

## 8. Übung zur Linearen Algebra I

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 21.12.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

**8.1** Sei  $K$  ein Körper. Seien  $A \in K^{k \times l}$ ,  $B \in K^{l \times m}$ ,  $C \in K^{m \times n}$  mit  $k, l, m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gilt das Assoziativgesetz:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .  
(b) Es gilt  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ . (4+3 Punkte)

**8.2** Seien folgende Matrizen über  $\mathbb{Q}$  gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 & 0 \\ -25 & -14 & -5 & 1 \\ 18 & 11 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Zeilenrang von  $A$ .  
(b) Bestimmen Sie den Spaltenrang von  $B$ .  
(c) Berechnen Sie  $B \cdot C$ . (2+2+4 Punkte)

### 8.3 (Nikolausaufgabe)

Es wird folgende Legende über Nikolaus, Bischof von Myra, erzählt:

Ein vornehmer Mann, der völlig verarmt ist, beabsichtigt, seine drei Töchter, die er nicht ebenbürtig verheiraten kann, der Schande preiszugeben, um daraus seinen und ihren Lebensunterhalt zu bestreiten. Der junge Nikolaus, eben Erbe eines großen Vermögens geworden, hört davon und wirft nachts dreimal einen Beutel voll Geld ins Haus der Verarmten. Jeder Beutel bildet die Mitgift für eine der Töchter und ermöglicht ihre Verheiratung.

Über den Inhalt der Beutel ist folgendes bekannt:

- (i) Jeder Beutel enthält nur Gold- und Silbermünzen, wobei die Anzahlen der Goldmünzen und Silbermünzen in den Beuteln verschieden sind und jeder Beutel mehr als eine Goldmünze enthält.  
(ii) Der Beutel mit den wenigsten Goldmünzen enthält 6-mal so viele Silbermünzen wie Goldmünzen im Beutel mit den meisten Goldmünzen sind.  
(iii) Die Anzahl der Silbermünzen im Beutel mit den meisten Goldmünzen entspricht der Gesamtanzahl von Goldmünzen.  
(iv) Das Produkt der Anzahlen der Goldmünzen in den Beuteln ist 2006.  
(v) Der Wert einer Goldmünze entspricht 12 Silbermünzen.  
(vi) Die Gesamtanzahl der Münzen ist die 6-fache Anzahl der Goldmünzen von selben Gesamtwert.

Geben Sie die Anzahl der Gold- und Silbermünzen in den einzelnen Beuteln an. (6 Punkte)