Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

SS 2006
16.05.2006

4. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, 24.05.2006, 11:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

4.1 Finden Sie einen Vektorraum V und einen Endomorphismus $f : V \to V$, der kein Minimalpolynom besitzt. (4 Punkte)

4.2 Es sei die folgende Matrix A gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 7 \\ -7 & -9 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.
(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.
(c) Bestimmen Sie A^{-1}.
(d) Berechnen Sie A^{2006}. (3+3+2+1 Punkte)

4.3 Seien $f, g : K^n \to K^n$ zwei lineare Abbildungen. Wenn es eine Basis B von K^n gibt, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von f wie auch Eigenvektoren von g sind, so sagt man, dass f und g simultan diagonalisierbar seien. Man zeige:
(a) Wenn f und g simultan diagonalisierbar sind, so gilt $f \circ g = g \circ f$.
(b) Wenn f genau n paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt und wenn $f \circ g = g \circ f$ gilt, dann sind f und g simultan diagonalisierbar. (2+3 Punkte)

4.4 Es sei φ ein Endomorphismus von V und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie:
(a) Ist U_i der von b_i erzeugte φ-zyklische Unterraum von V, so ist das Minimalpolynom M_i der Einschränkung $\varphi|_{U_i}$ das normierte Polynom kleinsten Grades, das die Gleichung $\big(P(\varphi)\big)(b_i) = \mathfrak{o}$ erfüllt.
(b) $M = kgV\{M_1, \dots, M_n\}$ ist das Minimalpolynom von φ. (3+2 Punkte)

Hinweis:

Abgabe der Bearbeitungen ab dem 4. Blatt bereits **mittwochs, um 11 Uhr**