Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

WS 05/06
22.11.2005

5. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 30.11.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

5.1 Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe. Sei weiter $R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$ mit komponentenweiser Verknüpfung

$$\begin{aligned} (r,s) + (r',s') &:= (r+r', s+s'), \\ (r,s)(r',s') &:= (rr', ss'). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:
(a) $R \times S$ ist wieder ein Ring.
(b) Sind R und S Körper, dann ist $R \times S$ kein Körper.
(c) Geben Sie für R, S Körper alle Nullteiler und Ideale von $R \times S$ an.
(2+2+4 Punkte)

5.2 Auf der Menge $\mathbb{H} := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definiert man zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ durch

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - \bar{b}d, bc + \bar{a}d). \end{aligned}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ alle Eigenschaften eines Körpers außer der Kommutativität der Multiplikation besitzt.
Kenntnisse aus der Analysis dürfen ohne Beweis verwendet werden.
z.B. Für $a, b \in \mathbb{C} \setminus 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \bar{a}\bar{b} & \qquad a \in \mathbb{R} &\iff a = \bar{a} \\ \bar{\bar{a}} &= a & \qquad ab \in \mathbb{R} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : a = \lambda \bar{b} \end{aligned}$$

Man nennt $\mathbb{H}$ den Quaternionen-Schiefkörper; er wurde von Hamilton 1843 definiert. Zuvor hatte man lange versucht, auf dem $\mathbb{R}^3$ eine „vernünftige" Körperstruktur zu definieren; heute weiß man, dass das nicht geht. (10 Punkte)

5.3 Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Die folgenden Mengen sind Teilmengen von Vektorräumen. Welche sind Vektorräume (zum gleichen Skalarenkörper), welche nicht? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.
(a) $M_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{K}, a_3 \cdot a_4 = 0\} \subseteq \mathbb{K}^4$.
(b) $M_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{K}, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\} \subseteq \mathbb{K}^4$.
(c) $M_3 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{K}, a_1 \cdot a_2 = a_3 \cdot a_4\} \subseteq \mathbb{K}^4$. (1+1+1 Punkte)

Die **Klausur** findet am **Freitag, den 03.Februar 2006** von **17–19 Uhr** statt.