfunktion G^{-1} , so dass $y(x) = G^{-1}(F(x))$ in einem Intervall $I \subset J_1$ um x_0 gilt. Diese Funktion ist wirklich eine Lösung des Anfangswertproblems, da

$$y'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x)))} \cdot F'(x) = g(y(x)) \cdot f(x)$$

und mit $F(x_0) = 0$ und $G(y_0) = 0$ auch $y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = y_0$ gilt.

Dabei ist eine Lösung im 2. Fall nach Konstruktion lokal – in einer Umgebung von x_0 – eindeutig. Außerhalb – an einer Stelle $(\tilde{x}, \tilde{y})$ mit $g(\tilde{y}) = 0$ – können sich die Lösungen verzweigen.

Satz 6.2.2. Satz über das Anfangswertproblem

Bei einer Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $f \in C^0(J_1)$ und $g \in C^0(J_2)$ ist das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ für alle $(x_0, y_0) \in J_1 \times J_2$ lösbar.

1. Für $g(y_0) = 0$ ist $y : x \in J_1 \mapsto y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung.
2. Für $g(y_0) \neq 0$ existiert eine in einem Intervall $I \subset J_1$ um x_0 definierte und lokal eindeutige Lösung mit der Darstellung $y(x) = G^{-1}(F(x))$, wobei $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ und $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds$ gilt.

Beispiele. Die Differentialgleichung $y' = y^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ besitzt die triviale Lösung $y \equiv 0$. Für Lösungen $y \neq 0$ muss $y^{-\alpha} y' = 1 \Leftrightarrow \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x + c$ gelten. In diesem Fall erhält man $y(x) = ((1-\alpha)(x+c))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

1. Zunächst betrachten wir $y' = y^2$ – d.h. $\alpha = 2$ – mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann liefert der Fall $y \neq 0$ die Lösung $y(x) = -\frac{1}{x+c}$. Die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \neq 0$ führt zu $c = -(x_0 + \frac{1}{y_0})$ und damit zu $y(x) = -\frac{1}{x - (x_0 + \frac{1}{y_0})} = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$ (enthält für $y_0 = 0$ sogar die triviale Lösung $y = 0$). Insgesamt erhalten wir:

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

- a) Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D = \mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Lösung.
 - b) Die Lösungen sind allerdings für $y_0 \neq 0$ nicht mehr auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
2. Nun untersuchen wir $y' = y^\alpha$ für $\alpha = \frac{2}{3}$, d.h. $y' = \sqrt[3]{y^2}$. Der Fall $y \neq 0$ liefert die Lösungen $y(x) = \left(\frac{1}{3}(x + c)\right)^3$ und die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ führt zu $c = 3y_0^{\frac{1}{3}} - x_0$. Die Lösungsgesamtheit ist damit

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } y_0 = 0 \\ \left(\frac{1}{3}(x - x_0) + y_0^{\frac{1}{3}}\right)^3 & \text{für alle } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ (d.h. auch für } y_0 = 0) \end{cases}$$

und als Ergebnis erhalten wir:

- a) Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D = \mathbb{R}^2$ verläuft mindestens eine Lösung.
 - b) Eine Lösung durch (x_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ ist lokal eindeutig, verzweigt sich aber beim Einmünden in die x -Achse.
 - c) Durch einen Punkt $(x_0, 0)$ verlaufen die Lösungen $y(x) = 0$, $y(x) = \left(\frac{1}{3}(x - x_0)\right)^3$ sowie C^1 -Zusammensetzungen dieser Funktionen, die sich weiter verzweigen können.
3. Der Grund des unterschiedlichen Verhaltens für verschiedene Werte für α liegt dabei in der Gestalt des Differenzenquotienten von $y \mapsto y^\alpha$, also in

$$\frac{f(y) - f(\bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{y^\alpha - \bar{y}^\alpha}{y - \bar{y}} \stackrel{\text{für } \bar{y}=0}{=} y^{\alpha-1} = \begin{cases} \text{lcl} & \text{für } \alpha = 2 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{y}} & \text{für } \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Für $\alpha = \frac{2}{3}$ ist der Differenzenquotient in der Umgebung von $y = 0$ nicht beschränkt, d.h. es existiert keine Lipschitzkonstante L mit $|y^{\frac{2}{3}} - \bar{y}^{\frac{2}{3}}| \leq L \cdot |y - \bar{y}|$.

6.3. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten Differentialgleichungssysteme der Form $y' = f(x, y)$ in $\mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

A. Die Lipschitzbedingung

Definition. 1. Eine Abbildung $(x, y) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^m$ erfüllt auf D eine (globale) Lipschitzbedingung bzgl. y , wenn eine sog. Lipschitzkonstante $L \geq 0$ mit

$$\forall (x, y) \in D \quad \forall (x, \bar{y}) \in D \quad |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L \cdot |y - \bar{y}|.$$

existiert.

2. Sie erfüllt auf D eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y , wenn jeder Punkt $(x, y) \in D$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f|_{U \cap D}$ eine globale L -Bedingung bzgl. y erfüllt. Man sagt, dass f in diesem Fall L -stetig bzw. L -beschränkt ist.

Bemerkung.

1. Besitzt f für $1 \leq k \leq m$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ stetige partielle Ableitungen $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y)$, so erfüllt f dort eine lokale L -Bedingung bzgl. y .
2. Erfüllt f einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eine lokale L -Bedingung bzgl. y , so erfüllt f auf jeder kompakten Teilmenge $U \subset G$ sogar eine globale L -Bedingung.

Beispiel.

1. Die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y) = |y|$ ist auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nicht nach y differenzierbar. Dennoch ist f dort L -beschränkt: $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = ||y| - |\bar{y}|| \leq 1 \cdot |y - \bar{y}|$.
2. Etwa $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$ besitzt in keiner Umgebung von $(x_0, 0)$ eine L -Konstante.

B. Zusammenstellung der Hauptsätze

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Satz 6.3.1. Existenzsatz von Peano

$f : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig. Dann verläuft durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in G$ mindestens eine Lösung.

Satz 6.3.2. Fortsetzungssatz

$f : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig. Dann verläuft jede (maximal fortgesetzte) Lösung $x \in I \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^m$ in G von „Rand zu Rand“, d.h. sie endet niemals in einem (Innen-)Punkt von G .

Satz 6.3.3. Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

$f : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig und lokal L -beschränkt. Dann existiert durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in G$ genau eine lokale Lösung $x \in I \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^m$ (die so fortgesetzt werden kann, dass sie in G von „Rand zu Rand“ verläuft).

Satz 6.3.4. Satz über lineare Differentialgleichungssysteme

Sei $f : (x, y) \in G = I \times \mathbb{R}^m \mapsto A(x) \cdot y + b(x)$ durch stetige Funktionen $x \in I \mapsto A(x)$ und $x \in I \mapsto b(x)$ bestimmt. Dann sind die eindeutig existierenden Lösungen des Anfangswertproblems auf ganz I definiert.

C. Der Satz von Picard-Lindelöf

Gegeben sei für die stetige sowie bzgl. y lokal L -beschränkte Funktion $f : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ das Anfangswertproblem

$$(*) \quad y' = f(x, y) \wedge y(\overset{\circ}{x}) = \overset{\circ}{y}$$

und gesucht sei eine lokal eindeutige Lösung $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Für eine solche Lösung erhält man durch Integration die Äquivalenz von $(*)$ zu

$$(**) \quad \forall_{x \in I} \quad y(x) = \overset{\circ}{y} + \int_{\overset{\circ}{x}}^x f(t, y(t)) \, dt.$$

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definiert man nun den Operator $T : y \in C^0(I \rightarrow \mathbb{R}^m) \mapsto Ty \in C^0(I \rightarrow \mathbb{R}^m)$ durch $\forall_{x \in I} Ty(x) = \dot{y} + \int_{\dot{x}}^x f(t, y(t)) dt$, so ist (**) äquivalent zu der Fixpunktgleichung $y = Ty$.

Bemerkung. Einen solchen „Fixpunkt“ wollen wir mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes durch sukzessive Approximation – „Picardsche Iteration“ – bestimmen. Dazu beginnt man mit einer Anfangsnäherung $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ für $y_0(\dot{x}) = \dot{y}$ – etwa $y_0 \equiv \dot{y}$ – und betrachtet

$$\begin{array}{ll} \text{lcl} & y_1 = Ty_0 \\ (\text{Verbesserung?}) & y_2 = Ty_1 \\ & \vdots \\ & y = Ty \quad (\text{Konvergenz?}) \quad (T \text{ stetig?}) \quad (\text{Lösung?}) \end{array}$$

Beispiel. Für das Anfangswertproblem $y' = y$ mit $y(\dot{x}) = \dot{y}$ beginnen wir die Iteration mit $y_0(x) = \dot{y}$ und erhalten über

$$\begin{aligned} y_1(x) &= Ty_0(x) = \dot{y} + \int_{\dot{x}}^x \dot{y} dt = \dot{y}(1 + (x - \dot{x})) \\ &\vdots \\ y_k &= Ty_{k-1}(x) = \dot{y} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (x - \dot{x})^l \end{aligned}$$

durch Grenzwertbildung $k \rightarrow \infty$ die Lösung $y(x) = \dot{y} \cdot e^{x-\dot{x}}$.

Bemerkung. Wir überprüfen nun die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes 5.4.4:

1. Sei $\bar{I} = [\dot{x} - a, \dot{x} + a]$ für $a > 0$ ein kompaktes Intervall. Dann ist $\mathcal{X} = C^0(\bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^m)$ zusammen mit der Maximumsnorm $\|y\| = \max_{x \in \bar{I}} |y(x)|$ nach Satz 2.5.4 ein Banachraum.
2. Wir suchen nun ein geeignetes Intervall $\bar{I}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset C^0(\bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^m)$, welche der Picardsche Operator T auf sich selbst abbildet, um sicherzugehen, dass die Picardsche Iteration definiert ist und nicht aus dem Gebiet G herausführt.

Lemma 6.1. Ist die Abbildung $(x, y) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^m$ auf dem Gebiet G stetig, so besitzt jeder Punkt $(\dot{x}, \dot{y}) \in G$ eine kompakte Quaderumgebung $\bar{I} \times \bar{Q} \subset G$ mit $\bar{I} = [\dot{x} - a, \dot{x} + a]$ und $\bar{Q} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y - \dot{y}|_\infty \leq b\}$ für $a > 0$ sowie $b > 0$, so dass $a \cdot M \leq b$ mit $M = \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in \bar{I} \times \bar{Q}\}$ gilt. Durch den Operator T wird dann jeder C^0 -Abbildung $y : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ wieder eine C^0 -Abbildung $Ty : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ zugeordnet, also eine Selbstabbildung $T : A \rightarrow A$ auf der abgeschlossenen Teilmenge $A = C^0(\bar{I} \rightarrow \bar{Q})$ des Banachraumes $C^0(\bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^m)$ definiert. Insbesondere ist in $\bar{I} \times \bar{Q}$ bei beliebiger C^0 -Startabbildung $y_0 : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ die Picardsche Iteration $\forall_{k \in \mathbb{N}} y_{k+1} = Ty_k$ durchführbar.

Beweis.

- (a) Da G offen ist, existiert um $(\dot{x}, \dot{y})$ eine Quaderumgebung $\bar{I}' \times \bar{Q} \subset G$ mit $\bar{I}' = [\dot{x} - a', \dot{x} + a']$ und $\bar{Q} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y - \dot{y}|_\infty \leq b\}$. Dort ist die stetige Funktion f nach Satz 2.4.8 beschränkt, d.h. $\forall_{x \in \bar{I}'} \forall_{y \in \bar{Q}} |f(x, y)| \leq M'$ für ein $M' > 0$. Man setze nun $a = \min\{a', \frac{b}{M'}\}$ sowie $\bar{I} = [\dot{x} - a, \dot{x} + a]$. Dann gilt $\bar{I} \subset \bar{I}' \Rightarrow M = \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in \bar{I} \times \bar{Q}\} \leq M'$ und $M \cdot a \leq M' \cdot a \leq M' \cdot \frac{b}{M'} = b$.

(b) Für eine C^0 -Abbildung $y : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ gilt nach Satz 4.5.4 und Satz 4.5.5

$$\forall_{\dot{x} \leq x \leq \dot{x}+a} |Ty(x) - \dot{y}| = \left| \int_{\dot{x}}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{\dot{x}}^x |f(t, y(t))| dt \leq M \cdot (x - \dot{x}) \leq M \cdot a \leq b.$$

Analog folgt $\forall_{\dot{x}-a \leq x < \dot{x}} |Ty(x) - \dot{y}| \leq b$ und man erhält $Ty(x) \in \bar{Q}$ für alle $x \in \bar{I}$, d.h. $Ty \in C^0(\bar{I} \rightarrow \bar{Q})$.

(c) Für $y \in \mathbb{C}A$ existiert ein $\bar{x} \in \bar{I}$ mit $y(\bar{x}) \notin \bar{Q} \Leftrightarrow c = |y(\bar{x}) - \dot{y}| > b$. Für alle $\tilde{y} \in U_\varepsilon(y)$, also mit $||\tilde{y} - y|| = \max_{x \in \bar{I}} |\tilde{y}(x) - y(x)| < \varepsilon = c - b$, gilt dann ebenfalls

$$|\tilde{y}(\bar{x}) - \dot{y}| = |(y(\bar{x}) - \dot{y}) - (y(\bar{x}) - \tilde{y}(\bar{x}))| \geq |y(\bar{x}) - \dot{y}| - |y(\bar{x}) - \tilde{y}(\bar{x})| > c - \varepsilon = b$$

und man erhält $U_\varepsilon(y) \subset \mathbb{C}A$. Daher ist die Teilmenge $A \subset C^0(\bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^m)$ abgeschlossen.

□

Bemerkung. Für $m = 1$ gilt $Ty : \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{Q} \subset \mathbb{R}$ mit $\bar{I} = [\dot{x} - a, \dot{x} + a]$ und $\bar{Q} = [\dot{y} - b, \dot{y} + b]$. In diesem Fall lässt sich die Bedingung $a \cdot M \leq b$ wegen $\forall_{x \in \bar{I}} |(Ty)'(x)| = |f(x, y(x))| \leq M \leq \frac{b}{a}$ geometrisch interpretieren, da der Graph von Ty dann zwischen Geraden mit der Steigung $\pm \frac{b}{a}$ verläuft.

Bemerkung. Als letzte Voraussetzung des Fixpunktsatzes ist zu prüfen, ob $T : A \rightarrow A$ kontrahierend ist.

3. Da die Funktion f bzgl. y lokal L -beschränkt ist, erfüllt sie auf dem kompakten Quader $\bar{I} \times \bar{Q} \subset G$ eine globale L -Bedingung bzgl. y . Damit gilt für $y, \bar{y} \in A$ und alle $x \in \bar{I}$ stets

$$\begin{aligned} |Ty(x) - T\bar{y}(x)| &= \left| \int_{\dot{x}}^x f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)) dt \right| \leq \left| \int_{\dot{x}}^x |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\dot{x}}^x L \cdot |y(t) - \bar{y}(t)| dt \right| \leq \left| \int_{\dot{x}}^x L \cdot ||y - \bar{y}|| dt \right| \\ &= L \cdot ||y - \bar{y}|| \cdot |x - \dot{x}| \leq L \cdot ||y - \bar{y}|| \cdot a, \end{aligned}$$

also auch $||Ty - T\bar{y}|| \leq L \cdot a \cdot ||y - \bar{y}|| = L' \cdot ||y - \bar{y}||$. Durch Modifikation von a kann man erreichen, dass dabei $L' = L \cdot a < 1$ gilt. Aus $||Ty - T\bar{y}|| \leq L' \cdot ||y - \bar{y}||$ folgt insbesondere die Stetigkeit von $T : A \rightarrow A$.

Bemerkung. Die Verkleinerung von a ist allerdings unnötig. Man kann in $C^0(I)$ auch mit einer durch $\alpha \geq 0$ „gewichteten Norm“ $||y||_\alpha = \max\{|y(x)| \cdot e^{-\alpha x} \mid x \in \bar{I}\}$ arbeiten, die wieder Banachräume liefert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall_{x \in \bar{I} \wedge x \geq \dot{x}} |Ty(x) - T\bar{y}(x)| &\leq \int_{\dot{x}}^x L \cdot |y(t) - \bar{y}(t)| dt \\ &= \int_{\dot{x}}^x L \cdot (|y(t) - \bar{y}(t)| \cdot e^{-\alpha t}) \cdot e^{\alpha t} dt \leq \int_{\dot{x}}^x L \cdot ||y(t) - \bar{y}(t)||_\alpha \cdot e^{\alpha t} dt \\ &= L \cdot ||y(t) - \bar{y}(t)||_\alpha \cdot \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha \dot{x}}}{\alpha} \right) \leq \frac{L}{\alpha} \cdot e^{\alpha x} \cdot ||y(t) - \bar{y}(t)||_\alpha. \end{aligned}$$

Damit folgt $\forall_{x \in \bar{I} \wedge x \geq \dot{x}} |Ty(t) - T\bar{y}(t)| \cdot e^{-\alpha x} \leq \frac{L}{\alpha} \cdot ||y(t) - \bar{y}(t)||_\alpha$ und ähnlich ergibt sich $\forall_{x \in \bar{I} \wedge x < \dot{x}} |Ty(t) - T\bar{y}(t)| \cdot e^{-\alpha x} \leq \frac{L}{\alpha} \cdot ||y(t) - \bar{y}(t)||_\alpha$. Insgesamt erhält man also $||Ty(t) - T\bar{y}(t)||_\alpha \leq \frac{L}{\alpha} \cdot ||y(t) - \bar{y}(t)||_\alpha$, wobei $\frac{L}{\alpha} < 1$ für $\alpha > L$ gilt.

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bemerkung. Die Voraussetzungen 1 bis 3 zeigen nun, dass der Fixpunktsatz 5.4.4 anwendbar ist und genau ein Fixpunkt $\bar{y} \in A$ – d.h. genau eine Lösung $\bar{y} : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ des Anfangswertproblems $y' = f(x, y) \wedge y(\hat{x}) = \hat{y}$ – existiert.

Satz 6.3.5. Satz von Picard-Lindelöf

Sei $(x, y) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^m$ auf dem Gebiet G stetig und bzgl. y lokal L -beschränkt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in G$ eine kompakte Quaderumgebung $\bar{I} \times \bar{Q} \subset G$, so dass das Anfangswertproblem $y' = f(x, y) \wedge y(\hat{x}) = \hat{y}$ eine auf $\bar{I}$ eindeutige Lösung $y : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ besitzt, welche man bei beliebiger C^0 -Startabbildung $y_0 : \bar{I} \rightarrow \bar{Q}$ mit $y_0(\hat{x}) = \hat{y}$ durch Picardsche Iteration $\forall_{k \in \mathbb{N}} y_{k+1} = Ty_{k+1}$ als Grenzwert $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ gewinnen kann.

6.4. Lineare Differentialgleichungen

A. Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Satz 6.4.1. Satz über Lösungen von linearen DGL

Ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $y' = A(x)y + b(x)$ in $\mathbb{R}^m$ mit $A, b \in C^0(I)$ besitzt durch jeden Punkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in I \times \mathbb{R}^m$ genau eine Lösung. Diese ist auf ganz I definiert und kann durch Picardsche Iteration gewonnen werden.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch eine Modifikation des Beweises von Satz 6.3.2 und betrachten ein beliebiges kompaktes Intervall $\bar{I}_0 \subset I$ mit $\hat{x} \in \bar{I}_0$.

1. Wegen $G = I \times \mathbb{R}^m$ ist der Operator $y \mapsto Ty$ für alle $y : \bar{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert und liefert eine Selbstabbildung $T : C^0(\bar{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m) \rightarrow C^0(\bar{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m)$. Die Konstruktion einer Quaderumgebung $\bar{I} \times \bar{Q}$ bzw. der Menge $A = C^0(\bar{I} \rightarrow \bar{Q})$ ist unnötig.
2. Da die Funktion $x \in \bar{I}_0 \mapsto \|A(x)\|$ auf einem kompakten Intervall stetig ist, existiert $L = \max_{x \in \bar{I}_0} \|A(x)\|$. Nach Satz 5.4.2 gilt damit $\forall_{x \in \bar{I}_0} |A(x)| \leq \alpha \cdot \|A(x)\| \leq \alpha \cdot L$ und man erhält

$$\forall_{x \in \bar{I}_0} \forall_{y, \bar{y} \in \mathbb{R}^m} |f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |A(x)(y - \bar{y})| \leq \alpha \cdot L |y - \bar{y}|,$$

d.h. $(x, y) \mapsto f(x, y) = A(x)y + b(x)$ erfüllt auf ganz $\bar{I}_0$ eine globale L -Bedingung bzgl. y . Durch Verwendung einer gewichteten Norm erreicht man, dass $y \mapsto Ty$ kontrahierend ist.

□

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nun eine eindeutige Lösung $y : \bar{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Da $\bar{I}_0 \subset I$ beliebig gewählt wurde, ist diese Lösung sogar auf ganz I definiert.

Satz 6.4.2. 1. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ in $\mathbb{R}^m$ mit $A \in C^0(I)$ bildet einen m -dimensionalen Unterraum von $C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^m)$. Jede Lösung lässt sich also als Linearkombination von m linear unabhängigen Lösungen darstellen.

2. Für jeden Punkt $x \in I$ ist $l_x : y \in \mathcal{L} \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus. Die lineare Unabhängigkeit von Lösungen muss also nur an einer festen (aber beliebigen) Stelle $x \in I$ überprüft werden.

Beweis. 1. Offensichtlich ist $\mathcal{L}$ ein Unterraum, denn mit y_1, y_2 ist auch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung von $y' = A(x)y$. Nun bestimmen wir eine Basis von $\mathcal{L}$ und wählen dazu ein festes $\hat{x} \in I$. Die m Anfangswertprobleme $y(\hat{x}) = e_k$ – wobei e_k für $1 \leq k \leq m$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^m$ bezeichnet – besitzen nach Satz 6.4.1 jeweils eine eindeutige Lösung y_k , die wegen

$$\sum_{k=1}^m c_k y_k \equiv 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m c_k e_k = \sum_{k=1}^m c_k y_k(\hat{x}) = 0$$

linear unabhängig sind. Für eine beliebige Lösung $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^m)$ mit etwa $y(\hat{x}) = c = \sum_{k=1}^m c_k e_k$ gilt zudem $y(\hat{x}) = \sum_{k=1}^m c_k e_k = \sum_{k=1}^m c_k y_k(\hat{x})$. Die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 6.4.1 liefert $y \equiv \sum_{k=1}^m c_k y_k$, d.h. die Abbildungen $y_1, \dots, y_m$ erzeugen den ganzen Lösungsraum $\mathcal{L}$ und bilden insgesamt eine Basis.

2. Da die Linearität von l_x klar ist, betrachten wir Kern $l_x = \{y \in \mathcal{L} \mid y(x) = 0\}$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems $y(0) = 0$ folgt sofort Kern $l_x = \{0\}$ und man erhält die Injektivität von l_x . Da aber l_x linear ist und $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^m$ gilt, ist l_x sogar bijektiv.

□

Beispiel. Das homogene System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

besitzt die Lösungen

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \text{ und } y_2(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix},$$

die wegen

$$(y_1(0), y_2(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Daher bilden y_1, y_2 eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$ und jede Lösung ist eine Linearkombination

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Bemerkung.

1. Eine Basis $y_1, \dots, y_m$ des Lösungsraums $\mathcal{L}$ heißt auch ein *Fundamentalsystem* (oder ein *Hauptsystem*) der homogenen Differentialgleichung in $\mathbb{R}^m$.

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Man kann m beliebige Lösungen $y_1, \dots, y_m$ spaltenweise zu einer $(m \times m)$ -Matrix $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ anordnen, genannt Wronski-Matrix mit zugehöriger Wronski-Determinante $x \in I \mapsto w(x) = \det \mathcal{Y}(x) \in \mathbb{R}$. Sie genügt der Matrixdifferentialgleichung $\mathcal{Y}' = A(x) \cdot \mathcal{Y}$.
3. Falls $y_1, \dots, y_m$ ein Fundamentalsystem ist, heißt $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 6.4.2 ist eine Wronski-Matrix $\mathcal{Y}$ genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn ein $\hat{x} \in I$ mit $w(\hat{x}) \neq 0$ existiert. Bei beliebigen Funktionen $y_1, \dots, y_m \in C^1(I) \supset \mathcal{L}$ kann es allerdings vorkommen, dass $(y_1, \dots, y_m)$ regulär ist, aber $\forall_{x \in I} y_1(x), \dots, y_m(x)$ linear abhängig sind.
4. Die allgemeine Lösung eines homogenen Systems kann man schreiben in der Form $y = \sum_{k=1}^m c_k y_k = \mathcal{Y} \cdot c$ mit einer Fundamentalmatrix $\mathcal{Y}$ und $c \in \mathbb{R}^m$.

Satz 6.4.3.

1. Die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ in $\mathbb{R}^m$ mit $A, b \in C^0(I)$ bildet einen m -dimensionalen affinen Unterraum von $C^1(I)$. Für jede Lösung gilt dann

$$y = y_p + \sum_{k=1}^m c_k y_k = y_p + \mathcal{Y} \cdot c$$

für ein $c \in \mathbb{R}^m$, wobei y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und $\mathcal{Y}$ eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems ist.

2. Ein partikuläres Integral y_p kann aus einer Fundamentalmatrix $\mathcal{Y}$ des homogenen Systems durch Variation der Konstanten

$$y_p = \mathcal{Y} \cdot \int (\mathcal{Y}^{-1} \cdot b)$$

bestimmt werden.

Beweis.

1. Die erste Aussage ist analog zu dem eindimensionalen Fall in Kapitel 6.2, denn y ist genau dann eine Lösung von $y' = A(x)y + b(x)$, wenn $y - y_p$ eine Lösung von $y' = A(x)y$ ist.
2. Da für die Fundamentalmatrix $\mathcal{Y}$ der homogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ stets $\mathcal{Y}' = A \cdot \mathcal{Y}$ gilt, liefert der Ansatz $y(x) = \mathcal{Y}(x) \cdot c(x)$ die Beziehung

$$y' = \mathcal{Y}' \cdot c + \mathcal{Y} \cdot c' = A \cdot \mathcal{Y} \cdot c + \mathcal{Y} \cdot c' = A \cdot y + \mathcal{Y} \cdot c'$$

und die Annahme $y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$ führt zu der Bedingung $b = \mathcal{Y} \cdot c'$. Dieses lineare Gleichungssystem $y_1 c'_1 + \dots + y_m c'_m = b$ kann – da $\mathcal{Y}$ regulär ist – eindeutig nach c' aufgelöst werden. Explizit gilt

$$c' = \mathcal{Y}^{-1} \cdot b \Leftrightarrow c = \int (\mathcal{Y}^{-1} \cdot b) + \mathring{c}$$

mit einer vernachlässigbaren additiven Konstanten $\mathring{c} \in \mathbb{R}$, d.h. $y_p = \mathcal{Y} \cdot \int (\mathcal{Y}^{-1} \cdot b)$.

□

Bemerkung. Differentialgleichungssysteme $y' = f(x, y)$ – auch lineare System $y' = A(x)y + b(x)$ – sind nur selten explizit lösbar. Anders ist es im Falle homogener linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten, d.h. im Falle von $y' = A \cdot y$ mit $A \in M(m \times m, \mathbb{R})$. Die Lösungs idee besteht dabei aus der Ähnlichkeitstransformation der Matrix A durch eine reguläre Transformationsmatrix T auf eine einfache Normalform $J = T^{-1}AT$. Dann ist z genau dann eine Lösung von $z' = J \cdot z$, wenn $y = T \cdot z$ eine Lösung von $y' = A \cdot y$ ist (denn $y' = Tz' = TJz = TJT^{-1}y = Ay$).

