Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 25. Juni 2007

10. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007

41.) **(6 Punkte)** Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $\dot{x} = x^3$

a.) die Lösung $t \mapsto x(t)$ mit $x(0) = \xi \in \mathbb{R}$,

b.) ihren maximalen Definitionsbereich $I(\xi)$,

c.) den maximalen Fluss $(t, \xi) \in B' \mapsto \phi(t, \xi) \in \mathbb{R}$ samt seines Definitionsbereichs $B' \subset \mathbb{R}^2$ (Skizze!),

d.) die charakteristische Funktion $(t; \tau, \xi) \in B \mapsto x(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R}$ für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ samt ihres Definitionsbereichs $B \subset \mathbb{R}^3$.

42.) **(7 Punkte)** Gegeben sei das von den Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abhängige Anfangswertproblem

$$y' \;=\; f(x, y, \lambda, \mu) \;:=\; (1 + \lambda)\frac{1}{x}y + \mu, \quad y(\xi) = \eta \qquad (x > 0,\, y \in \mathbb{R})\,.$$

a.) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion

$$(x, \xi, \eta, \lambda, \mu) \;\mapsto y(x; \xi, \eta, \lambda, \mu)\,.$$

Wie oft ist sie differenzierbar?

b.) Stellen Sie (bei festem ξ, η, λ, μ) die linearen Anfangswertprobleme

$$z' = a(x)z + b(x); \quad z(\xi) = z_0$$

auf, denen die Ableitungen

$$x \mapsto \partial_\xi y(x; \ldots), \quad x \mapsto \partial_\eta y(x; \ldots), \quad x \mapsto \partial_\lambda y(x; \ldots), \quad x \mapsto \partial_\mu y(x; \ldots)$$

genügen. (Anzugeben ist also jeweils $a(x), b(x), z_0$.)

43.) **(6 Punkte)** Wir betrachten die Gleichung des ungedämpften, schwach gedämpften und stark gedämpften Oszillators

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x \;=\; 0 \quad \text{mit } \omega > 0 \tag{1}$$

und

a.) $\rho = 0$, b.) $\rho > \omega$, c.) $0 < \rho < \omega$.

Skizzieren Sie für alle drei Fälle das Phasenportrait, also die Gesamtheit aller Trajektorien des zu (1) gehörenden Systems in der $(x, \dot{x})$-Ebene. Untersuchen Sie in allen Fällen den kritischen Nullpunkt auf Stabilität und asymptotische Stabilität. Mit welchen Steigungen münden Trajektorien im Fall b.) in den Ursprung ein?

44.) **(4 Punkte)** Wir betrachten zwei verfeindete Personen und deren Antipathie-Werte $x(t)$ und $y(t)$ dem jeweils anderen gegenüber. Jeder ist zwar einerseits bestrebt, seine Antipathie dem anderen gegenüber zu verringern, andererseits aber zieht Antipathie auch weitere Antipathie nach sich. Das zugehörige autonome System lautet somit

$$\dot{x} = -ax + by + \alpha, \quad \dot{y} = cx - dy + \beta\,.$$

mit positiven Parametern $a, b, c, d, \alpha, \beta$. Ferner sei $\Delta := ad - bc \neq 0$.

Interpretieren Sie Δ, bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt dieses autonomen Systems und untersuchen Sie ihn auf (asymptotische) Stabilität in Abhängigkeit vom Vorzeichen von Δ.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Montag, den 2. Juli, **10:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.