Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

SS 2006
09.05.2006

3. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, 17.05.2006, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

3.1 Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, A und B besitzen dasselbe charakteristische Polynom, aber A ist nicht diagonalisierbar.

(b) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von A und B. (2+2 Punkte)

3.2 Gegeben seien ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V und Endomorphismen f und g. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, und $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist 0 ein Eigenwert von $f \circ g$, so auch von $g \circ f$.

(c) $f \circ g$ und $g \circ f$ haben dieselben Eigenwerte. (2+2+2 Punkte)

3.3 Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Sei weiter $\varphi : K[x] \to \mathrm{End}(V)$ definiert durch $f \in K[x] \mapsto f(\alpha)$. Zeigen Sie, dass φ ein K-linearer Ringhomomorphismus ist. (4 Punkte)

3.4 Es seien $n \in \mathbb{N}$, $x, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\det(A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)