Spezialfall 1: Sei A reell diagonalisierbar, d.h. $A = TDT^{-1}$ mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. $T = (z_1, \dots, z_m)$ enthält dann (spaltenweise) die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von A . Dann ist $Z(x) = \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x})$ eine Fundamentalmatrix von $z' = Dz$, denn es gilt

$$Z'(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m e^{\lambda_m x} \end{pmatrix} = D \cdot Z(x) \text{ sowie } \det Z(0) = \det E = 1 \neq 0,$$

und $\mathcal{Y}(x) = T \cdot Z(x)$ eine Fundamentalmatrix von $y' = Ay$. Ihre Spalten $x \mapsto y_k(x) = z_k e^{\lambda_k x}$ liefern dann Fundamentallösungen von $y' = Ay$.

Spezialfall 2:

A sei ähnlich zu einer Jordan-Matrix J mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – d.h.

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

mit Jordan-Blöcken

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & & \\ & \lambda_\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \in M(l_\alpha \times l_\alpha, \mathbb{R}).$$

Eine Funktionalmatrix von $z' = Jz$ ist dann

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \boxed{Z_1(x)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{Z_r(x)} \end{pmatrix}$$

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

mit Blöcken der Form

$$Z_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \cdots & \frac{1}{(l_\alpha-1)!}x^{l_\alpha-1} \\ & 1 & x & \cdots & \frac{1}{(l_\alpha-2)!}x^{l_\alpha-2} \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_\alpha x},$$

wobei $\det Z(0) = \det E = 1 \neq 0$ gilt. Eine Fundamentalmatrix von $y' = Ay$ ist dann $\mathcal{Y}(x) = T\mathcal{Z}(x)$.

Allgemeinfall:

A besitze echt komplexe Eigenwerte λ . Diese treten wegen

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \bar{\lambda}E) = \overline{\det(A - \lambda E)} = 0$$

aber als konjugiert komplexe Paare $(\lambda, \bar{\lambda})$ mit gleichen Vielfachheiten auf. Auch die zugehörigen Eigenvektoren und Hauptvektoren sind wegen

$$(A - \lambda E)z_{k+1} = z_k \Leftrightarrow (A - \bar{\lambda}E)\bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k$$

stets konjugiert komplex wählbar. Man kann also annehmen, dass

$$J = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \boxed{J_\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\bar{J}_\alpha} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ und } T = (\dots, \boxed{z_1, \dots, z_l}, \dots, \boxed{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l}, \dots)$$

gilt. Die Fundamentalmatrizen $\mathcal{Z}(x)$ von $z' = Jz$ bzw. $\mathcal{Y}(x) = T\mathcal{Z}(x)$ von $y' = Ay$ besitzen also die komplexe Gestalt

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \boxed{Z_\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\bar{Z}_\alpha} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathcal{Y} = (\dots, \boxed{y_1, \dots, y_l}, \dots, \boxed{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l}, \dots).$$

Die echt komplexwertigen Lösungspaare $(y, \bar{y})$ kann man durch die reellen Lösungspaare $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ mit

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re}(y) = \frac{1}{2}(y + \bar{y})$$

bzw.

$$\tilde{y}_2 = \operatorname{Im}(y) = \frac{1}{2i}(y - \bar{y})$$

ersetzen und erhält eine reelle Funktionalmatrix

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \left(\dots, \boxed{\operatorname{Re}(y_1), \dots, \operatorname{Re}(y_l)}, \dots, \boxed{\operatorname{Im}(y_1), \dots, \operatorname{Im}(y_l)}, \dots \right).$$

Beispiele.

1.

Gegeben sei das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{cases}.$$

Die Eigenwerte von A sind als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$$

durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ gegeben, d.h. A ist reell diagonalisierbar. Die Eigenvektoren z_1 bzw. z_2 erhält man als Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda_{1,2}E)z = 0$, also

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\mathcal{Z}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix}$$

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

eine Fundamentalmatrix von $z' = Tz$ ist, ist

$$\mathcal{Y}(x) = T \cdot \mathcal{Z}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix von $y' = Ay$, d.h.

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = z_1 e^{-x} \text{ sowie } y_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x = z_2 e^x$$

sind die Fundamentallösungen von $y' = Ay$.

2.

Wir untersuchen das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

schon eine Jordan-Matrix ist. Dann ist

$$\mathcal{Y}(x) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & x & \\ & \boxed{1} & \\ & & \boxed{1} \cdot e^{\mu x} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x \cdot e^{\lambda x} & \\ & e^{\lambda x} & \\ & & e^{\mu x} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix und

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x} \text{ und } y_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\mu x}$$

ein Fundamentalsystem.

3.

Gegeben sei

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{cases}.$$

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ mit den Eigenvektoren

$$z_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } z_2 = \bar{z}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. es ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & \\ & 1-i \end{pmatrix} \text{ und } T = (z_1, z_2) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$\mathcal{Z}(x) = \begin{pmatrix} e^{(1+i)x} \\ e^{(1-i)x} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathcal{Y}(x) = T\mathcal{Z}(x) = \begin{pmatrix} ie^{(1+i)x} & -ie^{(1-i)x} \\ e^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \end{pmatrix} = (y(x), \bar{y}(x)).$$

Wegen $e^{(1+i)x} = e^x e^{ix} = e^x (\cos x + i \sin x)$ gilt

$$\tilde{y}_1(x) = \operatorname{Re}(y(x)) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^x$$

und

$$\tilde{y}_2(x) = \operatorname{Im}(y(x)) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^x.$$

Damit erhält man das reelle Fundamentalsystem

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} e^x.$$

B. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung besitzt die Standardform

$$(*) \quad \sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)} = b(x)$$

mit $a_m \equiv 1$ und $a_1, \dots, a_{m-1} \in C^0(I)$ und lässt sich ausführlich durch $y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$ beschreiben. Es kann durch $\tilde{y}_k = y^{(k-1)}$, also

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix},$$

in das lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\tilde{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{m-1}(x) \end{pmatrix} \tilde{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} = A(x) \cdot \tilde{y} + \tilde{b}(x)$$

umgeformt werden, d.h. die für Systeme 1. Ordnung gewonnenen Ergebnisse kann man auf Systeme höherer Ordnung sinngemäß übertragen.

Satz 6.4.4.

1. Bei einer linearen Differentialgleichung höherer Ordnung der Form $(*)$ gibt es zu den vorgegeben Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = p_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = p_{m-1}$ genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diese ist auf ganz I definiert.
2. Die Lösungsmenge bildet
 - im homogenen Fall $b \equiv 0$ einen m -dimensionalen linearen Unterraum
 - im inhomogenen Fall $b \not\equiv 0$ einen m -dimensionalen affinen Unterraum des Vektorraums $C^m(I)$.

Bemerkung. Wir betrachten weitere Übertragungen von Begriffen und Eigenschaften linearer Differentialgleichungssysteme auf Differentialgleichungen höherer Ordnung.

1. Die Wronski-Matrix bzw. Fundamentalmatrix einer homogenen Differentialgleichung $\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)} = 0$ ist

$$\mathcal{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

und besitzt die gleichen Eigenschaften wie die Wronski-Matrix bzw. Fundamentalmatrix eines linearen Differentialgleichungssystems.

2. Zur Bestimmung einer speziellen Lösung $y_p(x) = \mathcal{Y}(x) \cdot c(x)$ einer inhomogenen Differentialgleichung höherer Ordnung kann man für

$$\tilde{y}_p = \begin{pmatrix} y_p \\ \vdots \\ y_p^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

eine Variation der Konstanten durchführen. Zu Lösen ist dann

$$\mathcal{Y} \cdot c' = \tilde{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1 c'_1 & + & \dots & + & y_m c'_m & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ y_1^{(m-1)} c'_1 & + & \dots & + & y_m^{(m-1)} c'_m & = & b(x) \end{array} \right\}.$$

Die eindeutig existierenden Lösungen $c'_1, \dots, c'_m$ führen zu $c_1, \dots, c_m$, womit man $y_p = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m$ erhält.

Beispiele. Wir untersuchen die Gleichung $y'' = x + y$.

1.

Zunächst betrachten wir die homogene Gleichung $y'' - y = 0$ und sehen die Lösungen $y_1(x) = \cosh x$, $y_2(x) = \sinh x$, $y_3(x) = e^x$, $y_4(x) = e^{-x}$. Wegen

$$\det \mathcal{Y}(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

bildet (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem und wegen

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{\mathcal{Y}}(0) = -2 \neq 0$$

bildet (y_3, y_4) ein weiteres Fundamentalsystem.

2. Ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung $y'' - y = x$ finden wir durch Variation der Konstanten über den Ansatz $y_p(x) = c_1(x) \cosh x + c_2(x) \sinh x$. Es ist zu Lösen

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1(x) \cosh x + c'_2(x) \sinh x = 0 \\ c'_1(x) \sinh x + c'_2(x) \cosh x = x \end{array} \right\}.$$

Man erhält $c'_1(x) = -x \sinh x$ bzw. $c'_2(x) = x \cosh x$ und damit $c_1(x) = -x \cosh x + \sinh x$ bzw. $c_2(x) = x \sinh x - \cosh x$. Dies führt zu $y_p(x) = -x$ und daher zu der allgemeinen Lösung $y(x) = -x + c_1 \cosh x + c_2 \sinh x$.

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bemerkung.

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung sind nur selten explizit lösbar, wenn die Koeffizienten von x abhängen. Anders ist es bei homogenen linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)} = 0 \text{ für } a_m = 1 \wedge a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}.$$

Der Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert

$$\sum_{k=0}^m a_k (e^{\lambda x})^{(k)} = \left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k \right) e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0,$$

d.h. genau die Nullstellen λ_i des sog. charakteristischen Polynoms $t \mapsto \chi(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ der Differentialgleichung sind Lösungen der Form $x \mapsto e^{\lambda_i x}$. Dies ergibt i.A. aber nicht genug Funktionen, um eine Basis des Lösungsraums zu bilden.

- Das charakteristische Polynom zerfällt in $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{l_1} \cdots (t - \lambda_r)^{l_r}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $l_i \in \mathbb{N}$, wobei $\sum_{k=1}^r l_k = m$ gilt. Man kann zeigen, dass die Funktion

$$x \mapsto (e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_r x}, x e^{\lambda_r x}, \dots, x^{l_r-1} e^{\lambda_r x})$$

ein evtl. komplexes Fundamentalsystem der Differentialgleichung darstellt.

- Echt komplexe Nullstelle von χ treten als konjugiert komplexes Paar $(\lambda, \bar{\lambda}) = (\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$ mit gleichen Vielfachheiten auf und liefern konjugiert komplexe Lösungspaare ($x \mapsto y(x) = x^\mu e^{\lambda x}, x \mapsto \bar{y}(x) = x^\mu e^{\bar{\lambda} x}$). Diese kann man ersetzen durch reelle Lösungspaare ($x \mapsto \tilde{y}_1(x) = \operatorname{Re}(x^\mu e^{\lambda x}) = x^\mu e^{\alpha x} \cos(\beta x), x \mapsto \tilde{y}_2(x) = \operatorname{Im}(x^\mu e^{\lambda x}) = x^\mu e^{\alpha x} \sin(\beta x)$).

Beispiele.

1. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''' - y'' + y' - y = 0$ ist $\chi(t) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t^2 + 1)(t - 1) = (t - i)(t + i)(t - 1)$. Daher erhält man das komplexe Fundamentalsystem $x \mapsto (e^{ix}, e^{-ix}, e^x)$ und das reelle Fundamentalsystem $x \mapsto (\cos x, \sin x, e^x)$.
2. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ist $\chi(t) = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2 = (t - i)^2(t + i)^2$. Daher erhält man das komplexe Fundamentalsystem $x \mapsto (e^{ix}, x e^{ix}, e^{-ix}, x e^{-ix})$ und das reelle Fundamentalsystem $x \mapsto (\cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x)$.
3. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''' - y'' = 0$ ist $\chi(t) = t^3 - t^2 = t^2(t - 1)$. Daher erhält man das Fundamentalsystem $x \mapsto (1, x, e^x)$.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1. Das Riemannsche Integral über Quaderbereichen

Wir betrachten beschränkte Funktionen $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ mit $\forall_{1 \leq k \leq n} I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$. Der Ordinatensmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in Q \wedge y \in \overline{0f(x)}\}$ soll ein ernünftiges (vorzeichenversehenes) $(n+1)$ -dimensionales Volumen zugeordnet werden.

A. Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals über Intervallen

Wir übertragen die Begriffe der eindimensionalen Integralrechnung aus Kapitel 4.5:

- **Zerlegung:** Für $n = 1$ ist eine Zerlegung eine Teilmenge $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\tilde{N}} = b\}$ des Intervalls $I = [a, b]$ und liefert Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Für $n > 1$ ist eine Zerlegung ein kartesisches Produkt $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$, das Teilquader $Q_{k_1, \dots, k_n} = I_{1, k_1} \times \dots \times I_{n, k_n}$ liefert. Durch eine bijektive Zuordnung $\{(k_1, \dots, k_n)\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ erhält man die Teilquader $Q_1, \dots, Q_N$ mit $Q_k = I_k^{(1)} \times \dots \times I_k^{(n)}$.
- **Inhalt und Feinheit:** Für $n = 1$ ist der Inhalt eines Teilintervalls $|I_k| = \Delta x_k$ und die Feinheit einer Zerlegung $\|Z\| = \max_{1 \leq k \leq \tilde{N}} |I_k|$. Für $n > 1$ ist der Inhalt eines Teilquaders $|Q_k| = |I_k^{(1)}| \cdots |I_k^{(n)}|$ und die Feinheit einer Zerlegung $\|Z\| = \max\{\|Z_1\|, \dots, \|Z_n\|\}$.
- **Verfeinerung:** Für $n = 1$ ist Z' genau dann feiner als Z , wenn $Z' \supset Z$ gilt. Für $n > 1$ ist Z' genau dann feiner als Z , wenn $\forall_{1 \leq k \leq n} Z'_k$ feiner als Z_k gilt (d.h. alle Quaderecken von Z sind auch Quaderecken von Z').
- **Riemannsche Summen und Variation** von f bzgl. Z : Die Riemannsche Ober-summe ist

$$\overline{R}_f(Z) = \sum_{k=1}^N M_k |Q_k|$$

mit $M_k = \sup_{x \in Q_k} f(x)$. Die Riemannsche Untersumme ist

$$\underline{R}_f(Z) = \sum_{k=1}^N m_k |Q_k|$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

mit $m_k = \inf_{x \in Q_k} f(x)$. Dabei existieren M_k und m_k stets, da $f(Q_k) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nichtleer ist. Die Variation oder Schwankungssumme von f bzgl. Z ist

$$V_f(Z) = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) = \sum_{k=1}^N |\Delta f|_{Q_k} |Q_k|$$

mit $|\Delta f|_{Q_k} = \sup\{|f(x) - f(\bar{x})| \mid x, \bar{x} \in Q_k\}$.

- **Riemannsche Ober- und Unterintegral:** Das Riemannsche Oberintegral ist

$$\overline{R}_f = \inf\{\overline{R}_f(Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung}\}$$

und das Riemannsche Unterintegral ist

$$\underline{R}_f = \sup\{\underline{R}_f(Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung}\}.$$

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist über dem abgeschlossenen Quader genau dann Riemann-integrierbar, wenn $\overline{R}_f = \underline{R}_f$ gilt. Das Riemann-Integral ist dann

$$\overline{R}_f = \underline{R}_f = R_f = \int_Q f(x) dx = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n).$$

Bemerkung. Auch die Kriterien der eindimensionalen Integralrechnung aus Kapitel 4.5 lassen sich sinngemäß übertragen:

- Satz 4.5.1 liefert die Kennzeichnung der Riemann-Integrierbarkeit:

$$f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ Riemann-integrierbar} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\text{Zerlegung } Z} V_f(Z) < \varepsilon$$

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Es sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $R_f = \int_Q f(x) dx$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q mit $R_f + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{R}_f(Z_1)$ und $R_f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{R}_f(Z_2)$. Da die Zerlegung $Z = Z_1 \cup Z_2$ feiner als Z_1 bzw. Z_2 ist, gilt $\overline{R}_f(Z) \leq \overline{R}_f(Z_1)$ bzw. $\underline{R}_f(Z) \geq \underline{R}_f(Z_2)$ und man erhält

$$V_f(Z) = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) \leq \overline{R}_f(Z_1) - \underline{R}_f(Z_2) < \left(R_f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(R_f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

„ $\Leftarrow$ “ Zu zeigen ist $\underline{R}_f = \overline{R}_f$. Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ existiert nun eine Zerlegung Z mit $V_f(Z) = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) < \varepsilon$. Wegen $\underline{R}_f(Z) \leq \underline{R}_f \leq \overline{R}_f \leq \overline{R}_f(Z)$ gilt dann auch $\overline{R}_f - \underline{R}_f < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $\underline{R}_f = \overline{R}_f$. □

- Satz 4.5.2 liefert eine hinreichende Bedingung der Riemann-Integrierbarkeit:

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ Riemann-integrierbar}$$

7.1. Das Riemannsche Integral über Quaderbereichen

- Ein Zwischenpunktvektor zur Zerlegung Z ist $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ mit $\forall_{k=1}^N \bar{x}_k \in Q_k$ und eine Riemannsche Summe von f bzgl. Z und $\bar{x}$ ist $R_f(Z, \bar{x}) = \sum_{k=1}^N f(\bar{x}_k) |Q_k|$. Für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ liefert Satz 4.5.3 damit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|Z_l\| = 0 \Rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} R_f(Z_l, \bar{x}_l) = \int_Q f(x) dx$$

und ein Korollar davon ist

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} (\|Z\| < \delta \Rightarrow \left| R_f(Z, \bar{x}) - \int_Q f(x) dx \right| < \varepsilon)$$

bzw. in kurzer Schreibweise $\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} R_f(Z, \bar{x}) = \int_Q f(x) dx$.

Die Grundeigenschaften der eindimensionalen Integralrechnung lassen sich ebenfalls auf beschränkte Funktionen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ übertragen.

- Wenn f auf Q Riemann-integrierbar ist, ist gemäß Satz 4.5.4 auch $|f|$ auf $|Q|$ Riemann-integrierbar mit

$$\left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ und finden dazu für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit $V_{|f|}(Z) < \varepsilon$. Für jede Zerlegung Z von Q folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\forall_{x, x' \in Q_k} ||f(x)| - |f(x')|| \leq |f(x) - f(x')| \leq |\Delta f|_{Q_k} \Rightarrow \left| \Delta |f| \right|_{Q_k} \leq |\Delta f|_{Q_k}$$

und daher

$$V_{|f|}(Z) = \sum_{k=1}^N \left| \Delta |f| \right|_{Q_k} |Q_k| \leq \sum_{k=1}^N |\Delta f|_{Q_k} |Q_k| = V_f(Z).$$

Da f Riemann-integrierbar ist, existiert eine Zerlegung Z mit $V_f(Z) < \varepsilon$, also mit $V_{|f|}(Z) < \varepsilon$.

Nun zeigen wir die Dreiecksungleichung der Integralrechnung und verwenden dazu die Eigenschaft $\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} R_f(Z, \bar{x}) = \int_Q f(x) dx$. Für beliebige Riemannsche Summen gilt

$$|R_f(Z, \bar{x})| = \left| \sum_{k=1}^N f(\bar{x}_k) |Q_k| \right| \leq \sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_k)| |Q_k| = R_{|f|}(Z, \bar{x}).$$

Da $|\cdot|$ stetig ist, liefert der Grenzübergang die angegebene Ungleichung. $\square$

B. Der Satz von Fubini für Quaderbereiche

Wir führen die Berechnung von **Mehrfachintegralen** auf die iterierte Berechnung von Einfachintegralen – etwa mit Hilfe von Stammfunktionen – zurück.

Lemma 7.1. $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ seien Quader und $x \in P \mapsto g(x) \in \mathbb{R}$, $y \in Q \mapsto h(y) \in \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar. Dann ist auch $(x, y) \in P \times Q \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mapsto f(x, y) = g(x)h(y) \in \mathbb{R}$ über dem Quader $P \times Q$ Riemann-integrierbar mit

$$\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \left(\int_P g(x) dx \right) \left(\int_Q h(y) dy \right).$$

Beweis. Die Funktionen g und h sind nach Voraussetzung Riemann-integrierbar und damit beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0$ mit $\forall_{x \in P} |g(x)| \leq M$ und $\forall_{y \in Q} |h(y)| \leq M$.

1. Integrierbarkeit von f :

Zerlegungen Z_1 von P und Z_2 von Q liefern Zerlegungen $Z = Z_1 \times Z_2$ von $P \times Q$ und umgekehrt. Für jeweilige Teilquader P_j , Q_k und $P_j \times Q_k$ gilt

$$\begin{aligned} (x, y), (x', y') &\in P_j \times Q_k \\ \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| &= |(g(x) - g(x'))h(y) + (h(y) - h(y'))g(x')| \\ &\leq |(g(x) - g(x'))h(y)| + |(h(y) - h(y'))g(x')| \\ &\leq M(|g(x) - g(x')| + |h(y) - h(y')|) \\ &\leq M(|\Delta g|_{P_j} + |\Delta h|_{Q_k}) \end{aligned}$$

und damit $|\Delta f|_{P_j \times Q_k} \leq M(|\Delta g|_{P_j} + |\Delta h|_{Q_k})$. Falls nun für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Zerlegungen Z_1 bzw. Z_2 so gewählt werden, dass $V_g(Z_1) < \frac{\varepsilon}{2M|Q|}$ bzw. $V_h(Z_2) < \frac{\varepsilon}{2M|P|}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} V_f(Z) &= \sum_{j,k} |\Delta f|_{P_j \times Q_k} |P_j \times Q_k| \\ &\leq \sum_{j,k} M(|\Delta g|_{P_j} + |\Delta h|_{Q_k}) \underbrace{|P_j \times Q_k|}_{=|P_j| \cdot |Q_k|} \\ &= M \cdot \left[\left(\sum_j |\Delta g|_{P_j} |P_j| \right) \sum_k |Q_k| + \left(\sum_k |\Delta h|_{Q_k} |Q_k| \right) \sum_j |P_j| \right] \\ &= M \cdot (V_g(Z_1) \cdot |Q| + V_h(Z_2) \cdot |P|) < \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. f ist Riemann-integrierbar.

2. Integral von f :

Zwischenpunktvektoren $\bar{x}$ zu Z_1 und $\bar{y}$ zu Z_2 liefern Zwischenpunktvektoren $(\bar{x}, \bar{y})$ zu $Z = Z_1 \times Z_2$ und umgekehrt. Für diese gilt

$$\begin{aligned} R_f(Z, (\bar{x}, \bar{y})) &= \sum_{j,k} \underbrace{f(\bar{x}_j, \bar{y}_k)}_{=g(\bar{x}_j)h(\bar{y}_k)} |P_j \times Q_k| \\ &= \left(\sum_j g(\bar{x}_j) |P_j| \right) \left(\sum_k h(\bar{y}_k) |Q_k| \right) \\ &= R_g(Z_1, \bar{x}) \cdot R_h(Z_2, \bar{y}). \end{aligned}$$

Wegen $\|Z_1\|, \|Z_2\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|Z\| \rightarrow 0$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

□

Satz 7.1.1. Satz von Fubini für Quaderbereiche

$(x, y) \in P \times Q \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar und für alle $x \in P$ existiere $F(x) = \int_Q f(x, y) dy$. Dann ist F über P Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_P F(x) dx.$$

Beweis.

1. Integrierbarkeit von F :

Für eine Zerlegung $Z = Z_1 \times Z_2$ von $P \times Q$ mit **Teilquadern** $P_j \times Q_k$ gilt

$$\begin{aligned} \forall_{x, x' \in P_j} |F(x) - F(x')| &= \left| \int_Q (f(x, y) - f(x', y)) dy \right| \\ &= \left| \sum_k \int_{Q_k} (f(x, y) - f(x', y)) dy \right| \\ &\leq \sum_k \left| \int_{Q_k} (f(x, y) - f(x', y)) dy \right| \\ &\leq \sum_k \int_{Q_k} |f(x, y) - f(x', y)| dy \leq \sum_k |\Delta f|_{P_j \times Q_k} |Q_k| \end{aligned}$$

und damit auch

$$|\Delta F|_{P_j} \leq \sum_k |\Delta f|_{P_j \times Q_k} |Q_k|.$$

Falls nun für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Zerlegung Z so gewählt wird, dass $V_f(Z) < \varepsilon$ gilt, folgt:

$$V_F(Z_1) = \sum_j |\Delta F|_{P_j} |P_j| \leq \sum_j \left(\sum_k |\Delta f|_{P_j \times Q_k} |Q_k| \right) |P_j| \quad (7.1)$$

$$= \sum_{j,k} |\Delta f|_{P_j \times Q_k} |Q_k \times P_j| = V_f(Z) < \varepsilon, \quad (7.2)$$

d.h. F ist Riemann-integrierbar.

2. Integral von F :

Da für eine beliebige Zerlegung $Z = Z_1 \times Z_2$ und einen beliebigen Zwischenpunktvektor $\bar{x}$ zu Z_1 stets $\underline{R}_F(Z_1) \leq R_F(Z_1, \bar{x}) \leq \overline{R}_F(Z_1)$ sowie $\underline{R}_F(Z_1) \leq \int_P F(x) dx \leq \overline{R}_F(Z_1)$ gilt, erhält man

$$\left| R_F(Z_1, \bar{x}) - \int_P F(x) dx \right| \leq \overline{R}_F(Z_1) - \underline{R}_F(Z_1) = V_F(Z_1) \stackrel{(7.1)}{\leq} V_f(Z). \quad (7.3)$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Weiter liefert obiges Lemma mit $x \in P_j \mapsto g(x) = 1$ und $y \mapsto h(y) = f(\bar{x}_j, y)$ für alle Teilquader $P_j \times Q$ stets

$$\begin{aligned}
 \int_{P_j \times Q} f(\bar{x}_j, y) d(x, y) &= \int_{P_j \times Q} g(x) h(y) d(x, y) = \left(\int_{P_j} g(x) dx \right) \left(\int_Q h(y) dy \right) \\
 &= \left(\int_{P_j} 1 dx \right) \left(\int_Q f(\bar{x}_j, y) dy \right) = |P_j| F(\bar{x}_j) \Rightarrow R_F(Z_1, \bar{x}) \\
 &= \sum_j F(\bar{x}_j) |P_j| \\
 &= \sum_j \int_{P_j \times Q} f(\bar{x}_j, y) d(x, y) \\
 &= \sum_{j,k} \int_{P_j \times Q_k} f(\bar{x}_j, y) d(x, y).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left| R_F(Z_1, \bar{x}) - \int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) \right| = \quad (7.4)$$

$$\left| \sum_{j,k} \int_{P_j \times Q_k} f(\bar{x}_j, y) d(x, y) - \sum_{j,k} \int_{P_j \times Q_k} f(x, y) d(x, y) \right| \quad (7.5)$$

$$= \left| \sum_{j,k} \int_{P_j \times Q_k} (f(\bar{x}_j, y) - f(x, y)) d(x, y) \right| \leq \sum_{j,k} \int_{P_j \times Q_k} |f(\bar{x}_j, y) - f(x, y)| d(x, y) \quad (7.6)$$

$$\leq \sum_{j,k} |\Delta f|_{P_j \times Q_k} |P_j \times Q_k| = V_f(Z). \quad (7.7)$$

Aus (7.3) und (7.4) folgt nun $\left| \int_P F(x) dx - \int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) \right| \leq 2V_f(Z)$. Da aber zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit $2V_f(Z) < \varepsilon$ existiert, gilt $\int_P F(x) dx = \int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y)$.

