Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Helmut Pabel
Dipl.-Math. Martin Hintermeier

Wintersemester 2007/2008
Würzburg, den 31.10.2007

2. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 7.11.2007 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Es sei $c : [0, L] \to E^3$, $t \mapsto c(t)$ eine reguläre, in Bogenlängenparametrisierung gegebene C^3-Kurve des E^3. Die *Evolvente* $\bar{c}$ von c ist eine parametriserte Kurve $\bar{c} : [0, L] \to E^3$, $t \mapsto \bar{c}(t)$, so dass $\bar{c}(0) = c(0)$, $(c(t) - \bar{c}(t))$ parallel zu $\dot{c}(t)$ und $\dot{\bar{c}}(t)$ senkrecht zu $\dot{c}(t)$ ist.

a) Berechnen Sie $\bar{c}(t)$.
b) Bestimmen Sie die Frenet-Belgeitbasis und die Krümmung von $\bar{c}$.
c) Wie kann die Evolvente einer ebenen Kurve praktisch konstruiert werden ?

Aufgabe 2.

Es sei die gewöhnliche Schraubenline $c : \mathbb{R} \to E^3$ durch $c(t) := \begin{pmatrix} r \cdot cos(t) \\ r \cdot sin(t) \\ h \cdot t \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Frenet-Begleitbasis, die Krümmung und die Torsion. Welche Winkel bilden die Kurventangenten bzw. die Kurvenhauptnormalen mit der dritten Koordinatenachse ?

Aufgabe 3.

Zeigen Sie:
a) Ist der Abstand zum Ursprung einer regulär parametrisierten C^2-Kurve $t \mapsto c(t)$ des E^3 an der Stelle t_0 maximal, so gilt:

$$\kappa(t_0) \geq \frac{1}{|c(t_0)|}$$

b) Gehen alle Hauptnormalen einer wendepunktfreien C^3-Kurve des E^3 durch einen festen Punkt, so ist die Kurve Teil einer Kreislinie.

Aufgabe 4.

Berechnen Sie die Frenet-Begleitbasis, die Krümmung und die Torsion einer wendepunktfreien C^3-Kurve im $\mathbb{R}^3$ bei beliebiger Parametrisierung $t \mapsto c(t)$.
Hinweis: $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - < a, b >^2$.