Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

SS 2006
25.04.2005

1. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, 03.05.2006, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

1.1 Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_j - a_i).$$

Diese Determinante wird Vandermondesche Determinante genannt.

(7 Punkte)

1.2 Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

durch 19 teilbar ist, ohne die Determinante auszurechnen. Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass 21 375, 38 798, 34 162, 40 223 und 79 154 Vielfache von 19 sind.

(4 Punkte)

1.3 Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix und $\{a_1, \dots, a_k\}$ linear unabhängige Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Zeigen Sie:
Ist $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$ ein Eigenvektor mit $Av = \mu v$, so gilt $\lambda_i = \mu$ für alle $\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$.

(2 Punkte)

1.4 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenraumbasen.

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (c) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3+3+3 Punkte)

Hinweis: Bitte melden Sie sich **bis spätestens 2.Mai 10 Uhr** unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/uebungsanmeldung` zu den Übungen an. Die geplanten Übungszeiten sind jeweils am Montag (ÜR II) und Dienstag (SE III) von 13.30–15.00 Uhr, 15.15–16.45 Uhr und 17.00–18.30 Uhr.