□

Bemerkung.

1. Nach Satz 7.1.1 und Satz 5.5.1 gilt für eine stetige Funktion $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ stets

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

unabhängig von der Reihenfolge.

2. Aus der Existenz von

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy$$

folgt nicht die Existenz von

$$\int_Q f(x, y) d(x, y)$$

auf $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Beispiel. Es sei $f : Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(x, y) \in Q \mapsto f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{für } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

definiert.

- Dann existiert für alle $y \in [0, 1]$ die Funktion

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 1 dx & \text{für } y \in \mathbb{Q} \\ \int_0^1 2x dx & \text{für } y \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 1,$$

also existiert auch

$$\int_0^1 F(y) dy = \int_0^1 1 dy = 1.$$

Es ist daher

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = 1.$$

- Sei nun $Z = Z_1 \times Z_2$ eine beliebige Zerlegung von $[0, 1] \times [0, 1]$ mit etwa $Z_1 = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$ sowie $Z_2 = \{0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = 1\}$ und o.B.d.A. sei $x_l = \frac{1}{2} \in Z_1$. In den Teilrechtecken $Q_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ gilt dann

$$|\Delta f|_{Q_{jk}} = \begin{cases} 1 - 2x_{j-1} & \text{für } 0 \leq j \leq l \\ 2x_j - 1 & \text{für } l + 1 \leq j \leq N \end{cases},$$

also

$$\begin{aligned} V_f(Z) &= \sum_{j,k} |\Delta f|_{Q_{jk}} |Q_{jk}| = \sum_{j,k} |\Delta f|_{Q_{jk}} \Delta x_j \cdot \Delta y_k = \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=1}^N |\Delta f|_{Q_{jk}} \Delta x_j \right) \Delta y_k \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^M \Delta y_k \right)}_{=1} \left(\sum_{j=1}^l (1 - 2x_{j-1}) \Delta x_j + \sum_{j=l+1}^N (2x_j - 1) \Delta x_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^l \Delta x_j + \sum_{j=l+1}^N 2x_j \Delta x_j \right) - \left(\sum_{j=1}^l 2x_{j-1} \Delta x_j + \sum_{j=l+1}^N \Delta x_j \right) \\ &= R_g(Z_1, \bar{x}) - R_h(Z_1, \bar{x}') \end{aligned}$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

mit den Riemannschen Summen $R_g(Z_1, \bar{x})$ bzw. $R_h(Z_1, \bar{x}')$ der stetigen Funktionen

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

bzw.

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

für $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ bzw. $\bar{x}' = (x_0, \dots, x_{N-1})$. Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} V_f(Z) &= \lim_{\|Z_1\| \rightarrow 0} R_g(Z_1, \bar{x}) - \lim_{\|Z_1\| \rightarrow 0} R_h(Z_1, \bar{x}') \\ &= \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

d.h. f ist über Q nicht Riemann-integrierbar.

7.2. Das Riemannsche Integral über Jordan-messbaren Bereichen

Wir erweitern den Integralbegriff auf **beschränkte Funktionen** über (nicht notwendig quaderförmigen) beschränkten Bereichen $B \subset \mathbb{R}^n$. Dabei ist jeder Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ die sog. charakteristische Funktion

$$x \mapsto \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \notin B \end{cases}$$

zugeordnet. Ist eine Abbildung $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben und $Q \supset B$ ein – da B beschränkt ist, existierender – beliebiger Quader, so ist die triviale Fortsetzung $\chi_B f$ von f durch

$$x \in Q \mapsto \chi_B f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \in Q \setminus B \end{cases}$$

definiert.

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem beschränkten Bereich B heißt (über B) **Riemann-integrierbar**, wenn ihre triviale Fortsetzung $\chi_B f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem (und damit jedem) Quader $Q \supset B$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall sei

$$\int_B f(x) dx = \int_Q \chi_B f(x) dx.$$

Bemerkung.

1. Die Integrierbarkeit von f über B hängt also von der Funktion f („Höhe“) und von dem Bereich B („Grundfläche“) ab. Dabei ist jedoch $\chi_B f$ auf Q – selbst wenn f auf B stetig ist – i.A. **unstetig**.

7.2. Das Riemannsche Integral über Jordan-messbaren Bereichen

- Wir untersuchen zunächst, ob die Funktion $x \in B \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ über B integrierbar ist. Nach der Regel

$$\begin{array}{lll} \text{Volumen (im } \mathbb{R}^{n+1}) & = & \text{Grundfläche (im } \mathbb{R}^n) \cdot \text{Höhe} \\ \int_B 1 dx & = & \mu(B) \cdot 1 \end{array}$$

muss die Menge B in diesem Fall „messbar“ sein.

Definition. Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-messbar**, wenn (sie beschränkt ist und) für einen Quader $Q \supset B$ das Riemann-Integral

$$\mu(B) = \int_B 1 dx = \int_Q \chi_B(x) dx$$

existiert, wobei $\mu(B)$ Jordan-Maß von B heißt. Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-Nullmenge**, wenn sie das **Jordan-Maß** $\mu(B) = 0$ besitzt.

Bemerkung.

- Diese Definition des Jordan-Maßes $\mu(B) = \int_B 1 dx$ ist unbefriedigend, da ein „Flächeninhalt“ durch ein „Volumen“ definiert wird.
- Jordan-Nullmengen N können keine Innenpunkte besitzen, denn sonst gäbe es einen Würfel $W \subset N$ mit $\mu(N) \geq \mu(W) = |W| > 0$. Für die Menge $\dot{N}$ aller Innenpunkte der Menge N gilt also: N ist Jordan-Nullmenge $\Rightarrow \dot{N} = \emptyset$.

Beispiel. Es gilt offenbar $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(Q) = |Q|$. Die Menge $B = Q \cap \mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \in Q \subset \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist nicht Jordan-messbar, da für alle Teilquader Q_{jk} einer beliebigen Zerlegung Z von Q stets $|\Delta \chi_B(x)|_{Q_{jk}} = 1$ gilt und damit $V_{\chi_B}(Z) = |Q|$ ist.

Bemerkung.

- Man hat lange versucht, jeder (beschränkten) Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Maß $\mu(B)$ mit den Minimaleigenschaften
 - (1) [**Positivität**] $\mu(B) \geq 0$
 - (2) [**Bewegungsinvarianz**] Kongruente Mengen haben das gleiche Maß
 - (3) [**Normierung**] $\mu(Q) = |Q|$ für Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$
 - (4) [**Additivität**] $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
 zuzuordnen. Für $n \geq 3$ existiert ein solches Maß jedoch nicht (**Kugelparadoxon** von BANACH-TARSKI) und für $1 \leq n \leq 2$ ist ein solches Maß nicht eindeutig.
- Die **Jordansche Maßtheorie** ($\rightarrow$ **Riemannsche Integrationstheorie**) liefert ein Maß $\mu(B)$ nur für äußerst „gutartige“ Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$. Die Lebesguesche Maßtheorie ($\rightarrow$ **Lebesguesche Integrationstheorie**) liefert ein Maß $\lambda(B)$ für eine viel größere Anzahl von Mengen (aber auch nicht für alle). Man muss stets das Lebesgue-Maß bzw. die (Lebesgue-) Nullmenge bzw. das Lebesgue-Integral und das Jordan-Maß bzw. die Jordan-Nullmenge bzw. das Riemann-Integral unterscheiden. Im Lebesgueschen Sinne ist etwa $B = Q \cap \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ messbar mit $\lambda(B) = 0$.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Definition. Eine **Quadersumme (Quadergebäude)** $S \subset \mathbb{R}^n$ ist eine endliche – evtl. leere – Vereinigung $S = \bigcup_{j=1}^r Q_j$ nichtentarteter Quader $Q_1, \dots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ mit paarweise disjunkten **Innenpunktmengen**, d.h. $\forall_{j \neq k} \overset{\circ}{Q}_j \cap \overset{\circ}{Q}_k = \emptyset$. Der Inhalt einer Quadersumme sei $|S| = \sum_{j=1}^r |Q_j|$.

Satz 7.2.1.

1. $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren Quadersummen $S \subset B \subset T$ mit $|T| - |S| < \varepsilon$
2. $N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-Nullmenge $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Quadersumme $T \supset N$ mit $|T| < \varepsilon$

Beweis.

1. Nach Definition ist die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ genau dann Jordan-messbar, wenn für die charakteristische Funktion $\chi_B(x) = f(x)$ und einen Quader $Q \supset B$ das Riemann-Integral

$$\int_Q f(x) dx$$

existiert.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Voraussetzung existiert zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $Q \supset B$ mit $V_f(Z) < \varepsilon$. Dabei gilt

$$\overline{R}_f(Z) = \sum_{Q_k \subset \mathbb{C}B} \underbrace{M_k}_{=0} \cdot |Q_k| + \sum_{Q_k \cap B \neq \emptyset} \underbrace{M_k}_{=1} \cdot |Q_k| = \sum_{Q_k \cap B \neq \emptyset} |Q_k|$$

sowie

$$\underline{R}_f(Z) = \sum_{Q_k \subset B} \underbrace{M_k}_{=1} \cdot |Q_k| + \sum_{Q_k \cap \mathbb{C}B \neq \emptyset} \underbrace{M_k}_{=0} \cdot |Q_k| = \sum_{Q_k \subset B} |Q_k|. \quad \underbrace{\text{Für die Quadersummen}}$$

$$S = \bigcup_{Q_k \subset B} Q_k \subset B \subset \bigcup_{Q_k \cap B \neq \emptyset} Q_k = T$$

gilt daher $|T| - |S| = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) = V_f(Z) < \varepsilon$.

„ $\Leftarrow$ “ Die nach Voraussetzung existierenden Quadersummen $S \subset B \subset T$ mit $|T| - |S| < \varepsilon$ lassen sich als endliche (!) Vereinigungen – evtl. nach weiteren Unterteilungen – zu Zerlegungen Z_1 bzw. Z_2 eines umfassenden Quaders $Q \supset B$ ergänzen. Für die gemeinsame Verfeinerung Z von Z_1 und Z_2 gilt dann

$$\underline{R}_f(Z) \underbrace{\geq}_{Z \text{ ist mindestens so fein wie } Z_1} \underline{R}_f(Z_1) \underbrace{\geq}_{\text{innen können Teilquader hinzukommen}} |S|$$

sowie

$$\overline{R}_f(Z) \underbrace{\leq}_{Z \text{ ist mindestens so fein wie } Z_2} \overline{R}_f(Z_2) \underbrace{\leq}_{\text{außen können Teilquader wegfallen}} |T|,$$

also $V_f(Z) = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) \leq |T| - |S| < \varepsilon$.

2. Nach Definition ist eine Jordan-Nullmenge eine Jordan-messbare Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$\int_Q f(x) dx = 0$$

mit der charakteristische Funktion $\chi_N(x) = f(x)$ und einem Quader $Q \supset N$.

„ $\Rightarrow$ “ Bei einer Jordan-Nullmenge N gilt für jede Quadersumme $S \subset N$ stets $S = \emptyset$ und damit $|S| = 0$, sonst besäße N Innenpunkte. Die Anwendung von 1. liefert nun die Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “ Mit $S = \emptyset \subset N$ ist N nach 1. insbesondere Jordan-messbar, d.h. es gilt

$$0 \leq \underline{R}_f = \overline{R}_f = \int_Q f(x) dx.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man nun eine Zerlegung Z von $Q \supset T \supset N$ konstruieren mit

$$0 \leq \overline{R}_f \leq \overline{R}_f(Z) \leq |T| < \varepsilon,$$

d.h. es ist $\overline{R}_f = 0$.

□

Bemerkung. Satz 7.2.1 kann als *intrinsische*, integralfreie Definition der Jordan-Messbarkeit verwendet werden. Bei der Entscheidung der Jordan-Messbarkeit einer beschränkten Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ spielen dann nur endliche Vereinigungen von Quadern eine Rolle, die B von innen bzw. von außen approximieren. Auch das Jordan-Maß selbst kann integralfrei beschrieben werden.

Definition. Für eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ existiert $\underline{\mu}(B) = \sup\{|S| : S \subset B \text{ ist Quadersumme}\}$ bzw. $\overline{\mu}(B) = \inf\{|T| : T \supset B \text{ ist Quadersumme}\}$ und heißt das innere Jordan-Maß bzw. das äußere Jordan-Maß von B .

Korollar.

1. $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Leftrightarrow \underline{\mu}(B) = \overline{\mu}(B) [= \mu(B)]$
2. $N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-Nullmenge $\Leftrightarrow \overline{\mu}(N) = 0 [= \mu(N)]$

Beweis.

1. Nach Satz 7.2.1 ist $B \subset \mathbb{R}^n$ genau dann Jordan-messbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Quadersummen $S \subset B \subset T$ mit $|T| - |S| < \varepsilon$ existieren.

„ $\Rightarrow$ “ Seien $S \subset B \subset T$ Quadersummen mit $|T| - |S| < \varepsilon$ für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Dann gilt wegen $|S| \leq \underline{\mu}(B) \leq \overline{\mu}(B) \leq |T|$ auch $\overline{\mu}(B) - \underline{\mu}(B) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann und stets $\underline{\mu}(B) \leq \mu(B) \leq \overline{\mu}(B)$ gilt, folgt $\overline{\mu}(B) = \mu(B) = \underline{\mu}(B)$.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

„ $\Leftarrow$ “ Nach Definition von Supremum bzw. Infimum existieren Quadersummen $S \subset B \subset T$ mit $\underline{\mu}(B) - \frac{\varepsilon}{2} < |S|$ bzw. $\overline{\mu}(B) + \frac{\varepsilon}{2} > |T|$. Wegen $\underline{\mu}(B) = \overline{\mu}(B)$ folgt dann $|T| - |S| < \varepsilon$, d.h. B ist Jordan-messbar mit $\underline{\mu}(B) = \mu(B) = \overline{\mu}(B)$.

2. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten Aussage. □

Bemerkung. Wir geben einige Eigenschaften des inneren und äußeren Jordan-Maßes im $\mathbb{R}^n$ an:

1. $A \subset B \Rightarrow \underline{\mu}(A) \leq \underline{\mu}(B)$ und $\overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(B)$
2. $\underline{\mu}(\mathring{B}) = \underline{\mu}(B)$ und $\overline{\mu}(\overline{B}) = \overline{\mu}(B)$
3. $\overline{\mu}(Q \setminus B) = |Q| - \underline{\mu}(B)$ für einen Quader $Q \supset B$
4. $\overline{\mu}(\partial B) = \overline{\mu}(B) - \underline{\mu}(B)$

Beweis.

1. Die Aussage ist eine direkte Folgerung der Definition von Supremum und Infimum.
2. Zunächst zeigen wir $\underline{\mu}(\mathring{B}) = \underline{\mu}(B)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $S \subset B$ eine Quadersumme mit $\underline{\mu}(B) - \frac{\varepsilon}{2} < |S|$. Eine Verkleinerung der Teilquader $Q \subset B$ von $S \subset B$ um ein $\delta > 0$ in jeder Dimension liefert nun abgeschlossene Teilquader $Q_\delta \subset \mathring{Q} \subset \mathring{B}$. Insgesamt erhält man eine Quadersumme $S_\delta \subset \mathring{B}$, wobei für genügend kleine $\delta > 0$ stets $|S| - |S_\delta| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Es folgt

$$\underline{\mu}(B) \underbrace{\geq}_{B \supset \mathring{B}} \underline{\mu}(\mathring{B}) \underbrace{\geq}_{\mathring{B} \supset S_\delta} |S_\delta| \underbrace{\geq}_{|S| - |S_\delta| < \frac{\varepsilon}{2}} |S| - \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\geq}_{\underline{\mu}(B) - \frac{\varepsilon}{2} < |S|} \underline{\mu}(B) - \varepsilon,$$

also $0 \leq \underline{\mu}(B) - \underline{\mu}(\mathring{B}) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, gilt $\underline{\mu}(\mathring{B}) = \underline{\mu}(B)$.

Der zweite Teil der Aussage ist trivial, da für jede Quadersumme $T \subset \mathbb{R}^n$ wegen $T = \overline{T}$ stets $B \subset T \Leftrightarrow \overline{B} \subset T$ gilt.

3. Zu jeder Quadersumme $S \subset B$ gibt es genau eine **Ergänzungsquadersumme** $\tilde{S} \supset Q \setminus B$ mit $S \cup \tilde{S} = Q$ und $|S| + |\tilde{S}| = |Q|$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(Q \setminus B) &= \inf\{|\tilde{S}| : \tilde{S} \supset Q \setminus B\} = \inf\{|Q| - |S| : S \subset B\} \\ &= |Q| - \sup\{|S| : S \subset B\} = |Q| - \underline{\mu}(B) \end{aligned}$$

4. Zunächst gilt

$$\overline{\mu}(\partial B) = \overline{\mu}(Q \setminus (Q \setminus \partial B)) = |Q| - \underline{\mu}(Q \setminus \partial B)$$

und analog $\overline{\mu}(\overline{B}) = |Q| - \underline{\mu}(Q \setminus \overline{B})$. Für einen Quader $Q \supset B$ gilt weiter $Q \setminus \partial B = \mathring{B} \cup Q \setminus \overline{B}$ und wegen $\mathring{B} \cap Q \setminus \overline{B} = \emptyset$ folgt

$$\begin{aligned} |Q| - \overline{\mu}(\partial B) &= \underline{\mu}(Q \setminus \partial B) = \underline{\mu}(\mathring{B}) + \underline{\mu}(Q \setminus \overline{B}) = \underline{\mu}(\mathring{B}) + |Q| - \overline{\mu}(\overline{B}) \\ \Rightarrow \overline{\mu}(B) - \underline{\mu}(B) &= \overline{\mu}(\overline{B}) - \underline{\mu}(\mathring{B}) = \overline{\mu}(\partial B). \end{aligned}$$

□

Satz 7.2.2.

1. $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow \mathring{B}$ und $\overline{B}$ Jordan-messbar mit $\mu(\mathring{B}) = \mu(\overline{B}) = \mu(B)$
2. $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Leftrightarrow \partial B$ Jordan-Nullmenge

Beweis.

1. Für jede beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt stets $\underline{\mu}(\mathring{B}) \leq \overline{\mu}(\mathring{B})$. Damit folgt aus

$$\overline{\mu}(\mathring{B}) \underbrace{\leq}_{\mathring{B} \subset B} \overline{\mu}(B) \underbrace{=}_{B \text{ ist Jordan-messbar}} \underline{\mu}(B) = \underline{\mu}(\mathring{B})$$

die Jordan-Messbarkeit von $\mathring{B}$ mit $\mu(\mathring{B}) = \overline{\mu}(B) = \underline{\mu}(B) = \mu(B)$. Analog gilt $\underline{\mu}(\overline{B}) \leq \overline{\mu}(\overline{B})$ und

$$\overline{\mu}(\overline{B}) = \overline{\mu}(B) \underbrace{=}_{B \text{ ist Jordan-messbar}} \underline{\mu}(B) \underbrace{\leq}_{B \subset \overline{B}} \underline{\mu}(\overline{B}),$$

d.h. $\overline{B}$ ist Jordan-messbar mit $\mu(\overline{B}) = \mu(B)$.

2. Für jede beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt stets $\overline{\mu}(\partial B) = \overline{\mu}(B) - \underline{\mu}(B)$. Damit folgt:
 B Jordan-messbar $\Leftrightarrow \overline{\mu}(B) = \underline{\mu}(B) \Leftrightarrow \overline{\mu}(\partial B) = 0 \Leftrightarrow \partial B$ Jordan-Nullmenge.

□

Beispiel. Damit eine Menge Jordan-messbar ist, muss ihr Rand „dünn“ – d.h. eine Jordan-Nullmenge – sein. Eine Menge mit einem „dicken“ Rand ist etwa $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, denn es gilt $\partial B = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{in jeder Umgebung von } x \text{ liegt ein Punkt aus } B \text{ und ein Punkt aus } \mathbb{R} \setminus B\} = [0, 1]$.

Lemma 7.2. Sei $\varphi : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Kompaktum K Lipschitz-stetig. Dann gilt $\overline{\mu}(\varphi[K]) \leq M \cdot \overline{\mu}(K)$ mit $M \geq 0$. Insbesondere gilt also: K Jordan-Nullmenge $\Rightarrow \varphi[K]$ Jordan-Nullmenge.

Beweis. Auf der kompakten Menge K besitzt f eine globale Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ mit

$$\forall_{x, x' \in K} |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq L|x - x'|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert wegen $\overline{\mu}(K) = \inf\{|T| : T \supset K \text{ ist Quadersumme}\}$ eine Quadersumme $T = \bigcup_{0 \leq l \leq r} Q_l \supset K$ mit $|T| \leq \overline{\mu}(K) + \varepsilon$. Ist dabei d_l die größte bzw. c_l die kleinste Kantenlänge eines Teilquader Q_l , so kann man – evtl. nach Unterteilung – annehmen, dass $d_l \leq 2c_l$ gilt. Da für das Verhältnis von Maximumsnorm $|\cdot|_\infty$ und euklidischer Norm $|\cdot|$ nach Satz 2.1.3 für alle $x \in \mathbb{R}^n$ stets $|x|_\infty \leq |x|$ und $|x| \leq \sqrt{n}|x|_\infty$ gilt, folgt für $K_l = K \cap Q_l$ nun

$$\begin{aligned} \forall_{x, x' \in K_l} |x - x'| &\leq \sqrt{n}|x - x'|_\infty \leq \sqrt{n}d_l \leq 2\sqrt{n}c_l \\ \Rightarrow \forall_{x, x' \in K_l} |\varphi(x) - \varphi(x')|_\infty &\leq |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq L|x - x'| \leq 2\sqrt{n}Lc_l, \end{aligned}$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

d.h. es ist $\varphi[K_l] \subset W_l$ mit einem Würfel der Kantenlänge $2\sqrt{n}Lc_l$. Wegen $K = \bigcup_{0 \leq l \leq r} K_l$ ergibt sich also $\varphi[K] = \varphi[\bigcup_{0 \leq l \leq r} K_l] = \bigcup_{0 \leq l \leq r} \varphi[K_l] \subset \bigcup_{0 \leq l \leq r} W_l$. Da die – nicht notwendige disjunkte – Vereinigung $\bigcup_{0 \leq l \leq r} W_l$ zu einer Quadersumme $S \supset \varphi[K]$ reduzierbar ist, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\varphi[K]) &\leq |S| \leq \sum_{l=0}^r |W_l| = \sum_{l=0}^r (2\sqrt{n}Lc_l)^n \\ &= \underbrace{(2\sqrt{n}Lc)^n}_{=M} \sum_{l=0}^r c_l^n \leq M \sum_{l=0}^r |Q_l| = M|T| \leq M(\bar{\mu}(K) + \varepsilon) \end{aligned}$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, erhält man die Behauptung. $\square$

Satz 7.2.3. Sei $\varphi : K \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $p < n$ auf dem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^p$ **Lipschitz-stetig** (etwa C^1 -differenzierbar auf einem Gebiet $G \supset K$). Dann ist das Bild $\varphi[K]$ eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Die Menge $\widetilde{K} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in K\} \subset \mathbb{R}^n$ ist ebenfalls abgeschlossen sowie beschränkt und daher kompakt. Außerdem ist $\widetilde{K}$ eine **Jordan-Nullmenge**, da für jedes $\varepsilon > 0$ eine Quadersummen $T \supset \widetilde{K}$ mit $|T| < \varepsilon$ gewählt werden kann. Da schließlich $\varphi : K \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, ist auch $\tilde{\varphi} : (x, 0) \in \widetilde{K} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Insgesamt ist also $\varphi[K] = \tilde{\varphi}[\widetilde{K}]$ eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. $\square$

Korollar. Ein beschränkter Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ ist dann Jordan-messbar, wenn sich der Rand ∂B als endliche Vereinigung von Bildern $\varphi[K]$ kompakter Mengen $K \subset \mathbb{R}^p$ unter C^1 -Abbildungen mit $p < n$ darstellen lässt.

Beispiel. Ein Kreis $B = K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ist Jordan-messbar, da für die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und die kompakte Menge $K = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ gilt $\varphi[K] = \partial B = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Ebenso sind alle anderen **elementar-geometrischen Objekte** (**Ellipsoide**, **Kegel**, **Paraboloide**) Jordan-messbar.

Satz 7.2.4. Ist $f : N \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einer Jordan-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so existiert

$$\int_N f(x) dx = 0.$$

Beweis. Sei $\forall_{x \in N} |f(x)| \leq M$. Da N eine Jordan-Nullmenge ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z eines Quaders $Q \supset N$ mit $|T| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für

$$T = \sum_{Q_k \cap N \neq \emptyset} Q_k \supset N.$$

Dann ist aber

$$V_{\chi_N f}(Z) = \sum_{Q_k \cap N \neq \emptyset} |\Delta f|_{Q_k} |Q_k| \leq 2M \sum_{Q_k \cap N \neq \emptyset} |Q_k| = 2M|T| < \varepsilon.$$

$\square$

Korollar.

1. Man kann Riemann-integrierbare Funktionen $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ willkürlich auf Jordan-Nullmengen $N \subset B$ abändern, ohne die Riemann-Integrierbarkeit und den Wert des Integrals zu ändern, denn wegen $\chi_B f = \chi_{B \setminus N} f + \chi_N f$ gilt

$$\int_B f(x) dx = \int_{B \setminus N} f(x) dx + \underbrace{\int_N f(x) dx}_{=0} = \int_{B \setminus N} f(x) dx + \underbrace{\int_N \tilde{f}(x) dx}_{=0} = \int_B \tilde{f}(x) dx.$$

2. Insbesondere ist

$$\int_B f(x) dx = \int_{\dot{B}} f(x) dx = \int_{\bar{B}} f(x) dx,$$

falls B Jordan-messbar ist und eines dieser Integrale existiert.

Satz 7.2.5. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Weiter sei f stetig – evtl. außer auf einer Jordan-Nullmenge $N \subset B$ („fast überall stetig“ im Jordanschen Sinne). Dann ist f über B Riemann-integrierbar.

