Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 4. Juni 2007

7. Übung zur Analysis IV (Differentialgleichungen)

Sommersemester 2007

27.) **(4 Punkte)** Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn für jede Lösung von $y' = Ay$ gilt

$$|y|_2 = \text{const.},$$

wenn $|\cdot|_2$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

28.) **(4 Punkte)** *(Staatsexamen, Frühjahr 2007)* Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das System

$$z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} z\,.$$

29.) **(4 Punkte)** Gegeben sei ein homogenes lineares System

$$y' = A(x)\cdot y \quad \text{mit} \quad A \in C^0(I \subset \mathbb{R} \to M(n,n;\mathbb{K}))\,.$$

Zeigen Sie:

a.) Für je zwei Wronski-Matrizen $x \mapsto Y(x), \tilde{Y}(x)$ des obigen Systems gilt

$$\exists_{x\in I}\, Y(x) = \tilde{Y}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \tilde{Y}\,.$$

b.) Jede Wronski-Determinante $x \in I \mapsto w(x) = \det Y(x) \in \mathbb{K}$ des obigen Systems erfüllt die lineare Differentialgleichung $w' = \operatorname{spur} A(x)\cdot w$.

30.) **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$y_1' = (3x-1)y_1 + (x-1)y_2 + xe^{x^2}, \quad y_2' = (-x-2)y_1 + (x-2)y_2 - e^{x^2}\,.$$

Hinweis: Man suche zunächst nach einer Lösung des zugehörigen homogenen Systems der Form $x \mapsto (\phi(x), -\phi(x))$.

31.) **(4 Punkte)** Es sei A eine reelle $n\times n$-Matrix, deren Eigenwerte alle auf der imaginären Achse liegen. Zeigen Sie: Für jede reelle Lösung $x \in \mathbb{R} \mapsto y(x)$ von $y' = Ay$ ist

$$x \mapsto \frac{|y(x)|}{|x|^{n-1}}$$

beschränkt auf jeder Menge $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ $(a>0)$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Montag, den 11. Juni, **10:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.