Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 16.1.2008

11. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 23.01.2008 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Sei $(u,v) \mapsto x(u,v)$ Parametrisierung einer C^3-Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit 1.Grundform Matrix $(g_{\rho\sigma}(u,v)) = \begin{pmatrix} \lambda(u)^2 & 0 \\ 0 & \mu(u)^2 \end{pmatrix}$, wobei λ, μ positive C^2-Funktionen sind. Zeigen Sie:

a) Die u-Linien $u \mapsto c_v(u) := x(u,v)$ sind Geodätische, welche die v-Linien rechtwinklig schneiden.

b) Die Längenabschnitte $L_{u_1}^{u_2}(c_v)$ sind unabhängig von der Wahl von v.

c) Für die Gausssche Krümmung K von x gilt: $K = \dfrac{\dot\lambda\dot\mu - \lambda\ddot\mu}{\lambda^3\mu}$.

Aufgabe 2.

Sei $(u,v) \mapsto x(u,v)$ isotherme Parametrisierung einer C^3-Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit 1.Grundform Matrix $(g_{\rho\sigma}(u,v)) = \lambda(u,v)^2(\delta_{\rho\sigma})$. (Vgl. Blatt 8, Aufgabe 1) Zeigen Sie:

a) Das „Theorema egregium“ lautet hier: $K = -\dfrac{\Delta log(\lambda)}{\lambda^2}$

b) Die Gleichungen von Mainardi-Codazzi lauten hier:

$$\begin{aligned} \partial_1 b_{22} - \partial_2 b_{12} &= 2\lambda^2 H \partial_1 log(\lambda) && (1) \\ \partial_2 b_{11} - \partial_1 b_{12} &= 2\lambda^2 H \partial_2 log(\lambda) && (2) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Seien $\bar g : G \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$, $(\bar g_{\rho\sigma}(u,v)) = (\delta_{\rho\sigma})$ und $\bar b : G \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$, $(\bar b_{\rho\sigma}(u,v)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha(u,v) \end{pmatrix}$ Matrixfunktionen, wobei α eine C^1-Funktion ist.

a) Wann sind die Integrabilitätsbediungen von Satz 5.4 hier erfüllt ?

b) Finden Sie eine Fläche, deren erste Grundform die Darstellungsmatrix $(\bar g_{\rho\sigma})$ und deren zweite Grundform die Darstellungsmatrix $(\bar b_{\rho\sigma})$ mit $\alpha(u,v) = 1$ besitzt.