Beweis. Mit $\tilde{f}$ ist auch $\chi_B f : Q \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und stetig bis auf eine Jordan-Nullmenge $\tilde{N} \subset N \cup \partial B$. Man kann also o.B.d.A. $f \equiv \chi_B f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{N} = N$ annehmen. Sei nun $\forall_{x \in Q} |f(x)| \leq M$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da N eine Jordan-Nullmenge ist, existiert eine Zerlegung $Z \subset Q$ mit

$$\sum_{Q_k \cap N \neq \emptyset} |Q_k| < \varepsilon.$$

Wir zerlegen Q in die Quadersummen $S = \bigcup_{Q_k \cap N \neq \emptyset} Q_k$ mit $|S| < \varepsilon$ und $T = \bigcup_{Q_k \cap N = \emptyset} Q_k$ mit $|T| \leq |Q|$. Da T als endliche Vereinigung kompakter Mengen selbst kompakt ist, ist f nach Satz 2.4.10 auf T sogar gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists_{\delta > 0} \forall_{x, x' \in T} |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Durch Übergang zu einer feineren Zerlegung $Z' \supset Z$ kann man erreichen, dass für alle Teilquader $x, x' \in Q'_k \Rightarrow |x - x'| < \delta$ gilt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} V_f(Z') &= \sum_{Q'_k \subset S} |\Delta f|_{Q'_k} |Q'_k| + \sum_{Q'_k \subset T} |\Delta f|_{Q'_k} |Q'_k| \\ &\leq 2M \sum_{Q'_k \subset S} |Q'_k| + \varepsilon \sum_{Q'_k \subset T} |Q'_k| = 2M|S| + \varepsilon|T| < \varepsilon(2M + |Q|). \end{aligned}$$

□

Satz 7.2.6. Sei $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist $\text{graph } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in B\}$ eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Sei $Q \supset B$ ein Quader. Dann ist nach Voraussetzung $\chi_B f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, d.h. es existiert eine Zerlegung $Z \subset Q$ mit $V_{\chi_B f}(Z) < \varepsilon$. Mit $M_k = \sup\{\chi_B f(x) \mid x \in Q_k\}$ und $m_k = \inf\{\chi_B f(x) \mid x \in Q_k\}$ gilt nun

$$V_{\chi_B f}(Z) = \sum (M_k - m_k) |Q_k| = \sum |Q_k \times [m_k, M_k]|.$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Wählt man im Falle $M_k = m_k$ eine größere Intervallgrenze $\widetilde{M}_k = M_k + \delta > m_k$, so erhält man eine Quadersumme

$$T = \bigcup_{M_k > m_k} Q_k \times [m_k, M_k] \cup \bigcup_{M_k = m_k} Q_k \times [m_k, \widetilde{M}_k] \supset \text{graph } \chi_B f \supset \text{graph } f$$

im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$|T| = \underbrace{\sum_{M_k > m_k} |Q_k \times [m_k, M_k]|}_{=V_{\chi_B f}(Z)} + \underbrace{\sum_{M_k = m_k} |Q_k \times [m_k, \widetilde{M}_k]|}_{< \varepsilon \text{ für ein geeignetes } \delta} < 2\varepsilon.$$

□

Beispiel. Der Rand einer Vollkugel $K_r^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die Sphäre $S_r^n = \{x \in \mathbb{R} : |x| = r\}$. Dabei ist S_r^n stückweise Graph der stetigen Abbildung

$$\varphi_{\pm}^n : x \in K_r^n \subset \mathbb{R}^n \mapsto \pm \sqrt{r^2 - |x|^2} \in \mathbb{R},$$

denn $(x, x_{n+1}) \in S_r^n \Leftrightarrow |x|^2 + |x_{n+1}|^2 = |(x, x_{n+1})|^2 = r^2 \Leftrightarrow |x|^2 \leq r$ und $x_{n+1} = \pm \sqrt{r^2 - |x|^2} \Leftrightarrow x \in K_r^{n+1}$ und $x_{n+1} = \varphi_{\pm}^n(x)$. Jetzt kann man analog zu

	$K_r^1 = [-r, r] \subset \mathbb{R}$ Jordan-messbar
$\xrightarrow{\text{Satz 7.2.5}}$	$\varphi_{\pm}^1$ über K_r^1 Riemann-integrierbar
$\xrightarrow{\text{Satz 7.2.6}}$	$S_r^1 = \text{graph } \varphi_{\pm}^1 \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-Nullmenge
$\xrightarrow{\text{Satz 7.2.2}}$	$K_r^2 \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar

induktiv schließen, dass alle n -Sphären S_r^n bzw. Kugeln K_r^{n+1} im $\mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-Nullmengen bzw. Jordan-messbar sind.

7.3. Der Satz von Fubini und der Transformationssatz für Riemann-Integrale

A. Der Satz von Fubini

Satz 7.3.1. $(x, y) \in B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar und für alle $x \in B' = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \exists_{y \in \mathbb{R}^q} (x, y) \in B\}$ existiere das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_{B_x} f(x, y) dy$$

über $B_x = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x, y) \in B\}$. Dann ist F über B' Riemann-integrierbar mit

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{B'} F(x) dx.$$

Beweis. Für einen Quader $P \times Q \supset B$ betrachten wir die charakteristischen Funktionen $\chi_B : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\chi_{B'} : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $\chi_{B_x} : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $\chi_B(x, y) = \chi_{B'}(x) \cdot \chi_{B_x}(y)$ und wegen

(1) $(x, y) \in P \times Q \mapsto \chi_B f(x, y) \in \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar

(2) Für $x \in B'$ gilt

$$\int_Q \chi_B f(x, y) dy = \int_Q \chi_{B_x} f(x, y) dy = \int_{B_x} f(x, y) dy = F(x)$$

und für $x \notin B'$ gilt

$$\int_Q \chi_B f(x, y) dy = \int_Q 0 dy = 0,$$

d.h. für alle $x \in P$ existiert

$$\tilde{F}(x) = \int_Q \chi_B f(x, y) dy = \chi_{B'} F(x)$$

liefert Satz 7.1.1 nun

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) d(x, y) &\stackrel{(1)}{=} \int_{P \times Q} \chi_B f(x, y) d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Satz 7.1.1}}{=} \int_P \tilde{F}(x) dx \stackrel{(2)}{=} \int_P \chi_{B'} F(x) dx = \int_{B'} F(x) dx. \end{aligned}$$

□

Definition. Ein Bereich $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Gestalt $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in B' \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ für eine Teilmenge $B' \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $\varphi, \psi : B' \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall_{x \in B'} \varphi(x) \leq \psi(x)$ heißt einfacher Bereich oder Normalbereich bzgl. der y -Koordinaten.

Korollar. (Integration über Normalbereichen) $\varphi, \psi : B' \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf einem Jordan-messbaren Bereich $B' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und stetig mit $\forall_{x \in B'} \varphi(x) \leq \psi(x)$. Weiter sei $(x, y) \in B \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ auf dem Normalbereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in B' \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ stetig und beschränkt. Dann existiert

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{B'} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beweis. Es sind die Voraussetzungen von Satz 7.3.1 zu überprüfen. Dazu zeigen wir:

(1) Der Normalbereich B ist Jordan-messbar, denn nach Satz 7.2.5 ist dann $(x, y) \in B \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrierbar.

Jordan-Messbarkeit: Es ist $\partial B \subset \text{graph } \psi \cup \text{graph } \varphi \cup B''$ mit $B'' = \{(x, y) \mid x \in \partial B' \text{ und } y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$. Nun untersuchen wir die einzelnen Komponenten dieser Vereinigung:

- a) Da B' Jordan-messbar ist und φ, ψ beschränkt sowie stetig sind, sind die Graphen von φ, ψ nach Satz 7.2.5 und Satz 7.2.6 Jordan-Nullmengen.
- b) Aus der Beschränktheit von φ, ψ folgt weiter $\forall_{x \in \partial B'} [\varphi(x), \psi(x)] \subset [m, M]$, d.h. $B'' \subset \partial B' \times [m, M]$. Da $\partial B'$ eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ ist, ist auch $\partial B' \times [m, M]$ eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Insgesamt ist also ∂B eine Jordan-Nullmenge, d.h. B ist nach Satz 7.2.2 Jordan-messbar.

(2) Für alle $x \in B'$ existiert

$$F(x) = \underbrace{\int_{B_x} f(x, y) dy}_{B_x = [\varphi(x), \psi(x)]} = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Riemann-Integrierbarkeit: Für alle $x \in B'$ ist $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ stetig und somit über dem Intervall $B_x = [\varphi(x), \psi(x)]$ Riemann-integrierbar.

□

Bemerkung.

1. Da $(x, y) \in B \mapsto f(x, y) = 1$ auf jedem Normalbereich $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und beschränkt ist, existiert stets das Riemann-Integral

$$\int_B 1 dx = \int_{B'} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1 dy \right) dx.$$

Daher ist jeder Normalbereich Jordan-messbar mit

$$\mu(B) = \int_{B'} (\varphi(x) - \psi(x)) dx.$$

2. Im $\mathbb{R}^2$ gilt für einen Normalbereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ bzgl. der y -Koordinaten

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Falls B auch ein Normalbereich bzgl. der x -Koordinaten ist, d.h. falls etwa $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\bar{a}, \bar{b}] \text{ und } \bar{\varphi}(y) \leq x \leq \bar{\psi}(y)\}$ gilt, erhält man zusätzlich

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{\varphi}(y)}^{\bar{\psi}(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

3. Im $\mathbb{R}^3$ gilt für einen Bereich $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b] \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \text{ und } \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ mit $B' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ sukzessive

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{B'} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y) \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Beispiel. Wegen $\mu(K_r^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-r, r] \text{ und } -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$ erhält man das Jordan-Maß

$$\mu(K_r^2) = \int_{-r}^{+r} 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right) \right]_{-r}^{+r} = r^2 \pi.$$

Korollar. (Prinzip von Cavalieri) Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\forall_{(x,y) \in B} x \in [a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ existiere das Jordan-Maß $\mu(B_x)$ von $B_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in B\}$. Dann ist $x \mapsto \mu(B_x)$ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar mit

$$\mu(B) = \int_a^b \mu(B_x) dx.$$

Bemerkung. Seien $B, \tilde{B} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\forall_{(x,y) \in B} \forall_{(x,y) \in \tilde{B}} x \in [a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ existieren die Jordan-Maße $\mu(B_x) = \mu(\tilde{B}_x)$. Dann folgt

$$\mu(B) = \int_a^b \mu(B_x) dx = \int_a^b \mu(\tilde{B}_x) dx = \mu(\tilde{B}).$$

Beispiel. Es sei $B = K_r^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$. Dann gilt $\forall_{(x,y,z) \in B} x \in [-r, +r]$ und $\forall_{x \in [-r, r]} B_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\} = K_{r^2 - x^2}^2$ mit $\mu(B_x) = (r^2 - x^2)\pi$. Also ist

$$\mu(K_r^3) = \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\pi dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{+r} = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

B. Der Transformationssatz

Bemerkung. Sei $\varphi : K = [a, b] \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\forall_{t \in K} \varphi'(t) \neq 0$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren die folgenden Integrale und nach der Substitutionsregel für eindimensionale Riemann-Integrale (Satz 4.3.4) gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Da für das Bildintervall $\varphi[K]$ gilt

$$\varphi[K] = \begin{cases} [\varphi(a), \varphi(b)] & \text{für } \forall_{t \in K} \varphi'(t) > 0 \\ [\varphi(b), \varphi(a)] & \text{für } \forall_{t \in K} \varphi'(t) < 0 \end{cases},$$

erhält man die Darstellung

$$\int_{\varphi[K]} f(x) dx = \int_K f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

Satz 7.3.2. (Transformationssatz)

Sei $\varphi : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Gebiet G stetig differenzierbar und auf der kompakten sowie Jordan-messbaren Teilmenge $K \subset G$ injektiv und regulär – d.h. $\forall_{u \in K} \det D\varphi(u) \neq 0$. Ist dann $f : \varphi[K] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existieren die folgenden Integrale und es gilt

$$\int_{\varphi[K]} f(x) dx = \int_K f(\varphi(u)) |\det D\varphi(u)| du.$$

Dabei gilt die Aussage auch dann, wenn φ auf einer Jordan-Nullmenge $N \subset K$ nicht injektiv oder nicht regulär ist.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Beweis. Wir skizzieren lediglich die Beweisidee durch Approximation der Integrale, eine Verfeinerung dieser Approximation liefert im Grenzfalle die geforderte Gleichheit. Zunächst folgt aus den Voraussetzungen des Satzes die Existenz der Integrale, d.h. es ist lediglich ihre Gleichheit zu untersuchen.

- (1) Eine Approximation von K durch Quadersummen $S = \bigcup Q_k$ liefert eine Approximation des Bildes $\varphi[K]$ durch eine Summe $\varphi[S] = \bigcup \varphi[Q_k]$ **krummflächig begrenzter Bereiche** $B_k = \varphi[Q_k]$. Für hinreichend kleine Quader Q_k gilt mit $u_k \in Q_k$ nach den Taylorschen Sätzen $\varphi|_{Q_k}(u) \approx \varphi(u_k) + D\varphi(u_k)(u - u_k)$, d.h. $\varphi|_{Q_k}$ lässt sich durch eine affin-lineare Abbildung $u \mapsto \tilde{\varphi}(u) = Au + b$ approximieren (dabei hat der Translationsanteil $b \in \mathbb{R}^n$ keinen Einfluss auf die Volumenberechnung). Also ist $B_k = \varphi[Q_k] \approx \tilde{\varphi}[Q_k]$ näherungsweise ein Parallelotop.
- (2) Für das Volumen eines Parallelotops $P \subset \mathbb{R}^n$ als Bild des Einheitswürfels $W \in \mathbb{R}^n$ unter der linearen Abbildung $u \mapsto Au$ mit einer Matrix $A = (a_1, \dots, a_n)$ gilt $\mu(P) = \mu(A[W]) = |\det(a_1, \dots, a_n)| = |\det A|$. Für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit den Kantenlängen $d_1, \dots, d_n$ folgt daher $\mu(A[Q]) = |\det(d_1 a_1, \dots, d_n a_n)| = |\det(a_1, \dots, a_n)| \cdot d_1 \cdot \dots \cdot d_n = |\det A| \cdot |Q|$. Also erhält man $\mu(B_k) \approx \mu(\tilde{\varphi}[Q_k]) = |\det D\varphi(u_k)| \cdot |Q_k|$.

Aus (1) und (2) folgt nun insgesamt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi[K]} f(x) dx &\approx \sum f(x_k) \mu(B_k) = \sum f(\varphi(u_k)) \mu(B_k) \\ &\approx \sum f(\varphi(u_k)) \cdot |\det D\varphi(u_k)| \cdot |Q_k| \approx \int_K f(\varphi(u)) |\det D\varphi(u)| du \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

1. **Ebene Polarkoordinaten:** Wir untersuchen Integrale über Kreisscheiben $K_R \subset \mathbb{R}^2$. Die Transformation

$$\phi : (r, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r \cos t, r \sin t)$$

ist C^1 -differenzierbar mit $\det D\phi(r, t) = r$. Auf $Q = [0, R] \times [-\pi, \pi]$ mit $\varphi[Q] = K_R$ ist φ injektiv – bis auf die Jordan-Nullmengen $\{0\} \times [-\pi, \pi]$ sowie $[0, R] \times \{-\pi, \pi\}$ – und regulär – bis auf die Jordan-Nullmenge $\{0\} \times [-\pi, \pi]$. Für eine stetige Funktion $f : K_R \rightarrow \mathbb{R}$ gilt also

$$\begin{aligned} \int_{K_R} f(x, y) d(x, y) &= \int_Q r \cdot f(r \cos t, r \sin t) d(r, t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r \cdot f(r \cos t, r \sin t) dr \right) dt. \end{aligned}$$

Mit $f(x, y) = \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$ für eine Funktion $\tilde{f} : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich der Spezialfall

$$\int_{K_R} f(x, y) d(x, y) = 2\pi \int_0^R r \cdot \tilde{f}(r) dr.$$

2. **Räumliche Polarkoordinaten:** Nun betrachten wir Integrale über Kugeln $K_R \subset \mathbb{R}^3$. Die Transformation

$$\phi : (r, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

ist C^1 -differenzierbar mit $\det D\phi(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$. Auf $Q = [0, R] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\phi[Q] = K_R$ ist ϕ injektiv – bis auf die Jordan-Nullmengen $\{0\} \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, R] \times \{-\pi, \pi\} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sowie $[0, R] \times [-\pi, \pi] \times \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ – und regulär – bis auf die Jordan-Nullmengen $\{0\} \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sowie $[0, R] \times [-\pi, \pi] \times \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. Für eine stetige Funktion $f : K_R \rightarrow \mathbb{R}$ gilt also

$$\begin{aligned} \int_{K_R} f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_Q r^2 \cos \vartheta f(\phi(r, \varphi, \vartheta)) d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta f(\phi(r, \varphi, \vartheta)) dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \end{aligned}$$

3. **Zylinderkoordinaten** Ein Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in K_R \text{ und } z \in [0, H]\}$ ist das Bild $\varphi[Q]$ eines Quaders $Q = [0, R] \times [-\pi, \pi] \times [0, H]$ unter der Transformation

$$\phi : (r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

mit $\det D\phi(r, \varphi, z) = r^2$.

Beispiele. Zunächst geben wir Beispiele für die Verwendung ebener Polarkoordinaten, d.h. wir betrachten Integrale über $K_R \subset \mathbb{R}^2$.

1. Mit $f \equiv 1$ erhält man

$$\mu(K_R) = \int_{K_R} 1 d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r dr \right) dt = R^2 \pi.$$

2. Die Funktion $f(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ beschreibt über der Kreisscheibe K_R die Halbkugel H_R mit

$$\begin{aligned} \mu(H_R) &= \int_{K_R} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \right]_0^R dt = \frac{2}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

3. Für die Funktion $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ gilt

$$\int_{K_R} f(x, y) d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) dt = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Integration von $f(x, y)$ über dem Quader $Q_R = [-R, R]^2$ liefert

$$\int_{Q_R} f(x, y) d(x, y) = \int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R e^{-(x^2 + y^2)} dx \right) dy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

und wegen $K_R \subset Q_R \subset K_{\sqrt{2}R}$ erhält man

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}).$$

Der Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ ergibt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Für die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ – also insbesondere $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ – folgt damit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x^2} 2x dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Nun betrachten wir Integrale über $K_R \subset \mathbb{R}^3$ und verwenden räumliche Polarkoordinaten.

4. Mit $f \equiv 1$ erhält man

$$\mu(K_R) = \int_{K_R} 1 d(x, y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

7.4. Der Flächeninhalt p -dimensionaler Flächen im $\mathbb{R}^n$

Das Jordan-Maß $\mu(B)$ im $\mathbb{R}^n$ gibt das n -dimensionale Volumen eines „festen“ Körpers $B \subset \mathbb{R}^n$ an. Dabei ist eine p -dimensionale Fläche als Bild einer kompakten Menge unter eine C^1 -Funktion $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $p < n$ nach Satz 7.2.3 eine Jordan-Nullmenge. Für solche Flächen $M \subset \mathbb{R}^n$ suchen wir einen p -dimensionalen Flächeninhalt – ein p -Areal $a_p(M)$.

Bemerkung.

1. Für eindimensionale Flächen – also Kurven – im $\mathbb{R}^n$ ist das Problem bereits in Satz 4.5.11 gelöst: Falls die Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Parameterdarstellung $t \in I \mapsto c(t) \in M$ besitzt, ist ihre Länge

$$l(M) = a_1(M) = \int_I |\dot{c}(t)| dt.$$

2. Durch Betrachtung des Flächeninhalts

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{G(x_1, \dots, x_n)} = \sqrt{\det(\langle x_\varrho, x_\delta \rangle)_{1 \leq \varrho, \delta \leq p}}$$

eines von den Vektoren $x_1, \dots, x_p$ aufgespannten p -dimensionalen Parallelogramms im $\mathbb{R}^n$ lässt sich das Verfahren aus Satz 4.5.11 verallgemeinern.

Definition. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p -dimensional parametrisierte C^1 -Fläche für $1 \leq p \leq n$, d.h. existiert eine C^1 -Parameterdarstellung $u \in B \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^n$ mit $x[B] = M$ für einen kompakten und Jordan-messbaren Parameterbereich $B \subset \mathbb{R}^p$, so sei ihr p -dimensionaler Flächeninhalt

$$a_p(M) = \int_B \sqrt{G(x_1, \dots, x_n)}(u) du,$$

wobei die **Gramsche Determinante** $G(x_1, \dots, x_p)$ das Quadrat des p -dimensionalen Flächeninhalts des von den Tangentialvektoren $x_1 = \partial_1 x, \dots, x_p = \partial_p x$ aufgespannten p -dimensionalen Parallelogramms im $\mathbb{R}^n$ angibt.

Bemerkung.

1. Die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit der Parameterdarstellung $u \in B \mapsto x(u)$ bezieht sich auf ein Gebiet $G \supset B$.
2. Ist die Parameterdarstellung nicht injektiv, so werden die Flächeninhalte mehrfach überdeckter Bereiche mehrfach gezählt. Dies ist unproblematisch für p -dimensionale Jordan-Nullmengen.

Beispiel. Wir berechnen den Flächeninhalt der Kugeloberfläche $S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $R > 0$.

(i) Die C^1 -Parameterdarstellung

$$(u, v) \mapsto x(u, v) = R \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

ist auf $Q = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ injektiv – bis auf eine Jordan-Nullmenge – und es gilt $x[Q] = S_R^2$.

(ii) Die Tangentialvektoren sind

$$x_1(u, v) = \partial_u x(u, v) = R \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$x_2(u, v) = \partial_v x(u, v) = R \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}.$$

(iii) Nun berechnen wir die Gramsche Determinante

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2)(u, v) &= \begin{vmatrix} \langle x_1(u, v), x_1(u, v) \rangle & \langle x_1(u, v), x_2(u, v) \rangle \\ \langle x_2(u, v), x_1(u, v) \rangle & \langle x_2(u, v), x_2(u, v) \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix} = R^4 \cos^2 v \end{aligned}$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Insgesamt folgt also

$$a_2(S_R^2) = \int_Q \sqrt{G(x_1, x_2)}(u, v) d(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos v dv \right) du = 4R^2\pi$$

Bemerkung. Es ist zu zeigen, dass man den Flächeninhalt $a_p(M)$ durch Grenzübergang aus den elementaren Flächeninhalten einbeschriebener Polyeder gewinnen kann. Dazu trianguliert man die Fläche (vier Punkte liegen i.A. nicht in einer Ebene). Man erhält ebene Dreiecke, deren Flächeninhalt man elementar bestimmen kann. Die Verfeinerung der Triangulierung liefert aber nur unter bestimmten Voraussetzungen das gewünschte Ergebnis.

Beispiel. (SCHWARZ, 1890)

Wir betrachten die Mantelfläche eines Kreiszylinders mit der Parameterdarstellung

$$(u, v) \mapsto x(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ v \end{pmatrix}$$

für $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$. Die definierte Formel liefert den Mantelflächeninhalt

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r dv \right) du = 2\pi rh.$$

Nun triangulieren wir die Fläche und schneiden sie dazu mit $k+1$ parallelen Ebenen, wobei „Boden“ und „Deckel“ des Zylinders jeweils in einer dieser Ebenen liegen. Auf jedem der zugehörigen Breitenkreise wählt man nun l äquidistante Stützstellen, indem man diese jeweils um $\Delta u = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{l}$ versetzt. Diese Stützstellen liefern nun $2kl$ kongruente Dreiecke. Das durch die Stützstellen

$$A = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r \cos \frac{2\pi}{l} \\ r \sin \frac{2\pi}{l} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} r \cos \frac{\pi}{l} \\ r \sin \frac{\pi}{l} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Dreieck besitzt dabei den Flächeninhalt

$$A_{\Delta} = r \sin \frac{\pi}{l} \sqrt{\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2l}},$$

d.h. der elementare Flächeninhalt der Triangulierung ist

$$A_{kl} = 2kl A_{\Delta} = 2r\pi \frac{\sin \frac{\pi}{l}}{\frac{\pi}{l}} \sqrt{h^2 + \frac{r^2 \pi^4}{4} \left(\frac{k}{l^2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{l}}{\frac{\pi}{l}}\right)^4} \text{ mit } \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{l}}{\frac{\pi}{l}} = 1.$$

Nun betrachten wir verschiedene Grenzübergänge:

- (1) $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{kl} = 2r\pi h$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{\Delta} = 0$
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{kl} = \infty$ aber $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{\Delta} \neq 0$

$$(3) \lim_{l \rightarrow \infty} A_{ll} = 2r\pi h \text{ mit } \lim_{l \rightarrow \infty} A_{\Delta} = 0$$

$$(4) \lim_{l \rightarrow \infty} A_{k(l)l} = 2r\pi \sqrt{h^2 + \frac{q^2 r^2 \pi^4}{4}} \text{ für } \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{k(l)}{l} = q \in \mathbb{R} \text{ obwohl } \lim_{l \rightarrow \infty} A_{\Delta} = 0$$

$$(5) \lim_{l \rightarrow \infty} A_{l^3 l} = \infty \text{ obwohl } \lim_{l \rightarrow \infty} A_{\Delta} = 0$$

In (4) und (5) erhalten wir falsche Ergebnisse, da zwar $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{\Delta} = 0$ gilt, aber die Dreiecke immer „flacher“ werden – d.h. ihr **Scheitelwinkel** strebt gegen π . Man kann nun zeigen:

Benutzt man **Triangulierungen** mit $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{\Delta} = 0$, so dass beim Grenzübergang kein Dreieckswinkel π beliebig nahe kommt, so konvergiert der Gesamtflächeninhalt der Triangulierung gegen den „richtigen“ Wert $2r\pi h$.

7.5. Das Lebesguesche Maß und Integral

Das Jordan-Maß bzw. das Riemann-Integral weist einige **Mängel** auf:

1. Nur beschränkte Bereiche können Jordan-messbar sein und nur beschränkte Funktionen (über beschränkten Bereichen) können Riemann-integrierbar sein. Man kann zwar uneigentliche Riemann-Integrale definieren, aber diese besitzen keine „schönen“ Eigenschaften.
2. Es sind nur wenige Bereiche Jordan-messbar.

Beispiel. Die Menge $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar – d.h. $B = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $\forall_{i \in \mathbb{N}} \mu(\{p_i\}) = 0$ – aber nicht Jordan-messbar.

3. Es gibt kaum „vernünftige“ Konvergenzsätze für Riemann-Integrale.

Beispiel. Es sei $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{p_1, \dots\}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$f_k : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{p_1, \dots, p_k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Dann ist jede Funktion f_k Riemann-integrierbar aber $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ ist die auf $[0, 1]$ eingeschränkte Dirichlet-Funktion und damit nicht Riemann-integrierbar.

A. Das Lebesguesche Maß

Definition. Eine **abzählbare Quadersumme** S im $\mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare – evtl. endliche oder leere – Vereinigung $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ – evtl. entarteter – nicht notwendig abgeschlossener Quader $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ mit $\forall_{j \neq k} Q_j \cap Q_k = \emptyset$. Ihr elementarer Inhalt sei $|S| = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \in [0, \infty]$.

Bemerkung.

1. Die verwendeten Quader können **degeneriert** sein, d.h. es kann $|Q| = 0$ gelten. Weiter können sie offen bzw. „halboffen“ (mit fehlenden Seitenflächen) sein. Ihr Inhalt sei dann $|Q| = |\overline{Q}|$.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

2. Jede abzählbare Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ von Quadern $P_j \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als abzählbare Quadersumme $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ – also mit $\forall_{j \neq k} Q_j \cap Q_k = \emptyset$ – darstellen. Man definiert induktiv $\forall_{l \in \mathbb{N}} \tilde{Q}_l = P_l \setminus \{P_1 \cup \dots \cup P_{l-1}\}$, wobei sich jede Menge $\tilde{Q}_l$ als endliche Vereinigung disjunkter Quader Q_j darstellen lässt.
3. Der Inhalt $|S| \in [0, \infty]$ existiert immer und ist von der Reihenfolge der Summation unabhängig, da $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ absolut konvergiert.

Satz 7.5.1. Jede offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Darstellung $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ als abzählbare Quadersumme (sogar mit $\forall_{j \in \mathbb{N}} \bar{Q}_j \subset G$).

Beweis. Um jeden Punkt $x \in G$ gibt es einen Quader $P_x = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset G$ mit rationalen Eckkoordinaten a_i, b_i . Insgesamt existieren davon nur abzählbar viele – denn $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n$ ist abzählbar. Also ist $G = \bigcup_{x \in G} P_x$ eine abzählbare Vereinigung von Quadern, die man als abzählbare Quadersumme darstellen kann. $\square$

Beispiel.

1. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist offen mit

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}^n}]p_1, p_1 + 1] \times \dots \times]p_n, p_n + 1].$$

2. Jede offene euklidische Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ ist eine abzählbare Vereinigung von Rechtecken.

Definition. Das **äußere Lebesgue-Maß** einer nicht notwendig beschränkten Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ sei $\bar{\lambda}(B) = \inf\{|T| : T \supset B \text{ abzählbare Quadersumme}\} \in [0, \infty]$. Es existiert stets, da $\mathbb{R}^n \supset B$ eine **abzählbare Quadersumme** ist.

