Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

WS 05/06
3.11.2005

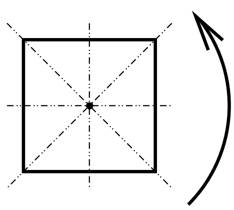
2. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 09.11.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

2.1 Sei $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} = \big\{(a,b) \;\big|\; a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0\big\}$ die Menge der Tupel (a,b) mit $a \neq 0$. Sei auf G eine Verknüpfung definiert durch $(a,b)(c,d) := (ac, ad+b)$.
(a) Ist die Verknüpfung kommutativ?
(b) Finden Sie ein geeignetes neutrales Element in G.
(c) Zeigen Sie, dass G eine Gruppe ist. (1+1+4 Punkte)

2.2 Bekannt ist, dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe ist. Zeigen Sie:
(a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$.
(b) Jede Untergruppe U von $\mathbb{Z}$ hat die Form $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. (Betrachten Sie das kleinste positive Element in U.) (3+2 Punkte)

2.3 Sei D_4 die Menge aller Kongruenzabbildungen (Drehungen und Spiegelungen) eines Quadrates mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung.
(a) Zeigen Sie, dass die so definierte Gruppe 8 Elemente besitzt.
(b) Geben Sie alle Untergruppen der Ordnung 2 von D_4 an.
(c) Finden Sie 3 verschiedene Untergruppen von D_4 mit jeweils 4 Elementen.



(2+3+4 Punkte)

2.4 Sei $G = \{0, a, b, c\}$ mit Verknüpfung $+$ eine Gruppe. Vervollständigen Sie die Gruppentafel und begründen Sie jeden Eintrag. (3 Punkte)

$+$	0	a	b	c
0				
a		0		b
b			a	
c	c			

Hinweis:
Kopierte Lösungen von Übungsblättern werden ab sofort nicht mehr korrigiert.