UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

WS 05/06
10.01.2006

10. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 18.01.2006, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

10.1 Es seien die Basen B und B' von $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben mit

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad B' = \left\{ \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

und

$$f : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-5x_1 - 18x_2 - 24x_3\\ 4x_1 + 13x_2 + 16x_3\\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3\end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne die Matrizen $M_f(B,B)$ und $M_f(B',B')$.
(b) Man berechne die Matrizen $M_{\mathrm{id}}(B,B')$ und $M_{\mathrm{id}}(B',B)$
(c) Man verifiziere die Gleichung $M_f(B',B') = M_{\mathrm{id}}(B,B') \cdot M_f(B,B) \cdot M_{\mathrm{id}}(B',B)$.
(4+4+2 Punkte)

10.2 Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad b = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(A|b)$ und $\mathrm{Rang}(A|c)$.
(b) Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; Ax = 0 \right\}$$

und lösen Sie das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$.
(c) Ermitteln Sie jeweils die Lösungsmenge der Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$.
(2+3+3 Punkte)

10.3 In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} tx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\\ x_1 & + & tx_2 & + & x_3 & = & 1\\ x_1 & + & x_2 & + & tx_3 & = & 1. \end{array}$$

(4 Punkte)

10.4 Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen ein Äquivalenzrelation ist.
(1 Punkt)