Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

WS 05/06
8.11.2005

3. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 16.11.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

3.1 Sei $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0\}$ die Gruppe aus Aufgabe 2.1 mit der Verknüpfung $(a,b)(c,d) := (ac, ad+b)$. Zeigen Sie, dass $K = \{(1,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ ein Normalteiler von G ist. (3 Punkte)

3.2 Seien N, M Normalteiler von G. Zeigen Sie

(a) Der Schnitt $N \cap M$ ist Normalteiler von G.

(b) $NM = \{nm \mid n \in N, m \in M\}$ ist Normalteiler von G. (2+4 Punkte)

3.3 Sei G eine endliche Gruppe mit Untergruppen H, K mit $H \supseteq K$. Zeigen Sie, es gilt

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

(Für eine Untergruppe U wird die Anzahl der Nebenklassen von U in G Index von U in G genannt und wird als $[G : U]$ geschrieben.) (4 Punkte)

3.4 Sei $\varphi : (G, +) \to (H, *)$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : (H, *) \to (G, +)$ auch ein Gruppenhomomorphismus ist. (2 Punkte)

3.5 Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $\varphi : G \to G$ definiert durch $\varphi(x) = x^2$ ein Homomorphismus, so ist G abelsch.

(b) Ist $\psi : G \to G$ definiert durch $\psi(x) = x^{-1}$ ein Automorphismus (bijektiver Homomorphismus), so ist G abelsch. (3+3 Punkte)