

## 9. Übung zur Linearen Algebra I

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 11.01.2006, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

**9.1** Beweisen Sie, dass für Matrizen  $A$  gilt:  $\text{Rang } A = \text{Rang } A^T$ . (3 Punkte)

**9.2** Seien  $V, W$  Vektorräume endlicher Dimension  $\dim V = \dim W < \infty$  und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $\varphi$  ist surjektiv,
- (ii)  $\varphi$  ist injektiv,
- (iii)  $\varphi$  ist ein Isomorphismus. (3 Punkte)

**9.3** Sei  $V = \{v = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$  der unendlich-dimensionale Vektorraum der reellen Polynome.

- (a) Konstruieren Sie lineare Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow V$  und  $\psi : V \rightarrow V$  mit den folgenden Eigenschaften:
  - (i)  $\varphi$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.
  - (ii)  $\psi$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- (b) Geben Sie  $\varphi$  und  $\psi$  an mit den Eigenschaften aus (a) an, so dass  $\psi(\varphi(v)) = v$  für alle  $v \in V$  gilt. Wieso ist  $\varphi \circ \psi$  kein Isomorphismus. (4+4 Punkte)

### 9.4 (Weihnachtsbäckerei)

Beim Backen der Weihnachtsleckerreien ist es passiert. Küchenengel Peter hat beim Zusammenstellen der Zutaten vom blonden Engel Julia geträumt. Dabei wurden einige Zutaten vertauscht und das Backwerk schmeckte grauenhaft.

Nun muss bis Weihnachten neues Backwerk geschaffen werden. Leider ist es zu spät, um noch einzukaufen, also muss mit dem gebacken werden, was noch vorrätig ist. Es sind noch 36kg Butter, 85kg Mehl, 36,5kg Zucker, 220 Eier, 13kg geriebene Mandeln sowie ausreichend Schokolade und Rotwein vorhanden.

Folgende Rezepte stehen zur Verfügung

Wiener Spritzgebäck	Rotweinkuchen	Spekulatius	Vanillekipferl
250g Butter	200g Butter	150g Butter	180g Butter
500g Mehl	250g Mehl	500g Mehl	250g Mehl
250g Zucker	200g Zucker	200g Zucker	90g Zucker
125g Mandeln	100g Schokolade	30g Mandeln	100g Mandeln
2 Eier	4 Eier	1 Ei	
	250ml Rotwein		

Wie oft muss jedes Rezept gebacken werden, damit keine Butter, Zucker, Mehl, Mandeln und Eier übrig bleiben. Der Rest an Schokolade und Rotwein wird zur Besänftigung an die Küchencrew verteilt. (8 Punkte)