Bemerkung. Wir geben Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes $\bar{\lambda} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ an. Es gilt:

$$(AM1) \quad \bar{\lambda}(\emptyset) = 0$$

$$(AM2) \quad [\text{Monotonie}] \quad A \subset B \Rightarrow \bar{\lambda}(A) \leq \bar{\lambda}(B)$$

$$(AM3) \quad [\sigma\text{-Subadditivität}] \quad \bar{\lambda}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}(B_j)$$

Beweis. Die Aussagen (AM 1) und (AM 2) folgen direkt aus der Definition des äußeren Lebesgue-Maßes. Weiter ist für $\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}(B_j) = \infty$ auch die Behauptung (AM 3) offensichtlich. Sei also o.B.d.A. $\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}(B_j)$ konvergent und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert dann eine abzählbare Quadersumme $T_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{ij} \supset B_j$ mit

$$|T_j| = \sum_{i=1}^{\infty} |Q_{ij}| < \bar{\lambda}(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{\infty} T_j = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} Q_{ij} \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B$ der Quader $Q_{ij} \subset T_j$ lässt sich dann als abzählbare Quadersumme $T \supset B$ darstellen mit

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(B) \leq |T| &\leq \underbrace{\sum_{i,j=1}^{\infty} |Q_{ij}|}_{\text{absolut konvergierende Doppelreihe}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |Q_{ij}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{\lambda}(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}(B_j) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}(B_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

1. Das äußere Jordan-Maß $\bar{\mu}$ ist nur subadditiv mit $\bar{\mu}(\bigcup_{j=1}^n B_j) \leq \sum_{j=1}^n \bar{\mu}(B_j)$ und nicht σ -subadditiv. Etwa gilt für $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{p_j\}$ einerseits $\bar{\mu}(B) = 1$ und andererseits $\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}\{p_j\} = 0$.
2. Eine der Jordan-Maßtheorie entsprechende Definition $\underline{\lambda}^*(B) = \sup\{|S| : S \subset B \text{ abzählbare Quadersumme}\}$ des inneren Lebesgue-Maßes ist wenig sinnvoll. Daher approximiert man eine Menge B nicht von innen, sondern man approximiert $\mathbb{R}^n \setminus B$ von außen. Dies ist in der Jordan-Maßtheorie wegen $\underline{\mu}(B) + \bar{\mu}(Q \setminus B) = |Q|$ gleichwertig. Für beschränkte Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ kann man definieren:

- a) $\underline{\lambda}(B) = |Q| - \bar{\lambda}(Q \setminus B)$ mit einem Quader $Q \supset B$
- b) B Lebesgue-messbar $\Leftrightarrow \underline{\lambda}(B) = \bar{\lambda}(B) = \lambda(B)$

Eine Fortsetzung dieser Definition auf unbeschränkte Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ ist möglich durch: B Lebesgue-messbar $\Leftrightarrow \forall_{Q \subset \mathbb{R}^n} Q \cap B$ Lebesgue-messbar $\Leftrightarrow \forall_{Q \subset \mathbb{R}^n} \bar{\lambda}(Q \cap B) + \bar{\lambda}(Q \setminus B) = |Q|$. Meist verzichtet man auf ein inneres Maß und verwendet statt Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$ beliebige „Eichmengen“ $E \subset \mathbb{R}^n$.

Definition.

1. Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Lebesgue-messbar**, wenn $\forall_{E \subset \mathbb{R}^n} \bar{\lambda}(E \cap B) + \bar{\lambda}(E \setminus B) = \bar{\lambda}(E)$ gilt. In diesem Fall heißt $\lambda(B) = \bar{\lambda}(B) \in [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß von B .
2. Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(Lebesgue-)Nullmenge**, wenn $\bar{\lambda}(N) = 0$ ist.

Bemerkung.

1. Wegen $E = (E \cap B) \cup (E \setminus B) \Rightarrow \bar{\lambda}(E) \leq \bar{\lambda}(E \cap B) + \bar{\lambda}(E \setminus B)$ ist für die Lebesgue-Messbarkeit

$$\boxed{\bar{\lambda}(E \cap B) + \bar{\lambda}(E \setminus B) \leq \bar{\lambda}(E)}$$

für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ entscheidend.

2. Statt beliebige „Eichmengen“ E zu verwenden, genügt es $\bar{\lambda}(Q \cap B) + \bar{\lambda}(Q \setminus B) \leq \bar{\lambda}(Q)$ für Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bar{\lambda}(Q) = |Q|$ zu prüfen.

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

3. (Lebesgue-)Nullmengen sind Lebesgue-messbar mit $\lambda(N) = 0$, denn für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\overline{\lambda}(\underbrace{E \cap N}_{\subset N}) + \overline{\lambda}(\underbrace{E \setminus N}_{\subset E}) \leq \overline{\lambda}(N) + \overline{\lambda}(E) = \overline{\lambda}(E).$$

Man bezeichnet dabei eine Eigenschaft als „fast überall“ geltend, wenn sie überall bis auf eine (Lebesgue-)Nullmenge gilt.

4. Aus der σ -Subadditivität von $\overline{\lambda}$ folgt sofort: $\forall_{j \in \mathbb{N}} N_j \text{ Nullmenge} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \text{ Nullmenge}$. Insbesondere sind also alle abzählbaren Mengen Nullmengen.

Beispiel. Die Mengen $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ und $A = [0, 1] \setminus B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ sind wegen $\overline{\mu}(B) = \overline{\mu}(A) = 1$ und $\underline{\mu}(B) = \underline{\mu}(A) = 0$ nicht Jordan-messbar. Aber B ist abzählbar und daher eine Lebesgue-Nullmenge. Folglich gilt $0 = \lambda(B) = |[0, 1]| - \overline{\lambda}([0, 1] \setminus B) = 1 - \overline{\lambda}(A) \Rightarrow \overline{\lambda}(A) = 1$. Aber es gilt auch $\underline{\lambda}(A) = |[0, 1]| - \overline{\lambda}([0, 1] \setminus A) = 1 - \overline{\lambda}(B) = 1$, d.h. A ist Lebesgue-messbar mit $\lambda(A) = 1$ – dagegen ist $\underline{\lambda}^*(A) = \sup\{|S| : S \subset A\} = 0$. An $\partial A = [0, 1]$ sieht man dabei, dass der Rand einer Lebesgue-messbaren Menge nicht notwendig eine Nullmenge ist.

Eigenschaften. Wir betrachten einige Eigenschaften des Mengensystems $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ aller Lebesgue-messbaren Mengen:

- (SA1) $\emptyset \in \mathcal{L}$
- (SA2) $B \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B \in \mathcal{L}$
- (SA3) $\forall_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{L}$
- (SA4) $\forall_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{L}$

Die Eigenschaften (SA1) bis (SA3) besagen, dass $\mathcal{L}$ eine σ -Algebra ist. Nun geben wir Eigenschaften des Lebesgue-Maßes $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ an:

- (LM1) $\lambda(\emptyset) = 0$
- (LM2) [σ -Additivität] $\forall_{i \neq k} B_j \cap B_k = \emptyset \Rightarrow \lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j)$
- (LM3) [aufsteigender Kettensatz] $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ monoton wachsend $\Rightarrow \lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(B_j)$
- (LM4) [absteigender Kettensatz] $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ monoton fallend und $\lambda(B_1) < \infty \Rightarrow \lambda(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(B_j)$

Bemerkung.

- (1) Allgemein nennt man ein Paar $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ mit einer Menge $\mathcal{X}$ und einer σ -Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ – d.h. $\mathcal{M}$ erfüllt (SA1) bis (SA3) – einen Maßraum. Eine Abbildung $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, die (LM1) und (LM2) erfüllt heißt dann ein Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$. Dabei kann man $\mathcal{M}$ und λ aus einem äußeren Maß – d.h. aus einer Abbildung $\overline{\lambda} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, \infty]$ die (AM1) bis (AM3) erfüllt – konstruieren. Im Sinne dieser Definition ist das Jordan-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ kein Maß.

(2) Ein anderes Beispiel einer σ -Algebra im $\mathbb{R}^n$ ist das System $\mathbb{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der Borel-Mengen, erzeugt von den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Es gilt $\mathbb{B} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Zu den Borel-Mengen gehören:

- nach Definition alle offenen Mengen
- nach (SA2) alle abgeschlossenen Mengen
- nach (SA3) abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen, die i.A. weder offen noch abgeschlossen sind – etwa $\bigcup_{k=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{k}] = [0, 1[$.

Lemma 7.3.

- a.) Jede endliche Vereinigung Lebesgue-messbarer Mengen ist Lebesgue-messbar.
- b.) Sind die Mengen $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkt und Lebesgue-messbar, so gilt für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ stets $\bar{\lambda}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. Insbesondere ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Lebesgue-messbar.

Beweis.

- a.) Es genügt $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{L}$ zu zeigen. Für alle Eichmengen $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\bar{\lambda}(E \cap (A \cup B)) = \bar{\lambda}(E \cap A) + \bar{\lambda}(E \cap A^c \cap B), \quad (7.8)$$

denn mit $E' = E \cap (A \cup B)$ und der Messbarkeit von $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(E \cap (A \cup B)) &= \bar{\lambda}(E') \\ &= \bar{\lambda}(E' \cap A) + \bar{\lambda}(E' \cap A^c) \\ &= \bar{\lambda}(E \cap (A \cup B) \cap A) + \bar{\lambda}(E \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \bar{\lambda}(E \cap A) + \bar{\lambda}(E \cap A^c \cap B). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(E \cap (A \cup B)) + \bar{\lambda}(E \cap (A \cup B)^c) &\stackrel{(7.8)}{=} \bar{\lambda}(E \cap A) + \bar{\lambda}(E \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \bar{\lambda}(E \cap A^c \cap B^c) \stackrel{B \text{ messbar}}{=} \bar{\lambda}(E \cap A) + \bar{\lambda}(E \cap A^c) \stackrel{A \text{ messbar}}{=} \bar{\lambda}(E) \end{aligned}$$

und man erhält die Behauptung.

- b.) Sei $\forall_{p \in \mathbb{N}} S_p = \bigcup_{i=1}^p A_i$ und $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Wegen $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow A_2 \subset A_1^c$ folgt aus (7.8) zunächst $\bar{\lambda}(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \bar{\lambda}(E \cap A_1) + \bar{\lambda}(E \cap A_2)$. Durch vollständige Induktion erhält man damit

$$\forall_{p \in \mathbb{N}} \bar{\lambda}(E \cap S_p) = \sum_{i=1}^p \bar{\lambda}(E \cap A_i).$$

Da S_p als endliche Vereinigung Lebesgue-messbarer Mengen nach a.) selbst Lebesgue-messbar ist, erhält man weiter

$$\bar{\lambda}(E) = \bar{\lambda}(E \cap S_p) + \underbrace{\bar{\lambda}(E \cap S_p^c)}_{S_p \subset S \Rightarrow E \cap S^c \subset E \cap S_p^c} \geq \sum_{i=1}^p \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \cap S^c)$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

und der Grenzübergang liefert $\bar{\lambda}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \cap S^c)$. Zusammen mit

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(E) &= \bar{\lambda}((E \cap S) \cup (E \cap S^c)) = \bar{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i) \cup (E \cap S^c)\right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadditivität}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \cap S^c) \end{aligned}$$

folgt die Gleichung $\bar{\lambda}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. Aus ihr erhält man weiter

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(E \cap S) + \bar{\lambda}(E \cap S^c) &= \bar{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i)\right) + \bar{\lambda}(E \cap S^c) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadditivität}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \cap S^c) = \bar{\lambda}(E), \end{aligned}$$

d.h. $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist Lebesgue-messbar.

□

Beweis. Nun zeigen wir die angegebenen Eigenschaften Lebesgue-messbarer Mengen und des Lebesgue-Maßes. Dabei sind (SA1) und (LM1) bereits untersucht und (SA2) folgt aus $\bar{\lambda}(E \cap B^c) + \bar{\lambda}(E \setminus B^c) = \bar{\lambda}(E \cap B) + \bar{\lambda}(E \setminus B)$. Weiter folgt (SA4) aus (SA2) und (SA3) durch Betrachtung der Komplementmengen.

- (SA3) Seien $\forall_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{L}$ beliebig. Dann erhält man durch $A_1 = B_1$ und $\forall_{k \in \mathbb{N}} A_{k+1} = B_{k+1} \cap B_1^c \cap \dots \cap B_k^c$ eine Folge disjunkter Mengen, wobei nach (SA2) jede Menge A_k eine endliche Vereinigung Lebesgue-messbarer Mengen ist. Damit ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ eine Vereinigung disjunkter sowie Lebesgue-messbarer Mengen, also selbst Lebesgue-messbar. Die Behauptung folgt nun aus $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
- (LM2) Für eine Folge disjunkter sowie Lebesgue-messbarer Mengen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und eine beliebige Eichmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt stets $\bar{\lambda}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(E \cap A_i) + \bar{\lambda}(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. Für $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ erhält man insbesondere

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bar{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(A_i) + \bar{\lambda}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

□

Satz 7.5.2. Für beschränkte Teilmengen B des $\mathbb{R}^n$ gilt:

- 1) $\underline{\mu}(B) \leq \bar{\lambda}(B) \leq \bar{\mu}(B)$
- 2) B Jordan-messbar $\Rightarrow B$ Lebesgue-messbar mit $\mu(B) = \lambda(B)$
- 3) B Jordan-Nullmenge $\Rightarrow B$ (Lebesgue-)Nullmenge mit $\mu(B) = \lambda(B) = 0$

Beweis. Für endliche Quadersummen $S \subset B \subset T$ gilt $|S| = \bar{\lambda}(S) \leq \bar{\lambda}(B) \leq \bar{\lambda}(T) = |T|$, also auch $\underline{\mu}(B) \leq \bar{\lambda}(B) \leq \bar{\mu}(B)$. Damit gilt B Jordan-messbar $\Rightarrow \mu(B) = \bar{\lambda}(B)$ und für alle Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ folgt in diesem Fall

$$\underbrace{\bar{\lambda}(Q \cap B)}_{\text{Jordan-messbar}} + \underbrace{\bar{\lambda}(Q \setminus B)}_{\text{Jordan-messbar}} = \mu(Q \cap B) + \mu(Q \setminus B) \stackrel{\text{disjunkte Mengen}}{=} \mu(Q) = |Q|.$$

Damit ist B auch Lebesgue-messbar und es gilt $\mu(B) = \lambda(B)$. $\square$

Satz 7.5.3.

- a.) Jede offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar
- b.) Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar
- c.) Jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar mit $\lambda(K) < \infty$

Beispiel. Wir konstruieren eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist. Dazu betrachten wir auf dem Intervall $[0, 1]$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Diese liefert eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen $[x]$ mit $x \in [0, 1]$. Es sei nun $C \subset [0, 1]$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen, d.h. C enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element – die Existenz von C resultiert dabei aus dem Auswahlaxiom. Eine Translation von C um $p \in B = [-1, +1] \cap \mathbb{Q} = \{p_1, \dots\}$ liefert nun Mengen $C_p = p + C$, für die gilt:

$$(1) \quad \forall_{p,q \in B} \quad C_p \cap C_q \neq \emptyset \Rightarrow p = q$$

Beweis. $x \in C_p \cap C_q \Rightarrow x = p + r$ für $r \in C$ und $x = q + s$ für $s \in C \Rightarrow r - s = q - p \in \mathbb{Q} \Rightarrow [r] = [s] \Rightarrow r = s \Rightarrow p = q$ $\square$

$$(2) \quad [0, 1] \subset \bigcup_{p \in B} C_p = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{p_j} \subset [-1, 2]$$

Beweis. Einerseits gilt $x \in [0, 1] \Rightarrow x \in [r]$ für $r \in C \Rightarrow p = x - r \in \mathbb{Q} \cap [-1, +1] = B \Rightarrow x = p + r$ mit $p \in B$ und $r \in C \Rightarrow x \in C_p \subset \bigcup_{q \in B} C_q$. Die andere Inklusion ist trivial. $\square$

Nun nehmen wir an, C sei Lebesgue-messbar. Da das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist, sind dann auch alle Mengen C_p für $p \in B$ messbar mit $\lambda(C) = \lambda(C_p)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) Mit $\lambda(C) = 0$ erhält man aus $\lambda(\bigcup_{p \in B} C_p) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(C_{p_j}) = 0$ einen Widerspruch zu $[0, 1] \subset \bigcup_{p \in B} C_p$.
- (2) Mit $\lambda(C) > 0$ erhält man aus $\lambda(\bigcup_{p \in B} C_p) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(C_{p_j}) = \infty$ einen Widerspruch zu $\bigcup_{p \in B} C_p \subset [-1, 2]$.

B. Das Lebesguesche Integral

Es gibt sehr unterschiedliche Methoden, das Lebesguesche Integral einzuführen. Wir orientieren uns an der Riemannschen Integrationstheorie.

Definition. Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge.

- a.) Eine Zerlegung von B ist eine Folge $Z = (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter sowie Lebesgue-messbarer Teilmengen $B_k \subset B$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = B$. Die Gesamtmenge dieser Zerlegungen sei P_B .
- b.) Eine Zerlegung $Z' = (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in P_B$ heißt feiner als die Zerlegung $Z = (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in P_B$, wenn gilt $\forall_{i \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N}} A_i \subset B_k$. In diesem Fall schreibt man $Z' \succeq Z$.

Bemerkung.

- (1) Die Relation $\preceq$ auf P_B ist offensichtlich reflexiv und transitiv. Weiter existiert zu zwei Zerlegungen $Z, Z' \in P_B$ eine gemeinsame Verfeinerung $Z'' \in P_B$ mit $Z \preceq Z''$ und $Z' \preceq Z''$ – man setze etwa $Z'' = (A_i \cap B_k)_{i,k \in \mathbb{N}}$.
- (2) Allgemein nennt man ein aus einer (Index-)Menge $\mathcal{A}$ und einer Relation $\preceq$ auf $\mathcal{A}$ bestehendes Paar $(\mathcal{A}, \preceq)$ mit

$$(D1) \quad \forall_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \preceq \alpha$$

$$(D2) \quad \forall_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}} \alpha \preceq \beta \text{ und } \beta \preceq \gamma \Rightarrow \alpha \preceq \gamma$$

$$(D3) \quad \forall_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}} \exists_{\gamma \in \mathcal{A}} \alpha \preceq \gamma \text{ und } \beta \preceq \gamma$$

ein **gerichtetes System** oder ein **Netz**. Dieses verallgemeinert die durch die natürliche Ordnung $\leq$ gerichtete Zahlenreihe $\mathbb{N}$. Für verallgemeinerte Folgen oder Moore-Smith-Folgen $(f_\alpha \in \mathbb{R})_{\alpha \in \mathcal{A}}$ kann man durch

$$\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha = c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\alpha_0 \in \mathcal{A}} \forall_{\alpha \succeq \alpha_0} |f_\alpha - c| < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha = \infty \Leftrightarrow \forall_{r > 0} \exists_{\alpha_0 \in \mathcal{A}} \forall_{\alpha \succeq \alpha_0} f_\alpha > r$$

einen Grenzwertbegriff einführen. Dieser **Netz-Limes** besitzt analoge Eigenschaften wie der bisher bekannte Limes – insbesondere ist er im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmt.

- (3) In der Riemannschen Integrationstheorie über einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ wird der für Zerlegungen Z von Q durch die Relation $Z \preceq Z' \Rightarrow \|Z\| \geq \|Z'\|$ induzierte Netz-Limes angewendet. Dort gilt für verallgemeinerte Folgen $(R_f(Z, \bar{x}))_Z$ **Riemannscher Summen**

$$\lim_Z R_f(Z, \bar{x}) = R_f \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{Z_0} \forall_Z (Z \succeq Z_0 \Rightarrow |R_f(Z, \bar{x}) - R_f| < \varepsilon)$$

$$\stackrel{\|Z_0\|=\delta}{\Leftrightarrow} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_Z (\|Z\| \leq \delta \Rightarrow |R_f(Z, \bar{x}) - R_f| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} R_f(Z, \bar{x}) = R_f$$

Definition. Sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion auf einer Lebesgue-messbaren Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ und $Z = (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in P_B$ eine Zerlegung. Dann heißt

$$\underline{L}_f(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \lambda(B_k) \text{ bzw. } \bar{L}_f(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \lambda(B_k)$$

mit $m_k = \inf\{f(x) : x \in B_k\}$ bzw. $M_k = \sup\{f(x) : x \in B_k\}$ **Lebesgue-Untersumme** bzw. **Lebesgue-Obersumme**. Im Falle von $\underline{L}_f(Z) < \infty$ kann man die **Lebesgue-Varianz** $V_f(Z) = \bar{L}_f(Z) - \underline{L}_f(Z)$ von f bzgl. Z definieren.

Bemerkung.

(1) In der Lebesgueschen Integrationstheorie wird für Reihen die Regel $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ verwendet. Dies ist wegen

- $f|_{B_k}$ unbeschränkt und $\lambda(B_k) = 0 \Rightarrow M_k \cdot \lambda(B_k) = 0$, denn B_k ist Nullmenge
- $f|_{B_k} \equiv 0$ und $\lambda(B_k) = \infty \Rightarrow M_k \cdot \lambda(B_k) = 0$, denn $\int f|_{B_k} dx = 0$

unproblematisch. Man kann auf Nullmengen auch Funktionswerte $f(x) = \infty$ zulassen.

(2) Da f nichtnegativ ist, konvergieren die Reihen $\underline{L}_f(Z)$ bzw. $\bar{L}_f(Z)$ absolut – und damit unbedingt – gegen einen Wert $c \in [0, \infty]$.

Beispiel. Wir betrachten die unbeschränkte Abbildung $f : x \in B =]0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Für jede endliche Zerlegung $\tilde{Z} \in P_B$ gilt offensichtlich $\bar{L}_f(\tilde{Z}) = \infty$. Für $Z = (\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right])_{k \in \mathbb{N}}$ gilt nach dem Majorantenkriterium aber

$$\bar{L}_f(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1}} < \infty.$$

Definition. Sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion auf einer Lebesgue-messbaren Menge $B \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\underline{L}_f = \sup_{Z \in P_B} \underline{L}_f(Z) \text{ bzw. } \bar{L}_f = \inf_{Z \in P_B} \bar{L}_f(Z)$$

Lebesgue-Unterintegral bzw. **Lebesgue-Oberintegral**.

Bemerkung. Es gilt wie beim Riemann-Integral: Z' feiner als $Z \Rightarrow \underline{L}_f(Z) \leq \underline{L}_f(Z') \leq \bar{L}_f(Z') \leq \bar{L}_f(Z)$. Daher kann man $\underline{L}_f$ bzw. $\bar{L}_f$ auch als Netz-Limes

$$\underline{L}_f = \lim_{Z \in P_B} \underline{L}_f(Z) \text{ bzw. } \bar{L}_f = \lim_{Z \in P_B} \bar{L}_f(Z)$$

bzgl. des gerichteten System $(P_B, \preceq)$ auffassen.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge.

(a) Eine nichtnegative Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt über $B \subset \mathbb{R}^n$ **Lebesgue-integrierbar**, wenn für das Lebesgue-Oberintegral und das Lebesgue-Unterintegral $\bar{L}_f = \underline{L}_f < \infty$ gilt. Der gemeinsame Wert $L_f = \bar{L}_f = \underline{L}_f \in [0, \infty[$ wird mit

$$(L-) \int_B f(x) dx$$

bezeichnet und heißt **Lebesgue-Integral** von f über B .

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

- (b) Eine beliebige Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lebesgue-integrierbar**, falls die Anteile $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = -\min\{f, 0\}$ Lebesgue-integrierbar sind. In diesem Fall ist

$$\int_B f(x) dx = \int_B f_+(x) dx - \int_B f_-(x) dx.$$

Bemerkung. Definiert man zu einer Zerlegung $Z = (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in P_B$ eine **Zwischenpunktfolge** $\bar{x} = (\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch $\forall_{k \in \mathbb{N}} B_k \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x}_k \in B_k$ sowie eine zugehörige Lebesgue-Summe durch

$$L_f(Z, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\bar{x}_k) \lambda(B_k),$$

so gilt für eine nichtnegative Funktion f auch

$$(L-) \int_B f(x) dx = \lim_{Z \in P_B} L_f(Z, \bar{x})$$

unabhängig von der Wahl der Zwischenpunktfolgen. Dies folgt aus $\forall_{Z \in P_B} \underline{L}_f(Z) \leq L_f(Z, \bar{x}) \leq \bar{L}_f(Z)$ durch Grenzübergang.

Bemerkung. Wir geben einige Eigenschaften des Lebesgue-Integrals an.

- (a) [**Linearität**] f, g Lebesgue-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_B \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_B f(x) dx + \beta \int_B g(x) dx$$

- (b) [**Monotonie**] f, g Lebesgue-integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ fast überall

$$\Rightarrow \int_B f(x) dx \leq \int_B g(x) dx$$

Beweis. Seien o.B.d.A. f und g nichtnegativ. Die Nullmenge $N = \{x \in B : f(x) > g(x)\}$ induziert eine Zerlegung $\tilde{Z} = (N, B \setminus N)$, so dass für die Glieder einer beliebigen Zerlegung $Z = (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $Z \succeq \tilde{Z}$ nun entweder $B_k \subset N$ – und damit $\lambda(B_k) = 0$ – oder $B_k \subset B \setminus N$ gilt. Wegen $f(x_k) \leq g(x_k)$ für $x_k \in B \setminus N$ erhält man für jede Zwischenpunktfolge

$$L_f(Z, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \lambda(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \lambda(B_k) = L_g(Z, \bar{x})$$

und durch Grenzübergang folgt die Behauptung. □

- (c) [**Dreiecksungleichung**] f Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow |f|$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\left| \int_B f(x) dx \right| \leq \int_B |f(x)| dx$$

- (d) f Lebesgue-integrierbar und $f(x) = g(x)$ fast überall $\Rightarrow g$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_B f(x) dx = \int_B g(x) dx$$

Satz 7.5.4. Für jede Zerlegung $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des Definitionsbereichs $B \subset \mathbb{R}^n$ einer nichtnegativen Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_B f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x) dx,$$

falls das linke Integral existiert oder die rechte Reihe konvergiert.

Beweis.

- (1) (a) Eine Zerlegung $Z = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von B induziert durch $A_{ik} = A_i \cap B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $Z_k = (A_{ik})_{i \in \mathbb{N}}$ von B_k und es gilt für die Zerlegung $\tilde{Z} = (A_{ik})_{i,k \in \mathbb{N}} \succeq Z$ von B nach dem großen Umordnungssatz

$$\begin{aligned} \underline{L}_f(Z, B) &\leq \underline{L}_f(\tilde{Z}, B) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \inf f[A_{ik}] \lambda(A_{ik}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \inf f[A_{ik}] \lambda(A_{ik}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(Z_k, B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k). \end{aligned}$$

Da die Zerlegung Z beliebig wählbar ist, folgt

$$\underline{L}_f(B) = \sup_{Z \in \mathcal{P}_B} \underline{L}_f(Z, B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k).$$

- (b) Die Zerlegungen $Z_k = (A_{ik})_{i \in \mathbb{N}}$ von B_k liefern eine Zerlegung $Z = (A_{ik})_{i,k \in \mathbb{N}}$ von B und nach dem großen Umordnungssatz gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(Z_k, B_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \inf f[A_{ik}] \lambda(A_{ik}) \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{\infty} \inf f[A_{ik}] \lambda(A_{ik}) = \underline{L}_f(Z, B) \leq \underline{L}_f(B). \end{aligned}$$

Da alle Zerlegungen Z_k beliebig wählbar sind, folgt damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k) \leq \underline{L}_f(B),$$

denn zu jedem $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Zerlegung Z_k von B_k mit $\underline{L}_f(Z_k, B_k) \geq \underline{L}_f(B_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(Z_k, B_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \underline{L}_f(B) + \varepsilon.$$

Aus (a) und (b) erhält man nun die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k) = \underline{L}_f(B).$$

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

(2) Analog zu (1) lässt sich zeigen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{L}_f(B_k) = \bar{L}_f(B).$$

Nun kann man aus (1) und (2) ablesen:

(i)

$$\begin{aligned} \int_B f(x) dx \text{ existiert} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k) = \underline{L}_f(B) = \bar{L}_f(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{L}_f(B_k) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bar{L}_f(B_k) - \underline{L}_f(B_k)}_{\text{positive Summanden}} = 0 \Rightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}} \bar{L}_f(B_k) = \underline{L}_f(B_k) \\ &\Rightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}} f \text{ über } B_k \text{ integrierbar mit } \int_B f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x) dx \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\forall_{k \in \mathbb{N}} f \text{ über } B_k \text{ integrierbar mit } \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x) dx < \infty \\ &\Rightarrow \underline{L}_f(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{L}_f(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{L}_f(B_k) = \bar{L}_f(B) < \infty \\ &\Rightarrow f \text{ über } B \text{ integrierbar mit } \int_B f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x) dx \end{aligned}$$

□

Korollar. Satz 7.5.4 gilt auch für beliebige Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, wenn man fordert, dass auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} |f(x)| dx$$

konvergiert.

