Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 7.11.2007

3. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 14.11.2007 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Sei $k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto k(s)$ eine stetige Funktion, $s_0 \in I$, $T_0 \in E^2$, $|T_0| = 1$ und $N_0 := T_0^{\times}$.
a) Zeigen Sie: $c : I \to E^2$, $s \mapsto c(s) := x_0 + \int_{s_0}^{s}(cos(\alpha(\sigma))T_0 + sin(\alpha(\sigma))N_0)d\sigma$ mit $\alpha(s) := \int_{s_0}^{s} k(\sigma)d\sigma$ ist eine in Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve des E^2 mit $c(s_0) = x_0$, $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ und orientierter Krümmung k.
b) Sei $\hat{c} : I \to E^2$ eine weitere C^2-Kurve des E^2 mit orientierter Krümmung k. Wie unterscheidet sich $\hat{c}$ von c?
c) Berechnen Sie die in Bogenlänge parametrisierte Kettenlinie $c : \mathbb{R} \to E^2$, $s \mapsto c(s)$, welche durch $c(0) = (0, 1)^T$, $T(0) = (1, 0)^T$, $N(0) = (0, 1)^T$ und $k(s) = \frac{1}{s^2+1}$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2.

Sei $c : I \to E^3$, $s \mapsto c(s)$ eine wendepunktfreie, in Bogenlängenparametrisierung vorliegende C^3-Böschungslinie und $s_0 \in I$.
a) Zeigen Sie: D und $Y := D \times H$ bilden eine Basis der rektifizierenden Ebene, dabei bezeichnet D den Darbouxvektor der Kurve. Wie lauten die Koordinaten von T und B bzgl. D und Y ?
b) Stellen Sie die Ableitungsgleichungen für den Hauptnormalenvektor H und den Vektor Y auf.
c) Vergleichen Sie die Ableitungsgleichungen aus b) mit denen einer ebenen Kurve. Integrieren Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 explizit das System der Frenetschen Ableitungsgleichungen einer Böschungslinie bei vorgegebenen Anfangsbedingungen.

Aufgabe 3.

Sei $c : I \to E^2$, $s \mapsto c(s)$ eine wendepunktfreie C^2-Kurve in Bogenlängenparametrisierung. Die Evolute $\tilde{c}$ von c ist definiert als $\tilde{c} := c + \mu \cdot N$ mit $\mu := \frac{1}{k}$.
a) Bei welchen Punkten ist die Evolute singulär ? Bestimmen Sie die Begleitbasis und die Krümmung von $\tilde{c}$ ausserhalb der Singularitäten.
b) Sei $I = (0, L)$, k stets positiv und $\bar{c}(s) := c(s) - s \cdot T(s)$ die Evolvente von c. Zeigen Sie: Die Evolute der Evolvente von c ist wieder die Ausgangskurve c.

Aufgabe 4.

Sei $c : U(0) \to E^3$, $s \mapsto c(s)$ eine wendepunktfreie, in Bogenlängenparametrisierung vorliegende C^3-Böschungslinie mit Böschungswinkel $\gamma \in (0, \pi)$ und fester Richtung E ($|E| = 1$). Bestimmen Sie Bogenlänge ($\hat{s}(0) := 0$), Krümmung, Torsion und Begleitbasis der C^3-Kurve $s \mapsto \hat{c}(s) := c(s) - cos(\gamma) \cdot s \cdot E$. Beweisen Sie außerdem die Beziehung $|c - \hat{c}|^2 + \hat{s}^2 = s^2$.