Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 28.11.2007

6. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 5.12.2007 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie: Die Gausssche Krümmung und die mittlere Krümmung einer C^2-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ sind unabhängig von der vorliegenden Parametrisierung.
b) Sei $x : M \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte C^3-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$. Schreiben Sie die Differenz $< x_{112}, x_2 > - < x_{121}, x_2 >$ mit Hilfe der Ableitungsgleichungen der Fläche um und folgern Sie, dass die Gausssche Krümmung eine innergeometrische Größe ist.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie: Eigenvektoren unterschiedlicher Eigenwerte der Weingartenabbildung einer C^2-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ stehen senkrecht zueinander.
b) Zeigen Sie: Die Darstellungsmatrizen der ersten und zweiten Grundform einer regulär parametrisierten C^2-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ sind invariant gegenüber Bewegungen im Raum. Was gilt für die anderen Koeffizienten der Ableitungsgleichungen?
c) Sei $x : M \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte C^2-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Gausssche Krümmung und die mittlere Krümmung der gestreckten Fläche $\bar{x} := \lambda \cdot x$.

Aufgabe 3.

Die *Pseudosphäre* $x : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x : (s, v) \mapsto x(s, v)$ ist eine Rotationsfläche mit $r(s) := e^{-s}$ und $z(s) := -\sqrt{1 - e^{-2s}} + Artanh(\sqrt{1 - e^{-2s}})$. (Die Profilkurve ist eine Traktrix in Bogenlängenparametrisierung.)
Zeigen Sie: Die Pseudosphäre besitzt die konstante Gausssche Krümmung -1 und es existiert eine zulässige Parametertransformation $\Phi : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $(\hat{s}, \hat{v}) \mapsto \Phi(\hat{s}, \hat{v})$, so dass die erste Grundform der Fläche $\hat{x} : (\hat{s}, \hat{v}) \mapsto \hat{x}(\hat{s}, \hat{v}) := x(\Phi(\hat{s}, \hat{v}))$ von der Gestalt $\hat{g}_{\rho\sigma}(\hat{s}, \hat{v}) = \frac{1}{\hat{s}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.
Hinweis: Führen Sie die Parametertransformation $s := ln(\hat{s})$ bei der Profilkurve durch und betrachten Sie die zugehörige Rotationsfläche.

Aufgabe 4.

Sei $t \in [a, b] \mapsto (a_{\rho\sigma}(t)) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ein stetiges Feld regulärer Matrizen, sowie $t \in [a, b] \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^p$ ein stetiges Vektorfeld. Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b \sum_{\rho,\sigma} a_{\rho\sigma}(t) X^\rho(t) V^\sigma(t) dt = 0$ für alle C^1-Vektorfelder $t \in [a, b] \mapsto V(t) \in \mathbb{R}^p$, so ist $X \equiv 0$ auf $[a, b]$.