Satz 7.5.5. Satz über den Vergleich von Lebesgue- und Riemann-Integral

- (a) Jedes eigentliche Riemann-Integral ist auch ein Lebesgue-Integral mit gleichem Wert.
- (b) Jedes uneigentliche Riemann-Integral ist genau dann ein Lebesgue-Integral, wenn es absolut konvergiert.

Beweis. Wir skizzieren lediglich die Beweisidee.

- (a) Die von Riemannschen Quaderzelegungen $(Q_k)_{k=1}^N$ gelieferten endlichen Zerlegungen $(B_k)_{k=1}^N$ mit $B_k = B \cap Q_k$ sind – evtl. nach formaler Modifizierung der Glieder zu paarweise disjunkten Mengen – auch als Lebesgue-Zerlegung zu verwenden. Weiter gilt: f Riemann-integrierbar $\Rightarrow |f|$ Riemann-integrierbar $\Rightarrow f_{\pm} = \frac{1}{2}(f \pm |f|)$ Riemann-integrierbar $\Rightarrow f_{\pm}$ Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow f$ Lebesgue-integrierbar.

- (b) Die Anwendung von Satz 7.5.4 und dessen Korollar liefert die Behauptung, wenn man berücksichtigt, dass die Implikation „ f Riemann-integrierbar $\Rightarrow |f|$ Riemann-integrierbar“ im uneigentlichen Fall falsch ist.

□

Beispiel.

- (1) Für die Funktion $x \in B =]0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ gilt mit der Zerlegung $(B_k =]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}])_{k \in \mathbb{N}}$ nach Satz 7.5.4 die Gleichheit

$$\begin{aligned} (L-) \int_B f(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [2\sqrt{x}]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} (R-) \int_a^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

- (2) Da das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

divergiert, ist $x \mapsto \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ über $[0, \infty[$ nicht Lebesgue-integrierbar. Damit ist auch $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ über $[0, \infty[$ nicht Lebesgue-integrierbar, obwohl gilt

$$R - \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung. In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir das Lebesgue-Integral analog zum Riemann-Integral definiert. Um Funktionen auf Integrierbarkeit zu prüfen, unterteilt man hierbei den Definitionsbereich und untersucht die Bilder der Teilmengen. In der historischen Lebesgueschen Integrationstheorie unterteilt man allerdings den Zielbereich und untersucht die Urbilder der Teilmengen.

Definition. Eine Funktion $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **(Lebesgue-)messbar**, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ die Menge $B(f \leq \alpha) = \{x \in B : f(x) \leq \alpha\}$ **Lebesgue-messbar**, ist.

Bemerkung.

- (1) Insbesondere ist für eine messbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stets $B = B(f \leq \infty)$ messbar. Damit erhält man aus den Eigenschaften des Lebesgue-Maßes, dass auch die Mengen $B(f < \alpha)$, $B(f \geq \alpha)$ sowie $B(f > \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar sind – etwa gilt $B(f < \alpha) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(f \leq \alpha - \frac{1}{k})$. Diese Mengen können ebenfalls zur Definition der Messbarkeit einer Funktion verwendet werden. Außerdem sind auch Mengen der Form $B(f = \alpha)$ oder $B(\alpha \leq f \leq \beta)$ Lebesgue-messbar.
- (2) Messbare Funktionen $B \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen folgende Eigenschaften:

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

- (a) f messbar $\Rightarrow f_{\pm}, |f|$ messbar
- (b) f messbar und $A \subset B$ Lebesgue-messbar $\Rightarrow f|_A$ messbar
- (c) f, g messbar $\Rightarrow f + g, \alpha f$ sowie $f \cdot g$ messbar

Satz 7.5.6. Es sei $(f_k : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge messbarer Funktionen. Dann sind auch

- (1) $x \in B \mapsto F_1(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \in \mathbb{R}$
- (2) $x \in B \mapsto F_2(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \in \mathbb{R}$
- (3) $x \in B \mapsto F_3(x) = \lim_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \in \mathbb{R}$ – falls $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert

messbare Funktionen.

Beweis.

- (1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gilt $B(F_1 > \alpha) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(f_k > \alpha)$, denn $x \in B(F_1 > \alpha) \Leftrightarrow F_1(x) > \alpha \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) > \alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(f_k > \alpha)$ – also ist F_1 messbar.
- (2) Analog zu (1) erhält man aus $B(F_2 < \alpha) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(f_k < \alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ die Messbarkeit von F_2 .
- (3) Für konvergente Zahlenfolgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt allgemein $\lim_{k \in \mathbb{N}} a_k = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq p} a_k$, denn es gilt:
 - (i) Da die Folge $(s_p = \sup_{k \geq p} a_k)_{p \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, erhält man für alle $m \in \mathbb{N}$ stets $\inf_{p \in \mathbb{N}} s_p = \inf_{p \geq m} s_p$.
 - (ii) Nach Definition des Grenzwertes $a = \lim_{k \in \mathbb{N}} a_k$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{k \geq m} a - \varepsilon \leq a_k \leq a + \varepsilon$. Für alle $p \geq m$ gilt dann $a - \varepsilon \leq s_p \leq a + \varepsilon$ und es folgt $a - \varepsilon \leq \inf_{p \geq m} s_p \leq a + \varepsilon$.
 - (iii) Aus (i) und (ii) erhält man nun $a - \varepsilon \leq \inf_{p \in \mathbb{N}} s_p \leq a + \varepsilon$ und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann ergibt sich $\inf_{p \in \mathbb{N}} s_p = a$.

Insbesondere erhält man also die Darstellung $F_3(x) = \lim_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq p} f_k(x)$ mit der nach (1) und (2) die Messbarkeit von F_3 folgt.

□

Beispiel. Wir geben eine Funktion an, die nicht messbar ist. Es sei $C \subset B = [0, 1]$ nicht Lebesgue-messbar und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ durch $x \in C \Rightarrow f(x) = 1$ und $x \notin C \Rightarrow f(x) = 0$ definiert. Dann gilt $B(f > 0) = C$, d.h. f ist nicht messbar.

Lemma 7.4. Ist eine nichtnegative Funktion $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so gilt für das Lebesgue-Oberintegral und Lebesgue-Unterintegral $\bar{L}_f = \underline{L}_f$. Ist also zusätzlich $\underline{L}_f < \infty$, so ist f sogar Lebesgue-integrierbar.

Beweis.

- a.) Sei zunächst $\lambda(B) < \infty$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $Z = (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $B_k = B(\varepsilon(k-1) \leq f < \varepsilon k)$ eine Zerlegung von B mit

$$\underline{L}_f(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \lambda(B_k) \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \lambda(B_k) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda(B_k) - \varepsilon \lambda(B)$$

und $\bar{L}_f(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \lambda(B_k) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda(B_k),$

also $\bar{L}_f(Z) \leq \underline{L}_f(Z) + \varepsilon \lambda(B)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann sowie $\lambda(B) < \infty$ gilt, folgt $\bar{L}_f \leq \bar{L}_f(Z) \leq \underline{L}_f(Z) \leq \underline{L}_f$ und damit $\bar{L}_f = \underline{L}_f$.

- b.) Falls $\lambda(B) = \infty$ gilt, wähle man eine Zerlegung $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von B mit $\forall i \in \mathbb{N} \lambda(A_i) < \infty$. Eine solche Zerlegung existiert, da $\mathbb{R}^n$ nach Satz 7.5.1 eine Darstellung als abzählbare Quadersumme hat. Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist dann $f|_{A_i}$ ebenfalls messbar und nach a.) folgt $\bar{L}_f(A_i) = \underline{L}_f(A_i)$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 7.5.4, denn dessen Beweis liefert $\underline{L}_f(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{L}_f(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{L}_f(A_i) = \bar{L}_f(B)$.

□

Satz 7.5.7. Eine Funktion $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn sie messbar ist und für das Lebesgue-Unterintegral $\underline{L}_{|f|} < \infty$ gilt.

Beweis.

„ $\Leftarrow$ “ f messbar und $\underline{L}_{|f|} < \infty \Rightarrow f_{\pm}$ messbar und $\underline{L}_{f_{\pm}} \leq \underline{L}_{|f|} < \infty \Rightarrow f_{\pm}$ integrierbar $\Rightarrow f$ integrierbar

„ $\Rightarrow$ “ Sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar mit o.B.d.A. $f \geq 0$. Es ist die Messbarkeit der nichtnegativen Funktion f zu zeigen. Wegen

$$\inf_{Z \in P_B} \underline{L}_f(Z) = \int_B f(x) dx < \infty$$

existiert eine Zerlegung $\tilde{Z}$ von B mit $\underline{L}_f(\tilde{Z}) < \infty$.

- (1) Zu einer beliebigen Zerlegung $Z_* = (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \succeq \tilde{Z}$ bilden wir die Treppenfunktion $x \mapsto \varphi_*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{y \in B_k} f(y) \cdot \chi_{B_k}(x)$ mit $\underline{L}_f(Z_*) = \underline{L}_{\varphi_*}(Z_*)$. Diese ist messbar, da die Mengen $B(\varphi_* \leq \alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ abzählbare Vereinigungen Lebesgue-messbarer Mengen sind.
- (2) Nun konstruieren wir eine Folge $(Z_l \in P_B)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{Z} \preceq Z_1 \preceq \dots$ und $\bar{L}_f(Z_l) - \underline{L}_f(Z_l) < \frac{1}{l}$. Dies ist möglich, da f Lebesgue-integrierbar und $(P_B, \preceq)$ ein gerichtetes System ist. Für die Folge gilt nach Konstruktion

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \bar{L}_f(Z_l) \quad \underbrace{\quad}_{\bar{L}_f(Z_l) - \underline{L}_f(Z_l) < \frac{1}{l}} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{L}_f(Z_l) \quad \underbrace{\quad}_{\underline{L}_f(Z_l) \leq \underline{L}_f \leq \bar{L}_f(Z_l)} \quad \int_B f(x) dx.$$

Die zu (2) gehörende und gemäß (1) konstruierte Funktionenfolge $(\varphi_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend sowie durch f beschränkt, konvergiert also punktweise gegen

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

eine – nach Satz 7.5.6 messbare – Grenzfunktion $\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l = \varphi \leq f$. Aus $\underline{L}_f(Z_l) = \underline{L}_{\varphi_l}(Z_l) \leq \underline{L}_\varphi(Z_l) \leq \underline{L}_f(Z_l)$ erhält man $\underline{L}_\varphi(Z_l) = \underline{L}_f(Z_l)$ und mit $\underline{L}_\varphi(Z_l) \leq \underline{L}_\varphi \leq \underline{L}_f = \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{L}_f(Z_l)$ ergibt sich $\underline{L}_\varphi = \underline{L}_f < \infty$. Nach Lemma 7.4 ist die Funktion φ nun integrierbar mit

$$\int_B \varphi(x) dx = \int_B f(x) dx.$$

Damit ist $\varphi(x) = f(x)$ fast überall – dies genügt, dass mit φ auch f messbar ist.

□

Korollar. Eine Funktion f ist dann Lebesgue-integrierbar, wenn sie messbar ist und für eine Lebesgue-integrierbare Majorante g gilt $|f| \leq g$ – d.h. $\underline{L}_{|f|} \leq \underline{L}_g < \infty$.

Satz 7.5.8. (Satz über monotone Konvergenz von Beppo Levi)

Sei $(f_k : B \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die punktweise konvergiert. Ist dann die Folge

$$\left(\int_B f_k(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

beschränkt, so ist die Grenzfunktion $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ ebenfalls Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_B f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(x) dx.$$

Beweis.

- (1) Wir können annehmen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ stets $f_k \geq 0$ gilt und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wächst – anderenfalls betrachte man die Folge $(f_k - f_1)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(f_1 - f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Nach Satz 7.5.7 sind die Funktionen f_k messbar und nach Satz 7.5.6 ist damit auch die Grenzfunktion f messbar.
- (2) Für alle Lebesgue-messbaren Teilmengen $A \subset B$ und alle $m \geq 0$ folgt

$$\forall_{x \in A} m \leq f(x) \Rightarrow m \cdot \lambda(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k(x) dx,$$

denn es gilt: Für $m = 0$ ist die Aussage trivial, sei also $0 < \alpha < m$ und $A_k = B(f_k > \alpha) \cap A$. Dann ist

$$\alpha \cdot \lambda(A_k) < \int_{A_k} f_k(x) dx \leq \int_A f_k(x) dx.$$

Weiter ist die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wegen $f_k(x) > \alpha \Rightarrow f_{k+1}(x) > \alpha$ monoton wachsend und wegen $\alpha < m \leq f(x) \Rightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} \alpha < f_k(x)$ gilt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$. Der aufsteigende Kettensatz liefert nun

$$\alpha \cdot \lambda(A) = \alpha \cdot \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha \cdot \lambda(A_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_A f_k(x) dx}_{\substack{\text{Folge konvergiert} \\ \text{unter gegebenen} \\ \text{Voraussetzungen}}}$$

und da $0 < \alpha < m$ beliebig gewählt werden kann, erhält man

$$m \cdot \lambda(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k(x) dx.$$

- (3) Sei $Z = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von B und $\underline{L}_f(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \lambda(A_i)$ die zugehörige Lebesgue-Untersumme. Die Anwendung von (2) auf $A_1, \dots, A_p$ liefert

$$\sum_{i=1}^p m_i \lambda(A_i) \leq \sum_{i=1}^p \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_i} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^p A_i} f_k(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(x) dx = I$$

und durch Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ folgt $\underline{L}_f(Z) \leq I$. Da $Z \in P_B$ beliebig gewählt werden kann, erhält man $\underline{L}_f \leq I$. Aus der Messbarkeit der Funktion f ergibt sich damit ihre Integrierbarkeit und die Abschätzung

$$\int_B f(x) dx \leq I.$$

Mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} f_k \leq f$ folgt schließlich

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \int_B f_k(x) dx \leq \int_B f(x) dx \Rightarrow I \leq \int_B f(x) dx.$$

□

Satz 7.5.9. (Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue)

Sei $(f_k : B \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit der Lebesgue-integrierbaren Majoranten $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. es gilt $\forall_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in B$. Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ ebenfalls Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_B f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(x) dx.$$

Beweis. Die Funktionen f_k sind messbar und damit auch die Grenzfunktion f . Da mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ auch $|f(x)| \leq g(x)$ gilt, ist f nach dem Korollar aus Satz 7.5.7 Lebesgue-integrierbar. Es ist also lediglich die Gleichheit $L_f = \lim_{k \rightarrow \infty} L_{f_k}$ zu zeigen. Die Funktionen $\Delta_p(x) = \sup\{|f_k(x) - f(x)| : k \in \mathbb{N} \text{ und } k \geq p\}$ sind nach Satz 7.5.6 messbar und wegen $|\Delta_p(x)| \leq 2g(x)$ sogar Lebesgue-integrierbar. Da die Folge $(\Delta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist und $\lim_{p \rightarrow \infty} \Delta_p = 0$ gilt, erhält man mit dem Satz von Beppo Levi (Satz 7.5.8)

$$\begin{aligned} \left| \int_B f_p(x) dx - \int_B f(x) dx \right| &= \left| \int_B f_p(x) - f(x) dx \right| \\ &\leq \int_B |f_p(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_B \Delta_p(x) dx \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \int_B 0 dx = 0 \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Bemerkung. Satz 7.5.8 und Satz 7.5.9 sind nicht auf die Riemannsche Integrationstheorie übertragbar. So sind die über die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{p_1, \dots\}$ durch $f_k(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{p_1, \dots, p_k\}$ definierten Funktionen $f_k : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ Riemann-integrierbar mit

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \int_0^1 f_k(x) dx = 0.$$

Weiter ist die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und wird durch $g \equiv 1$ dominiert. Dennoch ist die Grenzfunktion $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ als Dirichlet-Funktion nicht Riemann-integrierbar.

Satz 7.5.10. Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte und Jordan-messbare Teilmenge. Dann ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie bis auf eine Lebesgue-Nullmenge stetig ist.

Bemerkung.

- 1) Das Lebesguesche Integral lässt sich auch auf komplexwertige bzw. vektorwertige Funktionen ausdehnen – mit größtenteils gleichen Eigenschaften wie beim Riemann-Integral. Genauso gibt es zu den wichtigen Integralsätzen der Riemann-Theorie jeweils ein Analogon in der Lebesgue-Theorie, das i.A. weniger Voraussetzungen benötigt.
- 2) Auf dem Vektorraum aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ kann man durch

$$\|f\|_1 = \int_B |f(x)| dx$$

eine Quasi-Norm definieren mit der Eigenschaft $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ fast überall. Sie wird zu einer L^1 -Norm, wenn man die Funktionen zu Äquivalenzklassen zusammenfasst, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Dieser L^1 -Raum ist ein Banach-Raum und Gegenstand der Funktionalanalysis. Eine Erweiterung davon sind L^p -Räume mit

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_B |f(x)|^p dx}.$$

8. Differentialformen

8.1. Äußere Potenzen von Vektorräumen

Wir betrachten einen beliebigen n -dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit einer Basis $(e_1, \dots, e_n)$. Dieser Vektorraum liefert weitere Vektorräume mit induzierten Basen.

A. Der Dualraum über V

Der Vektorraum $V^* = \{\alpha : V \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \text{ linear}\}$ aller Linearformen auf V wird als Dualraum über V bezeichnet. Er besitzt die induzierte Basis $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, die durch $\forall_{1 \leq i, k \leq n} \vartheta_i(e_k) = \delta_{ik}$ mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

definiert ist. Daher gilt $\dim V^* = n$ und man erhält die **Basisdarstellung** $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vartheta_i$ mit $\alpha_i = \alpha(e_i)$.

B. Die p -fache tensorielle Potenz von V^*

Der Vektorraum $\otimes^p V^* = \{\phi : \times^p V \rightarrow \mathbb{R} : \phi \text{ multilinear}\}$ aller p -Linearformen auf V heißt die p -fache **tensorielle Potenz** von V^* . Spezielle **Multilinearformen** sind dabei durch

$$\bigotimes_{i=1}^p \alpha_i(x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p \alpha_i(x_i)$$

definierte Tensorprodukte von Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in V^*$. Die induzierte Basis von $\otimes^p V^*$ ist $(\vartheta_{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta_{i_p} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n)$ und es gilt $\dim \otimes^p V^* = n^p$. Man erhält die Basisdarstellung

$$\phi = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \phi_{i_1, \dots, i_p} \cdot \vartheta_{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta_{i_p}$$

mit $\phi_{i_1, \dots, i_p} = \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Aus der Gestalt der Basis ergibt sich für $x_i = \sum_{k=1}^n x_{i,k} e_k \in V$ allgemein

$$\phi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \phi_{i_1, \dots, i_p} \cdot x_{1,i_1} \cdots x_{p,i_p}.$$

So gilt für eine durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definierte Bilinearform $\beta \in \otimes^2 V^*$ stets

$$\beta(x, y) = x^t A y = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ik} x_i y_k.$$

Die Elemente $\phi \in \otimes^p V^*$ heißen auch p -fache (kovariante) **Tensoren** – oft werden auch **verallgemeinerte Matrizen** $\phi_{i_1, \dots, i_p}$ als Tensoren bezeichnet (**Tensorkalkül**).

C. Äußere Potenzen von V^*

Der Vektorraum $\Lambda^p V^* = \{\omega \in \otimes^p V^* \mid \omega \text{ schiefsymmetrisch}\}$ aller **schiefsymmetrischen p -Linearformen** auf V wird als äußere Potenz von V^* bezeichnet. Dabei heißt eine Multilinearform $\omega \in \otimes^p V^*$ schiefsymmetrisch, wenn für alle Permutationen $\pi \in S_p$ und alle Vektoren $x_1, \dots, x_p \in V$ stets $\omega(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(p)}) = \text{sign } \pi \cdot \omega(x_1, \dots, x_p)$ gilt. Man setzt $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ und $\Lambda^q V^* = 0$ für $q > n$.

- (1) Die für Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in V^*$ durch

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = \sum_{\pi \in S_p} \text{sign } \pi \cdot \alpha_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\pi(p)}$$

definierte Abbildung wird als äußeres Produkt bezeichnet. Aus

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{\pi \in S_p} \text{sign } \pi \cdot \alpha_{\pi(1)}(x_1) \cdots \alpha_{\pi(p)}(x_p) \\ &= \det(\alpha_i(x_k)) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1(x_1) & \cdots & \alpha_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_p(x_1) & \cdots & \alpha_p(x_p) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

erhält man:

- (a) Die Multilinearform $(x_1, \dots, x_p) \in \times^p V \mapsto (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1, \dots, x_p)$ ist schiefsymmetrisch, da eine Permutation des Arguments $(x_1, \dots, x_p)$ einer Permutation der Spalten der Matrix $(\alpha_i(x_k))$ entspricht.
- (b) Die Abbildung $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \times^p V^* \mapsto \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ ist ebenfalls schiefsymmetrisch, da eine Permutation des Arguments $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ einer Permutation der Zeilen der Matrix $(\alpha_i(x_k))$ entspricht.
- (2) Die induzierte Basis von $\Lambda^p V^*$ ist dabei $(\vartheta_{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$, d.h. es gilt $\dim \Lambda^p V^* = \binom{n}{p}$. Wir zeigen diese Behauptung für den Fall $p = 2$:

Erzeugendeneigenschaft: Da jedes Element $\omega \in \Lambda^2 V^*$ stets eine Multilinearform ist, gilt $\omega = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \otimes \vartheta_k$ mit $\omega_{ik} = \omega(e_i, e_k)$. Da ω insbesondere schiefsymmetrisch ist, erhalten wir $\forall_{i \neq k} \omega_{ik} = -\omega_{ki}$ und stets $\omega_{ii} = 0$ – also insgesamt

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \otimes \vartheta_k + \sum_{1 \leq k < i \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \otimes \vartheta_k \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \otimes \vartheta_k + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ki} \cdot \vartheta_k \otimes \vartheta_i \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \otimes \vartheta_k - \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_k \otimes \vartheta_i \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot (\vartheta_i \otimes \vartheta_k - \vartheta_k \otimes \vartheta_i) \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k. \end{aligned}$$

Lineare Unabhängigkeit: Es sei $\omega = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k = 0$. Für $r < s$ erhält man aus $\vartheta_i \wedge \vartheta_k = \vartheta_i \otimes \vartheta_k - \vartheta_k \otimes \vartheta_i$ sofort $0 = \omega(e_r, e_s) = \omega_{rs}$. Da ω schiefsymmetrisch ist, folgt damit $\omega_{ik} = 0$ für alle $1 \leq i < k \leq n$.

- (3) Die Basisdarstellung einer Multilinearform $\omega \in \wedge^p V^*$ bzgl. der induzierten Basis ist

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} \cdot \vartheta_{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{i_p}$$

mit den Koeffizienten $\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. In dieser Basisdarstellung kann man die Koeffizienten schiefsymmetrisch auf alle möglichen Tupel $(k_1, \dots, k_p)$ durch

$$\omega_{k_1 \dots k_p} = \begin{cases} \text{sign } \pi \cdot \omega_{i_1 \dots i_p} & \text{falls } (k_1 \dots k_p) = (\pi(i_1), \dots, \pi(i_p)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

fortsetzen und erhält

$$\omega = \sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \frac{\omega_{k_1 \dots k_p}}{p!} \cdot \vartheta_{k_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{k_p}.$$

Für $p = 2$ setzt man etwa $\omega_{ki} = -\omega_{ik}$ für $1 \leq i < k \leq n$ und $\omega_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$ und schreibt

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \omega_{ik} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{\omega_{ik} - \omega_{ki}}{2} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k + \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_{ii} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_i \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{\omega_{ik}}{2} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k - \sum_{1 \leq k < i \leq n} \frac{\omega_{ik}}{2} \cdot \vartheta_k \wedge \vartheta_i + \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_{ii} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_i \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{\omega_{ik}}{2} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k + \sum_{1 \leq k < i \leq n} \frac{\omega_{ik}}{2} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k + \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_{ii} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_i \\ &= \sum_{i, k=1}^n \frac{\omega_{ik}}{2} \cdot \vartheta_i \wedge \vartheta_k. \end{aligned}$$

- (4) Eine p -Linearform mit einer Darstellung $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ als äußeres Produkt von Linearformen heißt zerlegbar. Dabei ist nicht jede Multilinearform $\omega \in \wedge^p V^*$ zerlegbar: für $n \geq 4$ ist etwa $\omega = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 + \vartheta_3 \wedge \vartheta_4$ nicht zerlegbar.
- (5) **Basis- und Koordinatentransformation:** Die betrachteten induzierten Basen hingen von der Wahl der Basis $(e_1, \dots, e_n)$ des Vektorraums V ab. Eine Basisstransformation $e'_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} e_i$ mit der zugehörigen Koordinatentransformation $x_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x'_j$ induziert im Dualraum V^* die duale Basisstransformation $\vartheta'_l = \sum_{1 \leq k \leq n} \tilde{a}_{lk} \vartheta_k$ mit der zugehörigen Koordinatentransformation $\alpha_k = \sum_{1 \leq l \leq n} \tilde{a}_{lk} \alpha'_l$, wobei $(\tilde{a}_{lk}) = (a_{ij})^{-1}$ gilt. Für eine Linearform $\alpha \in V^*$ erhält man also

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k \vartheta_k(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k \vartheta_k \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k x_k = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{1 \leq l \leq n} \tilde{a}_{lk} \alpha'_l \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_{kj} x'_j \right) \\ &= \sum_{1 \leq l, j \leq n} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \tilde{a}_{lk} a_{kj} \right) \alpha'_l x'_j = \sum_{1 \leq l \leq n} \alpha'_l x'_l. \end{aligned}$$

8. Differentialformen

Entsprechend wird im Tensorraum $\otimes^p V^*$ die tensorielle Koordinatentransformation

$$\phi_{k_1, \dots, k_p} = \sum_{l_1, \dots, l_p=1}^n \tilde{a}_{l_1 k_1} \cdots \tilde{a}_{l_p k_p} \cdot \phi'_{l_1, \dots, l_p}$$

induziert für Multilinearformen

$$\phi = \sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \phi_{k_1, \dots, k_p} \cdot \vartheta_{k_1} \otimes \dots \otimes \vartheta_{k_p} = \sum_{l_1, \dots, l_p=1}^n \phi'_{l_1, \dots, l_p} \cdot \vartheta'_{l_1} \otimes \dots \otimes \vartheta'_{l_p}.$$

8.2. Differentialformen und äußere Differentiale

Wir wählen eine anschauliche Darstellung und betrachten ein Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$ als Grundmannigfaltigkeit. Jedoch können die folgenden Untersuchungen auf n -dimensionale „krumme“ Flächen $M \subset \mathbb{R}^N$ für $N \geq n$ – etwa auf das injektive Bild $M = F(G)$ unter einer Abbildung $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$ – übertragen werden. Ebenso kann man abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten, die nur lokal homöomorph zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sind.

