Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 21. Mai 2007

5. Übung zur Analysis IV (Differentialgleichungen)

Sommersemester 2007

20.) **(5 Punkte)** (Fortsetzung von Aufgabe 19.) Wir betrachten die Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 19. Berechnen Sie die Lösungen $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ der Anfangswertprobleme

$$y' = f(x, y),\ y(0) = \eta \quad \text{für alle } \eta \text{ mit } |\eta| < 1.$$

Für welche η ist das Problem eindeutig lösbar?

21.) **(3 Punkte)** *(Staatsexamen, Frühjahr 2007)* Zeigen Sie, dass alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = t + \frac{\sin t}{1 + x^2 + y^2}\, y, \qquad \dot{y} = 3 + \frac{\cos t}{1 + x^2 + y^2}\, x$$

mit $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

22.) **(3 Punkte)** Begründen Sie: Keine Lösung der DGL

$$y' = -3 \cdot \sqrt[3]{y} + \sin(1 - e^{-y})$$

wechselt ihr Vorzeichen.

23.) **(4 Punkte)** Gegeben seien stetige Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es seien $y_1 < y_2$ die beiden einzigen Nullstellen von h und es bezeichne y eine maximal fortgesetzte Lösung eines AWP

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{mit} \quad y_1 \le y_0 \le y_2\,.$$

a.) Zeigen Sie: Ist h (lokal) Lipschitz-stetig, so existiert y auf ganz $\mathbb{R}$.

b.) Kann man auf die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit verzichten?

24.) **(3 Punkte)** Es sei $f : \bar{I} \times \bar{Q} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(y_k : \bar{I} \to \bar{Q})_{k \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge mit Grenzfunktion $y : \bar{I} \to \bar{Q}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \bar{I}$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^x f(t, y_k(t))\, dt = \int_0^x f(t, y(t))\, dt\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Montag, den 28. Mai, **10:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.