Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 25. Mai 2007

6. Übung zur Analysis IV (Differentialgleichungen)

Sommersemester 2007

25.) **(7 Punkte)** Es sei $a > 0$, $I := [0, a]$ sowie der Streifen S gegeben durch $S := I \times \mathbb{R}$. Die Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge der Bedingung

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le \frac{k}{x}|y - z| \qquad (0 < x \le a; \quad y, z \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

mit einer Konstanten $k < 1$. Wir betrachten das AWP

$$y' = f(x,y), \quad y(0) = \eta \qquad (x \in I)\,. \tag{2}$$

a.) Zeigen Sie: Genau dann ist eine C^1-Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2), wenn $\tilde{y} = y - \eta : I \to \mathbb{R}$ die Integralgleichung

$$\forall_{x \in I} \quad \tilde{y}(x) = \int_0^x f(t, \eta + \tilde{y}(t))\,dt \tag{3}$$

löst.

b.) Wir betrachten den Teilraum U aller Funktionen u aus $C^0[I]$ mit der Eigenschaft

$$\|u\|_\star := \sup_{0 < x \le a} \frac{|u(x)|}{x} < \infty$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\|\cdot\|_\star$ um eine Norm auf U handelt und dass jede Lösung $\tilde{y}$ von (3) in U liegt.

c.) Zeigen Sie: Das AWP (2) besitzt eine eindeutige Lösung auf I.
Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_\star$ zweier potentieller Lösungen von (3).

26.) **(7 Punkte)** Die rechte Seite f einer Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ sei auf einem Streifen $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und dort stetig sowie bezüglich y lokal Lipschitz-stetig. Weiter existiere für jedes kompakte Intervall $\bar{I}_0 \subset I$ eine globale Lipschitz-Konstante auf $\bar{I}_0 \times \mathbb{R}^n$.

a.) Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine auf ganz I definierte Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ existiert, die durch Picard'sche Iteration gewonnen werden kann.
Hinweis: Benutzen Sie die Größe $M := \max_{x \in \bar{I}_0} |f(x, \eta)|$ und argumentieren Sie entlang des Beweises der Vorlesung für die lokale Quaderversion des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes.

b.) Folgern Sie aus a.), dass jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ eines linearen AWPs

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(\xi) = \eta \quad \text{mit } A, b \in C^0(I)$$

durch Picard'sche Iteration gewonnen werden kann.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Montag, den 4. Juni, **10:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.