Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 5.12.2007

7. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 12.12.2007 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Man nehme an, es gäbe eine Fläche $(u,v) \mapsto x(u,v)$ im $\mathbb{R}^3$ mit der 1.-Grundform-Matrix

$$(g_{\rho\sigma}(u,v)) = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } u > 0,\ v \in \mathbb{R}\ .$$

Zeigen Sie, dass alle Geodätischen $s \mapsto (u(s), v(s))$ in der (u,v)-Parameter-Halbebene entweder Halbgeraden oder Halbkreise sind.

Aufgabe 2.

Eine C^2-Rotationsfläche im $\mathbb{R}^3$ sei in der Parametrisierung

$$(u,v) \mapsto x(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, z(u))^\top$$

mit $r > 0$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole.
[*Hinweis:* Zur Abkürzung setze man $w := \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}$.]

b) Stellen Sie die Differentialgleichungssystem der Geodätischen in Bogenlängenparametrisierung auf. Untersuchen Sie, unter welchen Voraussetzungen die Meridiane und die Breitenkreise geodätische Linien sind.

c) Beweisen Sie: Ist α der Winkel, den eine Geodätische in einem Kurvenpunkt mit dem Breitenkreis durch diesen Punkt bildet, und r ihr Abstand von der Achse, so ist

$$r \cdot \cos\alpha = a = \mathit{const}$$

längs der ganzen Geodätischen. (a heißt *Clairaut-Zahl* der Geodätischen.)

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^3$ alle Rotationsflächen mit

$$\alpha)\quad K \equiv 0 \qquad , \qquad \beta)\quad H \equiv 0 \quad .$$

[*Hinweis*: Man nehme die Profilkurve in Bogenlängenparametrisierung an.]

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen sowie Mittlere und Gaußsche Krümmung eines Torus mit der durch $r(u) = b + a\cos u$, $z(u) = a\sin u$ ($b > a > 0$) gegebenen Profilkurve. (Skizze!)
Diskutieren Sie insbesondere die Vorzeichen der Hauptkrümmungen und der Gaußschen Krümmung.