UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

SS 2006
27.06.2006

9. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, 05.07.2006, 11:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

9.1 Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Man zeige:

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \dots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix} \leq \prod_{j=1}^{n} ||x_j||^2,$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in V$. Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch?

(5+1 Punkte)

9.2 Sei $V = \langle e_1, e_2, \dots \rangle$ ein abzählbar unendlich dimensionaler Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Sei weiter φ ein Endomorphismus von V definiert durvh $\varphi(e_i) = e_1$.
Zeigen Sie: es gibt keine zu φ adjungierte Abbildung $\alpha = \varphi^*$, so dass

$$\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \alpha(y)\rangle \text{ für alle } x, y \in V$$

gilt

(3 Punkte)

9.3 Sei V ein unitärer Vektorraum und $u, v \in V$. Zeigen Sie:

$$4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2).$$

(4 Punkte)

9.4 Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis des unitären Raumes V. Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \overline{\langle w, v_i\rangle}.$$

(4 Punkte)