Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 12.12.2007

8. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 19.12.2007 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Eine C^3-Fläche $(u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2)$ im $\mathbb{R}^3$ sei in isothermer Parametrisierung gegeben, d.h. es gelte

$$\big(g_{\rho\sigma}\big)(u^1, u^2) = \lambda^2(u^1, u^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit einer } C^2\text{-Funktion } (u^1, u^2) \mapsto \lambda(u^1, u^2) > 0.$$

Beweisen Sie, dass $x_{11} + x_{22} = 2\lambda^2 H \cdot N$ mit der Mittleren Krümmung H der Fläche.

Aufgabe 2.

Beweisen Sie für eine C^3-Fläche im $\mathbb{R}^3$:

a) Der Weingartendomorphismus A ist auch selbstadjungiert bezüglich der zweiten Grundform II, d.h. es gilt für Tangentialvektoren X, Y überall

$$II(A(X), Y) = II(X, A(Y)) \ .$$

b) Die dritte Grundform III ist genau in den Flächenpunkten $x(u)$ mit Gaußscher Krümmung $K(u) \neq 0$ positiv definit.

Aufgabe 3.

Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ sei implizit durch die Gleichung

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x} \quad \text{mit } |x|, |y| < \pi/2$$

gegeben.
Parametrisieren Sie diese Fläche und zeigen Sie, dass sie eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 4.

Ein C^2-Weg $t \mapsto c(t)$ und ein C^2-Einheitsvektorfeld $t \mapsto E(t)$ definieren im $\mathbb{R}^3$ eine C^2-Regelfläche

$$(t, v) \mapsto x(t, v) := c(t) + v \cdot E(t) \ .$$

Beweisen Sie (ohne explizite Berechnung des Normalenvektors), dass in regulären Flächenpunkten die Bedingungen

(1)	$\partial_2 N = 0$	(3)	$\det(\dot{c}, E, \dot{E}) = 0$
(2)	$< x_{12}, N > = b_{12} = 0$	(4)	$K = 0$

äquivalent sind.
[*Hinweis*: Man vermeide irgendwelche Vektorprodukte !]