Bemerkung. Sei zunächst ein Punkt $x \in M$ festgewählt. Dann ist $T_x M = \{\mathcal{X}_x = (x, \mathcal{X}) : \mathcal{X} \in \mathbb{R}^n\}$ der **Tangentenraum** der **Mannigfaltigkeit** M in dem Punkt x . Er bildet einen n -dimensionalen Vektorraum, der isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist und die Standardbasis $(e_1|_x, \dots, e_n|_x)$ besitzt. Jedem Tangentialvektor $\mathcal{X}_x \in T_x M$ ist bijektiv ein **Differentialoperator** $d_{\mathcal{X}|_x}$ zugeordnet, der die Richtungsableitung einer im Punkte x differenzierbaren Funktion f in Richtung $\mathcal{X}_x$ bildet, d.h.

$$d_{\mathcal{X}|_x} : f \mapsto d_{\mathcal{X}} f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{X}_i \partial_i f(x)$$

und insbesondere

$$d_{e_k|_x} : f \mapsto d_{e_k} f(x) = \partial_k f(x).$$

Identifiziert man nun $\mathcal{X}_x$ und $d_{\mathcal{X}|_x}$, so kann man auch $(\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_x)$ als Standardbasis von $T_x M$ auffassen. Diese Darstellung wird bei abstrakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zur Definition des Tangentialraums verwendet.

Definition. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in M$ differenzierbar. Dann heißt die durch $\mathcal{X}_x \in T_x M \mapsto df|_x(\mathcal{X}_x) = d_{\mathcal{X}} f(x) \in \mathbb{R}$ definierte **Linearform** $df|_x \in T_x^* M$ das **Differential** von f im Punkte x – dabei gilt insbesondere $df|_x(e_k|_x) = \partial_k f(x)$. Die Projektionen $p_i : x \in M \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ besitzen die **speziellen Differentiale** $dx_i|_x = dp_i|_x$ mit der Eigenschaft $dx_i|_x(e_k|_x) = \delta_{ik}$, also ist $(dx_1|_x, \dots, dx_n|_x)$ die **Dualbasis** von $T_x^* M$ bzgl. der Standardbasis von $T_x M$. Jedes Differential $df|_x$ besitzt dann die Basisdarstellung

$$df|_x = \sum_{1 \leq i \leq n} df|_x(e_i|_x) \cdot dx_i|_x = \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i f(x) \cdot dx_i|_x.$$

Bemerkung. Für nun variabel gewähltes $x \in M$ betrachten wir die **Vektorraumbündel**

$ \begin{aligned} TM &= \bigcup_{x \in M} T_x M \text{ (Tangentialbündel) bzw.} \\ T^*M &= \bigcup_{x \in M} T_x^* M \text{ (Cotangentialbündel) bzw.} \\ \bigwedge^p T^*M &= \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p T_x^* M \text{ (äußeres Produktbündel)} \end{aligned} $

der disjunkten Räume $T_x M$ bzw. $T_x^* M$ bzw. $\bigwedge^p T_x^* M$.

Definition. Eine Differentialform vom Grade $p \in \mathbb{N}_0$ oder p -Form ist eine Abbildung $\omega : x \in M \mapsto \omega_x \in \bigwedge^p T_x^* M$ mit der Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

und zugehörigen Koordinatenfunktionen $\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) : M \rightarrow \mathbb{R}$. Die Differentialform ω heißt C^r -**differenzierbar**, falls die Koordinatenfunktionen C^r -differenzierbar sind.

Beispiel. Eine Differentialform vom Grade $p = 0$ ist eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Differentialform vom Grade $p = 1$ ist eine **Pfaffsche Form** $\varphi : x \in M \mapsto \varphi_x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot dx_i|_x \in T_x^* M$. Eine Differentialform vom Grade $p = n$ ist $\omega : x \in M \mapsto \omega_x = f(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_x \in \bigwedge^n T_x^* M$.

Definition. Das totale Differential einer differenzierbaren Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – d.h. einer differenzierbaren Differentialform vom Grade $p = 0$ – sei die Differentialform

$$df : x \in M \mapsto df|_x = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) \cdot dx_k|_x \in T_x^* M.$$

Das äußere Differential einer differenzierbaren p -Form $\omega : M \rightarrow \bigwedge^p T^* M$ sei die durch

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} \cdot \underbrace{dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}}_{\text{keine Basisdarstellung}}
\end{aligned}$$

definierte Differentialform $d\omega : M \rightarrow \bigwedge^{p+1} T^* M$ vom Grade $p+1$.

Beispiel. Wir geben für $M \subset \mathbb{R}^3$ die Gestalt totaler und äußerer Differentiale an:

- (1) Die 0-Form $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt das totale Differential $df = \partial_1 f \cdot dx_1 + \partial_2 f \cdot dx_2 + \partial_3 f \cdot dx_3$.
- (2) Die 1-Form $\varphi : M \rightarrow T^* M$ mit $\varphi = \varphi_1 \cdot dx_1 + \varphi_2 \cdot dx_2 + \varphi_3 \cdot dx_3$ besitzt das äußere Differential $d\varphi : M \rightarrow \bigwedge^2 T^* M$ mit $d\varphi = \sum_{1 \leq j, k \leq 3} \partial_k \varphi_j \cdot dx_k \wedge dx_j = (\partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2) \cdot dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3) \cdot dx_3 \wedge dx_1 + (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1) \cdot dx_1 \wedge dx_2$.
- (3) Die 2-Form $\psi : M \rightarrow \bigwedge^2 T^* M$ mit $\psi = \psi_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + \psi_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + \psi_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2$ besitzt das äußere Differential $d\psi : M \rightarrow \bigwedge^3 T^* M$ mit $d\psi = (\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.
- (4) Die 3-Form $\omega = f \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ besitzt das äußere Differential $d\omega = 0$.

8. Differentialformen

Bemerkung. In der klassischen Vektoranalysis im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ werden statt des Operators $\omega \mapsto d\omega$ verschiedene andere **Differentialoperatoren** verwendet.

- 1) Für ein Skalarfeld $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet man das Vektorfeld $\text{grad } f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{grad } f = \nabla f = \partial_1 f \cdot e_1 + \partial_2 f \cdot e_2 + \partial_3 f \cdot e_3$.
- 2) Für ein **Vektorfeld** $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cdot e_1 + \mathcal{X}_2 \cdot e_2 + \mathcal{X}_3 \cdot e_3$ betrachtet man zwei verschiedene Operatoren:
 - (a) Die **Rotation** von $\mathcal{X}$ ist das **Vektorfeld** $\text{rot } \mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } \mathcal{X} = \nabla \times \mathcal{X} = (\partial_2 \mathcal{X}_3 - \partial_3 \mathcal{X}_2) \cdot e_1 + (\partial_3 \mathcal{X}_1 - \partial_1 \mathcal{X}_3) \cdot e_2 + (\partial_1 \mathcal{X}_2 - \partial_2 \mathcal{X}_1) \cdot e_3$.
 - (b) Die **Divergenz** von $\mathcal{X}$ ist das **Skalarfeld** $\text{div } \mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{div } \mathcal{X} = \partial_1 \mathcal{X}_1 + \partial_2 \mathcal{X}_2 + \partial_3 \mathcal{X}_3$.

Hierbei werden **Produkt Räume** $\wedge^p T_x^* M$ mit den zugehörigen **Koordinatenräumen** identifiziert, d.h. man identifiziert einerseits $T_x^* M$ und $\mathbb{R}^3$ und $\wedge^2 T_x^* M$ sowie andererseits $\wedge^3 T_x^* M$ und $\mathbb{R}$ – obwohl die jeweiligen Basen unterschiedliche Eigenschaften haben. Dazu betrachten wir die Auswirkungen einer Spiegelung $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_2, e_1, e_3)$ des Raumes auf die **Produktbasen**:

- (i) In $\wedge^0 T_x^* M = \mathbb{R}$ erhalten wir $1 \mapsto 1$.
- (ii) In $\wedge^1 T_x^* M = T_x^* M$ erhalten wir $(dx_1, dx_2, dx_3) \mapsto (dx_2, dx_1, dx_3)$.
- (iii) In $\wedge^2 T_x^* M$ erhalten wir $(dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2) \mapsto -(dx_3 \wedge dx_1, dx_2 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_2)$.
- (iv) In $\wedge^3 T_x^* M$ erhalten wir $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \mapsto -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Wir stellen nun die im Umgang mit **Differentialformen** und in der **Vektoranalysis** verwendeten Begriffe gegenüber:

0-Form f als Funktion	Skalarfeld
df als 1-Form	$\text{grad } f$ als Vektorfeld
1-Form φ	Vektorfeld $\mathcal{X}$
$d\varphi$ als 2-Form	$\text{rot } \mathcal{X}$ als axiales Vektorfeld
2-Form ψ	axiales Vektorfeld $\mathcal{Y}$
$d\psi$ als 3-Form	$\text{div } \mathcal{Y}$ als Pseudoskalarfeld

Das **Differentialformenkalkül** besitzt dabei wesentliche Vorteile gegenüber der klassischen Vektoranalysis, denn die Definition einer **Differentialform** ist **unabhängig von der Raumdimension** und auf **abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten** erweiterbar. Außerdem ist der Differentialformenbegriff verträglich gegenüber **differenzierbaren Koordinatentransformationen**, d.h. es können vom Punkte x **abhängige Basisfelder** benutzt werden.

- Dazu betrachten wir für $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Transformation $(x = r \cos t, y = r \sin t)$ auf ebene Polarkoordinaten und verwenden statt der Standardbasis (e_x, e_y) die Tangentialvektoren

$$\begin{aligned} e_r &= \begin{pmatrix} \partial_r x \\ \partial_r y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_t \\ &= \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Basistransformation in $T_P M$ induziert in $T_P^* M$ die duale Basistransformation

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ dt \end{pmatrix},$$

es gilt also $dx = \cos t \cdot dr - r \sin t \cdot dt = \partial_r x \cdot dr + \partial_t x \cdot dt$ und $dy = \sin t \cdot dr + r \cos t \cdot dt = \partial_r y \cdot dr + \partial_t y \cdot dt$.

Satz 8.2.1. Für eine 2-mal differenzierbare Differentialform $\omega : M \rightarrow \wedge^p T^* M$ gilt $dd\omega = 0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ \Rightarrow d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} \cdot dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ \Rightarrow dd\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underbrace{\partial_l \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p}}_{=\partial_k \partial_l \omega_{i_1 \dots i_p}} \cdot \underbrace{dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}}_{=-dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}} \\ &= -dd\omega. \end{aligned}$$

□

Definition. Eine Differentialform $\omega : M \rightarrow \wedge^p T^* M$ heißt **geschlossen**, wenn ihr Differential $d\omega = 0$ ist. Man nennt sie **exakt**, wenn sie das Differential $\omega = d\varphi$ einer Differentialform $\varphi : M \rightarrow \wedge^{p-1} T^* M$ ist. Eine exakte Differentialform ist wegen $d\omega = dd\varphi = 0$ stets geschlossen.

Satz 8.2.2. (Satz von Poincaré)

Für eine stetig differenzierbar Differentialform $\omega : M \rightarrow \wedge^p T^* M$ gilt:

- Die p -Form ω ist dann lokal exakt, wenn sie geschlossen ist. In diesem Fall besitzt also jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $U \subset M$, so dass $\omega|_U$ exakt ist.
- Die p -Form ω ist dann global exakt, wenn sie geschlossen und die Mannigfaltigkeit M sternenförmig oder einfach zusammenhängend ist.

Beispiel.

- Wir betrachten ein Vektorfeld $\mathcal{X} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } \mathcal{X} = 0$ und suchen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{X} = \text{grad } f$. Für $\mathcal{X}(x, y, z) = x^3 \cdot e_1 + e_2$ gilt $\text{rot } \mathcal{X} = 0$ sowie

$$\begin{aligned} \text{grad } f = \mathcal{X} &\Leftrightarrow \begin{cases} lcl \partial_x f(x, y, z) &= x^3 \\ \partial_y f(x, y, z) &= 1 \\ \partial_z f(x, y, z) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} lcl f(x, y, z) &= \frac{1}{4}x^4 + g(y, z) \\ \partial_y g(y, z) &= 1 \\ \partial_z g(y, z) &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} lcl f(x, y, z) &= \frac{1}{4}x^4 + g(y, z) \\ g(y, z) &= y + h(z) \\ h'(z) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} lcl f(x, y, z) &= \frac{1}{4}x^4 + g(y, z) \\ g(y, z) &= y + h(z) \\ h(z) &= c \end{cases} \end{aligned}$$

und man erhält daher $f(x, y, z) = \frac{1}{4}x^4 + y + c$. In diesem Fall besitzt das Vektorfeld also eine als Potential bezeichnete Stammfunktion.

8. Differentialformen

- (2) Die geschlossene Differentialform $\varphi : (x, y) \in M \mapsto \mathcal{X}_1(x, y)dx + \mathcal{X}_2(x, y)dy \in T^*M$ mit $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $\mathcal{X}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ ist nicht global exakt.

Beweis. Wegen $\partial_1 \mathcal{X}_2(x, y) = \partial_2 \mathcal{X}_1(x, y)$ und $d\varphi(x, y) = \partial_1 \mathcal{X}_2(x, y) \cdot dx \wedge dy + \partial_2 \mathcal{X}_1(x, y) \cdot dy \wedge dx$ ist die Differentialform φ geschlossen. Nun nehmen wir an, es gebe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = \varphi$. Insbesondere gilt in diesem Fall $\text{grad } f(x, y) = \mathcal{X}(x, y)$ für $(x, y) \in M$. Für die Funktion $t \mapsto g(t) = f(\cos t, \sin t)$ erhält man daher $g'(t) = -\partial_x f(\cos t, \sin t) \sin t + \partial_y f(\cos t, \sin t) \cos t = -\mathcal{X}_1(\cos t, \sin t) \sin t + \mathcal{X}_2(\cos t, \sin t) \cos t = 1$. Dies liefert aber einen Widerspruch zu $g(0) = g(2\pi)$. $\square$

8.3. Kurven- und Flächenintegrale

Eine **orientierte p -Fläche** ist das injektive Bild $x[K] = S \subset M$ einer stetig **differenzierbaren Parameterdarstellung** $u \in K \subset \mathbb{R}^p \mapsto x(u) \in M$ mit linear unabhängigen Tangentialvektoren $\partial_1 x, \dots, \partial_p x$ – d.h. $x : K \rightarrow S$ ist regulär. Eine weitere C^1 -Parameterdarstellung $\tilde{u} \in \tilde{K} \subset \mathbb{R}^p \mapsto \tilde{x}(\tilde{u}) \in M$ mit $\tilde{x}[\tilde{K}] = S$ heißt zulässig, wenn für eine Parametertransformation $\phi : \tilde{K} \rightarrow K$ mit $\det D\phi > 0$ – d.h. $\phi : \tilde{K} \rightarrow K$ ist positiv orientiert – gilt $\tilde{x}(\tilde{u}) = x(\phi(\tilde{u}))$. Wählt man eine die Orientierung ändernde Parametertransformation $\psi : \tilde{K} \rightarrow K$, so schreibt man $x(\psi[\tilde{K}]) = -S$.

Definition. Es sei $\omega : M \rightarrow \wedge^p T^*M$ eine stetige Differentialform und $S \subset M$ eine orientierte p -Fläche. Dann ist das **p -Flächenintegral** von ω über S definiert durch

$$\int_S \omega = \int_K \omega_{x(u)}(\partial_1 x(u), \dots, \partial_p x(u)) du$$

mit einer beliebigen zulässigen Parameterdarstellung $u \in K \mapsto x(u) \in S$.

Bemerkung.

- (1) Da für $dx_i|_{x(u)} : T_{x(u)}M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} dx_i|_{x(u)}(\partial_k x(u)) &= dx_i|_{x(u)} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \partial_k x_j(u) \cdot e_j|_{x(u)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_k x_j(u) \cdot dx_i|_{x(u)}(e_j|_{x(u)}) = \partial_k x_i(u) \end{aligned}$$

erhält man für die Basisdarstellung der Differentialform $\omega = M \rightarrow \wedge^p T^*M$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}|_{x(u)} (\partial_1 x(u), \dots, \partial_p x(u)) \\
 &= \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}|_{x(u)}(\partial_1 x(u)) & \dots & dx_{i_1}|_{x(u)}(\partial_p x(u)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{i_p}|_{x(u)}(\partial_1 x(u)) & \dots & dx_{i_p}|_{x(u)}(\partial_p x(u)) \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \partial_1 x_{i_1}(u) & \dots & \partial_p x_{i_1}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 x_{i_p}(u) & \dots & \partial_p x_{i_p}(u) \end{pmatrix} \\
 &= \det \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} \right) (u).
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das p -Flächenintegral die Gleichheit

$$\int_S \omega = \int_K \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x(u)) \cdot \det \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} \right) (u) du.$$

- (2) Die Unabhängigkeit des p -Flächenintegrals von der gewählten zulässigen Parameterdarstellung folgt mit dem Ergebnis aus (1) nun durch den Transformationssatz für Mehrfachintegrale. Es ist

$$\begin{aligned}
 & \int_K \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x(u)) \cdot \det \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} \right) (u) du \\
 &= \int_{\tilde{K}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x(\phi(\tilde{u}))) \cdot \det \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} \right) (\phi(\tilde{u})) \cdot |\det D\phi(\tilde{u})| d\tilde{u}
 \end{aligned}$$

und wegen $\det D\phi > 0$ folgt aus der Kettenregel der mehrdimensionalen Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
 & \det \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} \right) (\phi(\tilde{u})) \cdot |\det D\phi(\tilde{u})| \\
 &= \det \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} \right) (\phi(\tilde{u})) \cdot \det \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_p)}{\partial(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p)} \right) (\tilde{u}) \\
 &= \det \left(\frac{\partial(x_{i_1} \circ \phi, \dots, x_{i_p} \circ \phi)}{\partial(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p)} \right) (\tilde{u}) \\
 &= \det \left(\frac{\partial(\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_p})}{\partial(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p)} \right) (\tilde{u}).
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also die Darstellung

$$\int_S \omega = \int_{\tilde{K}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(\tilde{x}(\tilde{u})) \cdot \det \left(\frac{\partial(\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_p})}{\partial(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p)} \right) (\tilde{u}) d\tilde{u}.$$

8. Differentialformen

- (3) Da für eine die Orientierung ändernde Parametertransformation $\det D\psi < 0$ gilt, erhält man aus den Überlegungen in (2) die Beziehung

$$\int_{-S} \omega = - \int_S \omega.$$

Beispiel. Die folgenden Beispiele zeigen, dass das Differentialformenkalkül eine einheitliche und auf beliebige Dimensionen erweiterbare Beschreibung der klassischen Kurvenintegrale, Flächenintegrale und Volumenintegrale liefert.

- (1) Ein Kurvenintegral ist ein 1-Flächenintegral einer 1-Form $\phi = E_1 \cdot dx_1 + \dots + E_n \cdot dx_n$ über einer Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^n$. Für die Parameterdarstellung $t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ der Kurve $\gamma = x[I]$ und das Vektorfeld $E = (E_1, \dots, E_n)$ gilt

$$\int_{\gamma} \phi = \int_I \sum_{1 \leq i \leq n} E_i(x(t)) \cdot \dot{x}_i(t) dt = \int_I \langle E(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt.$$

In der Vektoranalysis sind für Kurvenintegrale die Bezeichnungen

$\vec{T} = \dot{x} ^{-1} \cdot \dot{x}$	Tangenteneinheitsvektor der Kurve
$ds = \dot{x}(t) \cdot dt$	skalares Bogenelement der Kurve
$\vec{ds} = \vec{T} \cdot ds$	vektorielles Bogenelement der Kurve

üblich sowie die Schreibweise

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma} (\vec{E} \cdot \vec{T}) \cdot ds.$$

- (2) Das Flächenintegral einer 2-Form $\omega = B_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + B_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + B_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2$ über einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit der Parameterdarstellung $(u, v) \in K \subset \mathbb{R}^2 \mapsto x(u, v) \in M$ ist

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_K B_1(x(u, v)) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix}}_{=(\partial_1 x \times \partial_2 x)_1} \\ &\quad + B_2(x(u, v)) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{pmatrix}}_{=(\partial_1 x \times \partial_2 x)_2} + B_3(x(u, v)) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix}}_{=(\partial_1 x \times \partial_2 x)_3} d(u, v) \\ &= \int_K \langle B(x(u, v)), (\partial_1 x \times \partial_2 x)(u, v) \rangle d(u, v). \end{aligned}$$

mit dem Vektorfeld $B = (B_1, B_2, B_3)$. In der Vektoranalysis sind für Flächenintegrale die Bezeichnungen

$\vec{N} = x_1 \times x_2 ^{-1} \cdot (x_1 \times x_2)$	Normaleneinheitsvektor
$do = x_1 \times x_2 (u, v) \cdot du \cdot dv$	skalares Oberflächenelement
$\vec{do} = \vec{N} \cdot do$	vektorielles Oberflächenelement

üblich sowie die Schreibweise

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{do} = \int_S (\vec{B} \cdot \vec{N}) \cdot do.$$

- (3) Das Volumenintegral einer 3-Form $\omega = g \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ über einen Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der trivialen Parameterdarstellung $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ ist

$$\int_K \omega = \int_K g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

In der Vektoranalysis bezeichnet man $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ als orientiertes Volumenelement und beschreibt mit

$$\int_K g dV$$

die Integration einer Funktion über einen Körper.

8.4. Der Satz von Stokes

Beispiele.

- 1) Wir untersuchen das Kurvenintegral einer exakten 1-Form $\varphi = df$ über einer durch $x : [a, b] \rightarrow M$ parametrisierten Kurve γ . Wegen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_{[a,b]} \sum_{k=1}^n \partial_k f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t)) dt = f(x(b)) - f(x(a)) \end{aligned}$$

ist das Kurvenintegral durch die Werte der Randpunkte festgelegt.

- 2) Nun betrachten wir für $M \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi = \varphi_1 \cdot dx_1 + \varphi_2 \cdot dx_2$ das Flächenintegral der Differentialform $\omega = d\varphi = (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1) \cdot dx_1 \wedge dx_2$ über einem durch $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$ trivial parametrisierten Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_Q d\varphi &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \partial_1 \varphi_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \partial_2 \varphi_1(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(b_1, x_2) - \varphi_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1, b_2) - \varphi_1(x_1, a_2) dx_1. \end{aligned}$$

Der Rand von Q ist $\partial Q = \partial_1^o Q \cup \partial_1^u Q \cup \partial_2^o Q \cup \partial_2^u Q$ und für die Seitenfläche $\partial_1^o Q$ mit der natürlichen Parameterdarstellung $P : x_2 \in [a_2, b_2] \mapsto (b_1, x_2) \in \partial_1^o Q$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\partial_1^o Q} \varphi &= \int_{[a_2, b_2]} \varphi_1(b_1, x_2) \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(b_1, x_2) + \varphi_2(b_1, x_2) \cdot \frac{\partial P_2}{\partial x_2}(b_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_{[a_2, b_2]} \varphi_2(b_1, x_2) dx_2 \end{aligned}$$

8. Differentialformen

Die anderen Seitenflächen mit den natürlichen Parameterdarstellungen $x_2 \in [a_2, b_2] \mapsto (a_1, x_1) \in \partial_1^u Q$ bzw. $x_1 \in [a_1, b_1] \mapsto (x_1, a_2) \in \partial_2^u Q$ bzw. $x_1 \in [a_1, b_1] \mapsto (x_1, b_2) \in \partial_2^o Q$ behandelt man analog. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} \int_Q d\varphi &= \left(\int_{\partial_1^o Q} \varphi - \int_{\partial_1^u Q} \varphi \right) - \left(\int_{\partial_2^o Q} \varphi - \int_{\partial_2^u Q} \varphi \right) \\ &= \int_{(\partial_1^o Q) \cup (-\partial_1^u Q) \cup (-\partial_2^o Q) \cup (\partial_2^u Q)} \varphi = \int_{\partial Q} \varphi, \end{aligned}$$

wobei der Rand ∂Q in mathematisch positivem Sinn durchlaufen wird.

Satz 8.4.1. (Satz von Stokes)

Für eine stetig differenzierbare p -Form ω und eine orientierte p -Fläche $S \subset M$ gilt

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega,$$

wenn der Rand ∂S stückweise glatt und geeignet orientiert ist.

Beweis. Wir skizzieren lediglich die Beweisidee und betrachten dabei insbesondere die Orientierung des Randes ∂S .

- (1) Es sei zunächst $S = x[Q]$ das Bild eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^p$ mit der geeigneten Parameterdarstellung $(u_1, \dots, u_p) \mapsto x(u_1, \dots, u_p) \in S \subset M$. Dann ist

$$\partial S = x[\partial S] = \bigcup_{1 \leq i \leq p} (x[\partial_i^o Q] \cup x[\partial_i^u])$$

mit der Standardparametrisierung

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p) \mapsto \begin{cases} lx(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_p) \in x[\partial_i^u Q] \\ x(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_p) \in x[\partial_i^o Q] \end{cases}$$

der Randstücke. Bildet man nun aus diesen $(p-1)$ -dimensionalen Flächenstücken unter Beachtung der Orientierung die formale Summe

$$\partial S = \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \cdot (x[\partial_i^o Q] - x[\partial_i^u]),$$

so lässt sich zeigen

$$\int_S d\omega = \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \cdot \left(\int_{x[\partial_i^o Q]} \omega - \int_{x[\partial_i^u]} \omega \right) = \int_{\partial S} \omega.$$

- (2) Ist S eine **Vereinigung von Quaderbildern**, so gilt die Gleichung ebenfalls, da sich die inneren Randstücke wegheben. Den allgemeinen Fall $S = x[K]$ mit einem Körper $K \subset \mathbb{R}^p$ erhält man durch Approximation des Körpers durch Quadersummen und anschließenden Grenzübergang.

□

Bemerkung. Wir geben die dem allgemeinen Satz von Stokes entsprechenden Zusammenhänge in der Vektoranalysis an.

