

1. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 02.11.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

1.1 Finden Sie ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$2^n > n^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq m.$$

Beweisen Sie dies per Induktion.

Zeigen Sie, dass der Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ schon für $n = 3$ und $n = 4$ funktioniert. (4+1 Punkte)

1.2 Zeigen Sie, dass für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}. \quad (4 \text{ Punkte})$$

1.3 Welche von den folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2n$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$. (2+2+2 Punkte)

1.4 Seien S, T, U Mengen und $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow U$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv. (2+2 Punkte)

1.5 Sei $X = \mathbb{Z}$ und $R = \{(x, y) \mid x, y \in X \text{ und } x \cdot y \neq 0\}$ eine Relation auf X .

(a) Zeigen Sie, dass R symmetrisch und transitiv ist.

(b) Ist R eine Äquivalenzrelation? (2+1 Punkte)

Hinweise!

Am Montag, den 31. Oktober, werden zu den Übungszeiten Fragen zum Vorlesungsstoff beantwortet und allgemeines Vorgehen bei der Lösung von Übungsblättern erläutert. Dieses Blatt wird am Mo./Di. 7./8. November in den Übungen besprochen.

Die Übungsblätter werden immer dienstags in der Vorlesung ausgeteilt. Abgabetermin ist jeweils am darauffolgenden Mittwoch, bis 12⁰⁰ Uhr in die Briefkästen vor der Mathe-Bibliothek. Schreiben Sie bitte deutlich Ihren **Namen** und ihre **Gruppennummer** jedes Blatt auf ihre Bearbeitung und werfen Sie diese zusammengeheftet in den dafür vorgesehenen Briefkasten (rechts). Um zu gewährleisten, dass alle ihre bearbeiteten Übungsaufgaben korrigiert werden können, bitten wir Sie, die Übungsaufgaben in **Dreier-teams** zu bearbeiten und abzugeben. Bearbeitungen, die mehr als drei Namen tragen, werden jedoch nicht korrigiert. Die Rückgabe ihrer Bearbeitungen erfolgt **ausschließlich** in den Übungsgruppen. Kennzeichnen Sie daher bitte deutlich, in welcher Übungsgruppe ihre Bearbeitung zurückgegeben werden soll.