

10. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, 12.07.2006, 11:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

10.1 (zur Fußballweltmeisterschaft)

Zeigen Sie: Bei jedem Fußballspiel gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balls, die sich zu Beginn der ersten und zu Beginn der zweiten Halbzeit an der gleichen Stelle befinden.

(Sie dürfen voraussetzen, dass der Ball beide Male *exakt* auf dem Anstoßpunkt liegt und während des Spiels der Ball nicht gewechselt wird.) (4 Punkte)

10.2 Es seien $p, q, r \in \mathbb{Z}$, nicht alle gleich 0. Weiter seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit

$$u = (p, q, r)^T, v = (q, r, p)^T, w = (r, p, q)^T.$$

Auf $\mathbb{R}^3$ sei das Standard-Skalarprodukt gegeben. Zeigen Sie:

- (a) $\{u, v, w\}$ ist eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3 \iff pq + qr + rp = 0$.
- (b) Ist $\{u, v, w\}$ ist eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$, dann haben u, v, w jeweils die Länge $|p + q + r|$. (3+2 Punkte)

10.3 Sei V ein reeller Vektorraum und $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die Komplexifizierung von V . Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus von V mit Fortsetzung $\hat{\alpha}$ auf $V_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie:

Besitzt $\hat{\alpha}$ keine reellen Eigenwerte, dann hat α keine reellen Eigenwerte.

(2 Punkte)

10.4 Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix und U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Zeige:

- (a) $AU = U \iff AU^{\perp} = U^{\perp}$
- (b) Das Minimalpolynom von A zerfällt vollständig in Faktoren der Art $(x - 1)$, $(x + 1)$, und $(x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1)$. (2+4 Punkte)

Hinweise zur Klausur:

Die **Klausur** findet am **Mittwoch, den 19. Juli 2006** von **15⁰⁰–17³⁰ Uhr** im **Zuse-Hörsaal und HS 1** statt.

Zugelassen sind alle Studenten, die **mindestens 80 Punkte** in den Blättern 1–10 erreicht **oder mindestens 8 Übungsblätter** abgegeben haben.

Die Studenten mit Nachnamen **A — O** sind in HS 1 und mit **P — Z** im Zuse-HS

Bitte erscheinen Sie rechtzeitig zur Klausur damit wir pünktlich beginnen können und bringen Sie genügend (eigenes) Papier und Schreibmaterial mit.

Zur Klausur dürfen Sie Ihr/e Vorlesungs-Mitschrift/Skript, die Übungsblätter und die Bearbeitungen der Übungen (auch in Kopie) sowie Notizen mitbringen.

Nicht mitbringen dürfen sie (Lehr-)Bücher sowie elektronische Hilfsmittel wie Taschenrechner, Handys, Laptops etc.