Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 19.12.2007

9. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 9.01.2008 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Berechnen Sie für eine hyperbolisch gekrümmte Fläche in jedem Punkt die Winkel zwischen den Hauptkrümmungs- und den Asymptotenrichtungen in Abhängigkeit von den Hauptkrümmungen. Wie groß sind die Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen ? Was ergibt sich speziell bei Minimalflächen ?

Aufgabe 2.

Sei $(u,v) \mapsto x(u,v)$ Krümmungslinienparametrisierung einer nabelpunktfreien C^∞-Fläche im $\mathbb{R}^3$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert dann $(u,v) \mapsto \bar{x}(u,v) := x(u,v) + \lambda N(u,v)$ eine Parallelfläche zu x.

a) Unter welchen Voraussetzungen ist eine solche Parallelfläche singularitätenfrei ?
(Diese Bedingungen seien im Folgenden erfüllt.)

b) Berechnen Sie für eine solche Parallelfläche 1. und 2. Grundform, sowie die Weingarten-Matrix.
(Hinweis: Zur Abkürzung setze man $f_\rho := 1 - \lambda\kappa_\rho$)

c) Drücken Sie die mittlere Krümmung $\bar{H}$ und die Gaußsche Krümmung $\bar{K}$ einer solchen Parallelfläche durch die entsprechenden Größen H und K der Ausgangsfläche, sowie durch die Zahl λ aus.

d) Beweisen Sie:

α) Ist $K = const > 0$, so gibt es zwei Parallelflächen mit $\bar{H} = const$.

β) Ist $H = const \neq 0$, so gibt es eine Parallelfläche mit $\bar{K} = const$.

Aufgabe 3.

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden parametrisierten Flächen

$$(u,v) \mapsto x(u,v) := \begin{pmatrix} cosh(u)cos(v) \\ cosh(u)sin(v) \\ u \end{pmatrix} \text{ und } (u,v) \mapsto \hat{x}(u,v) := \begin{pmatrix} sinh(u)sin(v) \\ -sinh(u)cos(v) \\ v \end{pmatrix} \text{ mit } u \in \mathbb{R} \text{ und } |v| < \pi$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) Durch x wird eine Rotationsfläche und durch $\hat{x}$ eine Regelfläche mit geradliniger Leitlinie definiert. Skizzieren Sie die beiden Flächen.

b) Die beiden Flächen sind isometrische Minimalflächen mit gleichem Normaleneinheitsvektor in entsprechenden Punkten.

c) Sei $\Phi : w \in \mathbb{C} \mapsto \Phi(w) \in \mathbb{C}^3$, $\Phi(u+iv) := x(u,v) + i \cdot \hat{x}(u,v)$. Zeigen Sie: Die Komponentenfunktionen $\Phi^\mu(w)$ $(\mu = 1,2,3)$ sind holomorph.

d) Zeigen Sie:

α) $\Phi'(u+iv) = x_1(u,v) - i \cdot x_2(u,v)$

β) $(\Phi'(w))^2 := \sum_{\mu=1}^{3} ((\Phi^\mu)'(w))^2 = 0$

γ) $|\Phi'(w)|^2 := \sum_{\mu=1}^{3} |(\Phi^\mu)'(w)|^2 > 0$

Frohe Weihnachten und ein gutes, erfolgreiches neues Jahr !