1) Für die Endpunkte x_1 und x_2 einer geeigneten Kurve γ gilt

$$\int_{\gamma} \operatorname{grad} f \, d\vec{s} = f(x_2) - f(x_1).$$

2) Nach dem Integralsatz von Stokes gilt

$$\int_S \operatorname{rot} \mathcal{X} \, d\vec{o} = \int_{\partial S} \mathcal{X} \, d\vec{s}.$$

3) Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$\int_K \operatorname{div} \mathcal{Y} \, dV = \int_{\partial K} \mathcal{Y} \, d\vec{o}.$$

Index

- C^r -Differentialform, 253
- L -stetig, 171
- R -Integral, 131
- R -integrierbar, 131
- ε - δ Kriterium, 60
- σ -Additivität, 234
- ε -Umgebung, 36
- n -Tupel, 13
- n -Tupel, geordnet, 13
- p -Flächenintegral, 256
- p -Linearformen, schiefsymmetrische, 250
- p -mal diffbar, 98
- p -mal stetig diffbar, 98
- Äquivalenzklasse, 23
- Äquivalenzklassen, 23
- Äquivalenzklassenrelation, 26
- Äquivalenzrelation, 14, 23
- Äquivalenzklasse, 14
- äquidistante Zerlegung, 133
- äquivalent, 7, 14
- äußere Lebesgue-Maß, 232
- überabzählbar, 21
- 1-Norm, 35, 38
- 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 139
- 1. Regel von l'Hospital, 104
- 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 140
- 2. Regel von l'Hospital, 104
- Abbildung, konstante, 60
- abelsche Gruppe, 24
- Abelscher Grenzwertsatz, 78
- abgeschlossen, 37, 40
- abgeschlossenen Intervallen, 144
- abgeschlossenes Intervall, 29
- abhängige Basisfelder, 254
- Ableitung, 93
- Ableitung, linksseitige, 94
- Ableitung, rechtsseitige, 94
- absolut konvergent, 55
- absolute Konvergenz, 57
- absolute Maximum, 101, 166
- absolute Minimum, 166
- absoluten Extrema, 166
- absolutes Minimum, 101
- absteigender Kettensatz, 234
- abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten, 254
- Abtrennungsregel, 8
- abzählbar unendlich, 21, 25
- abzählbare Quadersumme, 231
- Additionstheorem der Exponentialfunktion, 83
- Additivität, 215
- Adjunktion, 6
- allgemeingültig, 7
- Allmenge, 11
- Allquantor, 7
- Allrelation, 14
- alternierende harmonische Reihe, 55
- alternierende Reihe, 54
- analytisch, 124
- analytische Fortsetzung, 125
- Anordnung der Doppelfolge, 81
- Anordnung der Doppelreihe, 81
- Antisymmetrie, 16
- approximieren, 94
- Archimedes, 48
- Archimedische Ordnung, 38
- Arcus - Cosinus, 89
- Arcus - Sinus, 89
- Arcus - Tangens, 89
- Arcus-Cotangens, 89
- Area - Cosinus hyperb., 88
- Area - Sinus hyperb., 88
- Area - Tangens hyperb., 88

- Area - Cotangens hyperb., 88
- Argumentfunktion, 88
- Assoziativgesetz, 22
- aufsteigender Kettensatz, 234
- axiales Vektorfeld, 254
- axiomatisch, 6
- Axiomen, 6

- Banach Räume, 50
- Banach Raum, 49, 170
- Banach- Raum, 74
- Banach-Raumes, 171
- Banach-Tarski, 215
- Banachscher Fixpunktsatz, 171
- Basisdarstellung, 249
- Basisfelder, abhängige, 254
- bedingt konvergente Reihen, 59
- beschränkt, 40, 45, 46, 66
- beschränkte Funktionen, 144
- bestimmt divergent, 50
- bestimmtes Integral, 111
- Betrag von z , 33
- Betragsfunktion, 35, 36
- Bewegungsinvarianz, 215
- Bijektion, 59
- bijektiv, 17
- Bild, 16–18
- Bildintervall, 70
- Binominalreihe, 77
- binomische Formel, 83
- Blatter, Christian, 88
- bogenweise zusammenhängend, 147

- Cantor, 10
- Cantorsche Diagonalanordnung, 81
- Cantorsche Diagonalverfahren, 25
- Cantorsches Diagonalverfahren, 81
- Cauchy Konvergenzkriterium für glm. Konvergenz, 73
- Cauchy-Konvergenzkriterium für Folgen, 49
- Cauchy-Produktreihe, 83, 84
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 34
- Cauchyfolge, 49
- Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen, 52
- Cayleysche Oktave, 33

- Cosinus, 89
- Cosinus hyperbolicus, 88
- Cosinusreihe, 76
- Cotangens, 89
- Cotangens hyperbolicus, 88
- Cramerschen Regel, 87

- Dedekind'sche Schritte, 26
- Dedekindscher Schritt, 27
- Definitheit, 162
- definitheit, 164
- Definition der Integrierbarkeit, 138
- Definitionsmenge, 16
- degenerierter Quader, 231
- Determinante, Gramsche, 229
- Diagonale, 14
- Diagonalverfahren, Cantorsches, 81
- Diffbar, 150
- diffbar, 153
- Diffbarkeit von Funktionenfolgen, 107
- Diffbarkeit, linksseitige, 94
- Diffbarkeit, rechtsseitige, 94
- Differential, 252
- Differentiale, spezielle, 252
- Differentialform, exakt, 255
- Differentialform, geschlossen, 255
- Differentialformen, 254
- Differentialformenkalkül, 254
- Differentialoperator, 252
- Differentialoperatoren, 254
- Differentialquotient, 93
- Differenzialquotient, 93
- differenzierbar, 93
- differenzierbaren Koordinatentransformationen, 254
- differenzierbaren Parameterdarstellung, 256
- Dimensionsinvarianz bei Homöomorphismen, 70
- direkte Beweis, 8
- Dirichlet-Funktion, 61, 132
- disjunkt, 12, 15
- Distributivgesetz, 22
- divergent, 41, 57
- Divergenz, 56, 254
- divergiert, 56
- Division durch Potenzreihen, 86
- Doppelfolge, 81

- Doppelreihe, 81
- Dreiecksungleichung, 34, 35, 240
- Dreiecksungleichung, umgekehrte, 35
- Dualbasis, 252
- Durchschnitt, 38

- Ebene Polarkoordinaten, 226
- echt komplexe Nullstellen, 117
- echtes Supremum, 74
- Eigenschaften stetiger Abbildungen, 62
- Eigenvektoren, 164
- Eigenwerte, 164
- Eigenwerten, 164
- Eindeutig, 17
- Eindeutig, umkehrbar, 17
- Einheitskugeln, 36
- einseitige Grenzwerte, 64
- Einselement, 24
- Elementenbeziehung, 10
- elemtar-geometrischen Objekte, 220
- Ellipsoide, 220
- Elliptische Integrale, 117
- Elliptisches Integral 1.Art, 117
- Elliptisches Integral 2.Art, 117
- endlich, 21
- Ergänzungsquadersumme, 218
- Erhalt des Zusammenhangs, 68
- Erweiterte Mittelwertsatz, 103
- Erzeugendeneigenschaft, 250
- euklidische Längenfunktion, 34
- euklidische Norm, 34, 38
- euklidischen Abstand, 33
- euklidischen Norm, 35
- Eulersche Zahl, 47
- Eulerschen Konstanten, 146
- EV, 164
- EW, 164
- exakte Differentialform, 255
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, 193
- Existenzquantor, 8
- Existenzsatz von Peano, 193
- Exponentialfunktion, 88, 95
- Exponentialfunktion, komplex, 88
- Exponentialfunktion, reell, 88
- Exponentialreihe, 53, 76
- Exzentrität, numerische, 144

- Faktorenmenge, 15
- Familie, 18
- Fehlerabschätzung, 54
- Feinheit, 129
- Fixpunkt, 171, 172
- Folge, 18
- Folgenkriterium für Grenzwert von Abbildungen, 64
- Folgenkriterium für Stetigkeit, 62
- folgestetig, 61
- Form, Pfaffsche, 253
- Formel von Hadamard, 77
- Fortsetzungssatz, 193
- Fundamentalsatz (komplex), 117
- Fundamentalsatz der Algebra, 117
- Funktionalmatrix, 152
- Funktionen, 17

- Gebiet, 147
- Geometrische Bedeutung:, 101
- geometrische Reihe, 53, 71, 76
- geordnetes n -Tupel, 13
- gerichtetes System, 238
- geschlossen, 255
- geschlossene Differentialform, 255
- gleichmäßig konvergent, 71, 183
- gleichmäßige Konvergenz, 107
- gleichmäßigen Stetigkeit, 67
- gleichmächtig, 21
- globalen Extrema, 166
- Gradient, 150
- Gramsche Determinante, 229
- Grenzfunktion, 70, 107
- Grenzwert, 41
- Grenzwert, einseitig, 64
- Grenzwert, uneigentlich, 65
- Grenzwertbegriff, 63
- Großer Umordnungssatz, 81
- Grundannahmen, 6

- Häufungspunkt, 47
- halboffenes Intervall, 29
- Halbordnung, 16
- Hamilton-Quaternionen, 33
- harmonische Reihe, 53, 57
- Hauptdeterminanten, 164
- Hauptsatz über den Raum $\mathbb{R}$, 29

- Hauptsatz über stetige Abbildungen auf kompakten Mengen $\mathbb{K}$, 66
- Hausdorfsche Trennungsregel, 36
- Hesse-Matrix, 160, 162
- Hessesche Normalform einer Hyperebene, 150
- Hinreichende Bed. für WP's, 128
- Hinreichende Bedingung für lokale Extrema, 162
- HNF, 150
- Homöomorphismus, 70
- Homogenität, 34
- homogenität, 35
- horizontale Tangentialhyperebene, 161
- Hyperbolischer Paraboloid, 161
- identisch, 15
- Identitätsabbildung, 18
- Identitätssatz für Potenzreihen, 87
- imaginäre Einheit, 33
- Implikation, 7
- indefinit, 162
- indefinit, 162, 164
- Indexmenge, 18
- indirekte Beweis, 9
- Induktionsanfang, 20
- Induktionsmenge, 20
- Induktionsschritt, 20
- Infimum, 27
- Inhalt und Feinheit:, 207
- Injektion, 23
- injektiv, 17, 69
- Inklusion, 10
- Innenpunkt, 70
- Innenpunktmengen, 216
- innere Intervall, 99
- Integral, bestimmtes, 111
- Integralfunktion, 142
- Integralfunktion des Restgliedes, 142
- Integration über Normalbereichen, 223
- Integrationstheorie, Riemannsche, 215
- integrierbar, unbestimmt, 110
- integrierbar, uneigentlich, 145
- Integrierbar-Lebesgue, 239
- Intervall, abgeschlossen, 29
- Intervall, halboffen, 29
- Intervall, offen, 29
- Intervallschachtelung, 26
- intrinsische, 217
- invertierbar, 166
- Inzidenzmatrix, 134
- isomorph, 29
- Jacobimatrix, 152
- Jordan-Maß, 215
- Jordan-messbar, 215
- Jordan-Nullmenge, 215
- Jordansche Maßtheorie, 215
- Junktionen, 6
- Körper, 25
- Körpereigenschaften, 25
- Kartesisches Produkt, 13
- Kegel, 220
- Kettenregel, 95
- Kettensatz, absteigend, 234
- Kettensatz, aufsteigend, 234
- kleiner Umordnungssatz, 59
- kleinste obere Schranke, 27
- Koimplikation, 7
- Kommutativgesetz, 22
- kompakt, 39, 48
- kompakte Definitionsbereiche, 66
- kompakten Teilintervall, 138
- komplexe Betrag, 57
- Komplexe Exponentialfunktion, 88
- komplexen Ebene, 32
- komplexen Reihen, 57
- Komponentenfunktion, 63
- Komponentenfunktionen und Stetigkeit, 63
- komponentenweise Konvergenz, 168
- Komposition, 18
- Komposition von Produktreihen, 84
- konjugiert Komplex, 118
- konjugiert komplexe Zahl, 33
- Konjunktion, 6
- konkav, 127
- konstant, 102
- konstante Abbildung, 60
- Kontradiktion, 7
- konvergent, 41, 70
- Konvergenz, 38, 168
- konvergenz, 35

- Konvergenz, absolute, 56
- Konvergenz, gleichmäßige, 71, 107
- Konvergenz, punktweise, 70, 71, 107
- Konvergenzintervall, 75, 108
- Konvergenzkreis, 75
- Konvergenzkriterium für monotone Zahlenfolgen, 45
- Konvergenzradius, 75
- Konvergenzradius bei Summe, 80
- konvergiert absolut, 56, 57
- konvex, 127
- Koordinatenräumen, 254
- Koordinatentransformationen, differenzierbar, 254
- Kreisfunktion, 88, 95
- Kriterium von Hurwitz, 165
- kritische Punkte, 161
- krummflächig begrenzter Bereiche, 226
- Kugelparadoxon, 215

- Länge der Kurve, 144
- Länge parametrisierter Kurven, 143
- Längenfunktion, 35
- Lagrange-Form des Restgliedes, 122
- Lagrangesche Form des Restgliedes, 158
- Lagrangesche Multiplikationen, 177
- Lagrangesche Multiplikatorenregel, 177
- Lagrangeschen Restglieder, 124
- Landauschen $\mathcal{O}$ Symbole, 94
- Lebesgue-Integral, 239
- Lebesgue-integrierbar, 239
- Lebesgue-messbar, 233, 243
- Lebesgue-Nullmenge, 233
- Lebesgue-Oberintegral, 239
- Lebesgue-Obersumme, 239
- Lebesgue-Unterintegral, 239
- Lebesgue-Untersumme, 239
- Lebesgue-Varianz, 239
- leere Relation, 14
- Lebesgue-Maß, äußeres, 232
- Leibnizsche Regel, 54
- Limes, 41
- Limes inferior, 48
- Limes superior, 48
- linear geordneter Körper, 25
- lineare Ordnung, 16
- Linearform df , $_x \in T_x^* M$ 252
- Linearformen, schiefsymmetrische, 250
- Linearität, 240
- linksseitige Ableitung, 94
- linksseitige Diffbarkeit, 94
- linksseitige Umgebung, 65
- Lipschitz-stetig, 171, 220
- Lipschitzkonstante, 171
- Logarithmus, 88
- Logarithmus, natürlicher, 88
- lokal R integrierbar, 138
- lokal invertierbar, 172
- lokal Lipschitz-Stetig, 171
- lokal Maximal, 100
- lokal minimal, 100
- lokale Maximum, 100
- lokales Maximum, 126
- lokales Minimum, 100, 126

- Maßtheorie, Jordansche, 215
- Majorante, 56
- Majorantenkriterium, 56
- Majorantenkriterium für glm Konvergenz, 73
- Majorantenkriterium, Weierstraßsche, 183
- Mannigfaltigkeit, 252
- Mannigfaltigkeit, abstrakt differenzierbar, 254
- Matrix, unendliche, 81
- Maximum, 27, 66
- Maximum, global, 66
- Maximum, lokal, 100
- Maximumsnorm, 35, 38
- Mehrfachintegralen, 210
- Menge, 10
- Mengenfamilien, 19
- mengentheoretische Abziehen, 12
- messbar, 243
- messbar, Lebesgue-, 243
- Metrik, 36
- Mindestradius, 86
- Minimum, 21, 27, 66
- Minimum, global, 66
- Minimum, lokales, 100
- Minorante, 56
- Minorantenkriterium, 56
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 101

- Mittelwertsatz der Integralrechnung, 138
- Monom, 157
- monoton fallend, 31, 45, 102
- monoton wachsend, 45, 102
- Monotonie, 240
- Monotoniesatz, 102
- Multilinearformen, 249
- Multiplikation von Potenzreihen, 84

- natürlicher Logarithmus, 88
- natürliche Ordnung, 16
- Negation, 6
- negativ definit, 162, 164, 165
- negativ semidefinit, 162, 164
- Netz, 238
- Netz-Limes, 238
- nicht beschränkt, 30
- Norm, 35
- Norm, euklidische, 34
- Normalenvektor, 151
- Normen, 167
- normierten Räumen, 61
- normierter Vektorraum, 35
- Normierung, 215
- Notwendige Bed. für WP's, 128
- Nullfolgen, 41
- Nullmenge, 233
- Nullmenge, Lebesgue, 233
- Nullstellen, komplexe, 117
- Nullstellen, reelle, 117
- Nullstellenmenge, 175
- Nullstellensatz von Bolzano, 68
- Nullteilerfreiheit, 24
- numerischer Exzentrizität, 144

- obere Grenzwert, 48
- Oberintegral, Lebesgue, 239
- Oberintegral, Riemannsche, 130
- Obersumme, Lebesgue, 239
- Objekte, elementar-geometrische, 220
- offen, 37, 147
- offene Überdeckung, 39
- offene Umgebung, 172
- offenes Intervall, 29
- ONB, 164
- Operatornorm, 168
- Ordnatenmenge, 129, 144
- Ordnung, linear, 16
- Ordnung, natürliche, 16
- Ordnungs, 27
- Ordnungsrelation, 16
- Ordnungsvollständig, 27
- ordnungsvollständig, 50
- Ordnungsvollständigkeit, 28
- orientierte p -Fläche, 256
- Orthonormalbasis, 164

- Paraboloide, 220
- Parameterdarstellung, 143
- Parameterdarstellung, differenzierbar, 256
- Partialsummen, 51
- partiell Diffbar, 147
- partielle Ableitung, 147
- partiellen Abbildungen, 147
- partition, 129
- Peano-Axiomen, 19
- Pfaffsche Form, 253
- Poincaré, Satz von, 255
- Polarkoordinaten, ebene, 226
- Polarkoordinaten, räumliche, 227
- Polygonzüge, 144
- positiv definit, 162, 164, 165
- positiv semidefinit, 162, 164
- positive definitheit, 34, 35
- Positivität, 215
- Potent, tensorielle, 249
- Potenzreihe, 75
- Potenzreihenentwicklung, 106
- prädikadenz, 7
- Primfaktorzerlegung, 117, 118
- Prinzip der Intervallschachtelung, 31
- Prinzip von Cavalieri, 225
- Produktbasen, 254
- Produkträume, 254
- Produktregel, 95
- Pseudoskalarfeld, 254
- Pullback-Funktion, 175
- punktweise konvergent, 70
- punktweise Konvergenz, 107
- punktweise Stetigkeit, 67
- punktweiser Konvergenz, 71

- Quader, degeneriert, 231
- Quaderbilder, Vereinigung von, 260

- Quadergebäude, 216
- Quadersumme, 216
- Quadersumme, abzählbare, 231
- Quantor der Eindeutigen Existenz, 8
- Quantoren, 7
- Quotientenkriterium, 56
- Quotientenmenge, 15, 23
- Quotientenregel, 95

- Räumliche Polarkoordinaten, 227
- Randextrema, 166
- Randpunkt, 70
- rationalen Zahlen, 24
- Raum, vollständig normiert, 74
- Rechenregel für diffbare Funktionen, 95
- Rechenregel für integrierbare Funktionen, 137
- Rechenregeln für Reihen, 53
- rechtsseitige Ableitung, 94
- rechtsseitige Diffbarkeit, 94
- rechtsseitige Umgebung, 65
- reell diagonalisierbar, 164
- reelle Exponentialfunktion, 88
- Reflexivität, 14, 15
- Regel von l' Hospital, 104
- regulär, 168
- Reihe im Komplexen, 57
- Reihe, alternierende harmonische, 55
- Reihe, bedingt konvergente, 59
- Relation, leere, 14
- rellen Nullstellen, 117
- Repräsentant, 15
- Repräsentantensystem, 15
- Rest, 54
- Restglied, 121
- Riemann Oberintegral, 131
- Riemann Unterintegral, 131
- Riemann-integrierbar, 214
- Riemannsche Integrationstheorie, 215
- Riemannsche Oberintegral, 130
- Riemannsche Obersumme, 130
- Riemannsche Summe, 133
- Riemannsche Summen, 207
- Riemannsche Unterintegral, 130
- Riemannsche Untersumme, 130
- Riemannscher Summen, 238
- Rotation, 254
- Rotationsparaboloid, 151
- Russelsche Menge, 11

- Sandwich-Theorem, 44
- Sattelfläche, 161
- Sattelpunkte, 101
- Satz über das Anfangswertproblem, 191
- Satz über das Cauchy-Konvergenzkriterium für glm Konvergenz, 73
- Satz über das Folgenkriterium für Stetigkeit, 62
- Satz über das Permanenzprinzip, 65
- Satz über das Quotientenkriterium, 56
- Satz über den GW der Verfeinerung, 135
- Satz über den Vergleich von Lebesgue- und Riemann-Integral, 242
- Satz über DGL 1. Ordnung, 190
- Satz über die Äquivalenzrelationen, 15
- Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, 97
- Satz über die Abschätzungs Vektorwertiger Funktionen, 170
- Satz über die Bestimmung der Konvergenzradien, 77
- Satz über die Division durch Potenzreihen, 86
- Satz über die Eigenschaften stetiger Abbildungen, 62
- Satz über die Erkennbarkeit der Diffbarkeit, 154
- Satz über die existenz von Wurzeln, 30
- Satz über die glm. Stetigkeit, 67
- Satz über die Identität von Potenzreihen, 87
- Satz über die Komposition von Produktreihen, 84
- Satz über die Konvergenz von Folgen, 41
- Satz über die Länge parametrisierter Kurven, 144
- Satz über die lokale Umkehrbarkeit, 172
- Satz über die Multiplikation von Potenzreihen, 84
- Satz über die notwendigen Konvergenzkriterien für Reihen, 52
- Satz über die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$, 28

- Satz über die Rechenregeln diffbarer Funktionen, 95
 Satz über die Stetigkeit (ε - δ Kriterium), 60
 Satz über die Stetigkeit von Komponentenfunktionen, 63
 Satz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen des p -ten Taylorpolynoms, 158
 Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, 180
 Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue, 247
 Satz über Integralkriterien uneigentlicher Integrale, 145
 Satz über Konvergenz und Stetigkeit bei der Operatornorm, 169
 Satz über Lösungen von linearen DGL, 196
 Satz über lineare Differentialgleichungssysteme, 193
 Satz über lokale Extrema, 162
 Satz über Majoranten/Minoranten, 56
 Satz über monotone Konvergenz von Beppo Levi, 246
 Satz über offene Mengen, 38
 Satz über Rechenregeln diffbarer Abbildungen, 155
 Satz über Rechenregeln höherer Ableitungen, 99
 Satz über Rechenregeln konvergenter (Punkt-)Folgen, 42
 Satz über Sandwich-Theorem und Ähnlichkeit von Folgen, 44
 Satz über Stammfunktionen, 111
 Satz über Umgebungssysteme, 38
 Satz über vollständige Räume, 50
 Satz über Wurzelkriterium, 57
 Satz der R Integrationsbed., 132
 Satz der analytischen Potenzreihen, 124
 Satz der Definitheit, 164
 Satz der elementaren Integrierbarkeit, 119
 Satz der großen Umordnung, 81
 Satz der hinreichenden Bedingung für lokale Extrema, 126
 Satz der kleinen Umordnung, 59
 Satz der Konvergenz von Taylorreihen, 124
 Satz der Konvexität, 103
 Satz der Konvexitätskriterien, 127
 Satz der lokalen Extremas, 100
 Satz der Monotonie, 102
 Satz der notwendigen Bedingungen für lokale Extrema, 161
 Satz der Operatornorm, 168
 Satz der Partialbruchzerlegung, 118
 Satz der partiellen Integration, 113
 Satz der Potenzreihen, 108
 Satz der strengen Extrema, 103
 Satz der unbestimmten Integrale, 112
 Satz des Cauchy-Konvergenzkriteriums, 49
 Satz des Majorantenkriteriums für glm Konvergenz, 73
 Satz von Abel über die Grenzwerte, 78
 Satz von Bolzano-Weierstraß, 47
 Satz von Fubini für Quaderbereiche, 211
 Satz von Heine Borel, 40
 Satz von Leibniz, 54
 Satz von Maximum und Minimum, 66
 Satz von Picard-Lindelöf, 196
 Satz von Picard-Lindelöf, 193
 Satz von Poincaré, 255
 Satz von Rolle, 101
 Satz von Schwarz, 156
 Satz von Stokes, 260
 Scheitelwinkel, 231
 schiefsymmetrischen p -Linearformen, 250
 Schwankungssumme, 130
 Schwarz, 230
 Schwarzsche Ungleichung, 34
 Sehnenpolygonzüge, 143, 144
 Sekantenhyperebene, 151
 Signumsfunktion, 61
 Sinus, 89
 Sinus hyperbolicus, 88
 Sinusreihe, 76
 skalare Geschwindigkeit, 143
 Skalarfeld, 254
 speziellen Differentiale, 252
 Stammfunktion, 110
 stationäre Punkte, 161
 stetig, 70
 stetige Fortsetzbarkeit, 93
 Stetigkeit, 38, 168

Index

- stetigkeit, 35
- Stetigkeit, punktweise, 67
- Stokes, Satz von, 260
- streng konkav, 127
- streng konvex, 127
- streng monoton fallend, 45, 69, 102
- streng monoton steigend, 46
- streng monoton wachsend, 45, 69, 102
- strenges lokales Maxima, 103
- strenges lokales Minima, 103
- Substitutionsregel, 114
- Summenregel, 95
- Supremum, 27
- Supremumseigenschaft, 26, 27, 50
- Supremumsnorm, 74
- surjektiv, 17
- Symetrie, 14
- System, gerichtetes, 238

- Tangens, 89
- Tangens hyperbolicus, 88
- Tangente, 93
- Tangentensteigung, 93
- Tangentialhyperbene, horizontale, 161
- Tangentialhyperebene, 150, 151, 161
- Tangentialraum, 252
- Tautopologie, 7
- Taylor'scher Satz, 142
- Taylorreihe, 123
- Taylorscher Satz, 1. Form, 122, 160
- Taylorscher Satz, 2. Form, 122, 158
- Teilmengenrelation, 16
- Teilquadern, 211
- Teleskopsumme, 55
- Tensoren, 249
- tensorielle Potenz, 249
- Tensorkalkül, 249
- Topologie, 35
- total Diffbar, 150
- total diffbar, 153
- Totalordnung, 16
- Transformationssatz, 225
- Transitivität, 14, 16
- Triangulierungen, 231
- Tupel, 13

- Umgebung, 36, 168
- Umgebung, linksseitig, 65
- Umgebung, rechtsseitig, 65
- Umgebungssystem, 36
- Umgebungssysteme, 38
- Umgekehrte Dreiecksungleichung, 35
- Umkehrabbildung, 17
- umkehrbar, 166
- umkehrbar Eindeutig, 17
- Umkehrfunktion, 70
- Umordnung, 59
- unbedingt konvergent, 59
- unbestimmt integrierbar, 110
- unbestimmtes Integral, 111
- uneigentlich R -integrierbar, 145
- uneigentliche Grenzwerte, 65
- uneigentlicher Annäherung, 64
- uneigentlich konvergent, 50
- unendliche Matrix, 81
- unendliche Reihe, 51
- Unmenge, 11
- Unterdeterminanten, 164
- untere Schranke, 48
- Unterintegral, Lebesgue, 239
- Unterintegral, Riemannsche, 130
- Untersumme, Lebesgue, 239
- Urbild, 17, 18

- Variable, 7
- Varianz, 132
- Varianz, Lebesgue, 239
- Variation, 130, 207
- Vektoranalysis, 254
- Vektorfeld, 254
- Vektorfeld, axial, 254
- Vektorraumbündel, 252
- vektorwertige Abbildungen, 59
- Verbindungsstrecke, 69
- Vereinigung von Quaderbildern, 260
- Verfeinerung:, 207
- Verkettung, 18
- Vollkugel, 37
- Vollständig, 27
- vollständig, 74
- vollständig metrischen Räumen, 171
- vollständig normierten Raum, 74
- vollständig normierter Raum, 170
- vollständige Räume, 50

Vollständigen Induktion, 20
vollständigen Raum, 49
Vollständigkeit, 26

Weierstraßsche Majorantenkriterium, 183
Wendepunkt, 128
Wendepunkten, 128
Widerspruchsbeweis, 9
WO, 20
wohlbestimmte Tangentialhyperebene, 151
wohlbestimmten Grenzwert, 93
Wohlordnung, 20
Wurzelkriterium, 57

Zerlegung, 129, 130
Zerlegung, äquidistante, 133
Zerlegung:, 207
Zielmenge, 16
ZPV, 133, 135
zusammenhängend, 69, 147
Zusammenhangserhaltung, 68
Zusammenhangskomponenten, 147
Zwischenpunktfolge, 240
Zwischenpunktvektor, 133
Zwischenpunktvektoren, 135
Zwischenwertsatz, 68
Zylinderkoordinaten, 227