Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 30. April 2007

2. Übung zur Analysis IV (Differentialgleichungen)

Sommersemester 2007

6.) **(5 Punkte)** Die Funktion $g : [0, \infty[\to]0, \infty[$ sei stetig differenzierbar. Es sei $c_0 > 0$.

a.) Zeigen Sie: Die Lösung des AWP $y' = g(y), y(0) = c_0$ existiert genau dann global, d.h. auf ganz $[0, \infty[$, wenn das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{g(s)}\, ds$$

divergiert.

b.) Untersuchen Sie das AWP $y' = g(y), y(0) = c_0$ mit

$$g(y) = (y + e)(\log(y + e))^{\alpha+1}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \geq 0$ auf globale Lösbarkeit.

7.) **(5 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

a.) $y' = \dfrac{y^2}{x^3} - \dfrac{y}{x^2} + 1 \qquad (x > 0)$,

b.) $xy' + y \log x - y - y \log y = 0 \qquad (x > 0)$.

8.) **(5 Punkte)**

a.) Zeigen Sie: Sind drei überall paarweise verschiedene C^1-Funktionen $y_1, y_2, y_3 : I \to \mathbb{R}$ vorgegeben, so gibt es genau eine Riccati'sche Differentialgleichung

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x),$$

welche diese Funktionen als partikuläre Lösungen besitzt. Man berechne f, g, h. Wie lautet die allgemeine Lösung?

b.) Man stelle (im Sinne von a.)) die Riccati'sche Differentialgleichung für die Funktionen

$$x \mapsto y_1(x) \equiv 1, \quad x \mapsto y_2(x) = x, \quad x \mapsto y_3(x) = 1 + x$$

auf.

9.) **(5 Punkte)** *(Staatsexamen, Frühjahr 2007)* Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$t^2\dot{x} + x = t$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Hier wird $\frac{dx}{dt}$ mit $\dot{x}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

a.) Es gibt eine Lösung durch eine formale Potenzreihe $x = P(t)$.

b.) Es gibt keine analytische Lösung.

c.) Es gibt unendlich viele unendlich oft reell differenzierbare Lösungen, deren Taylorreihe in $t = 0$ stets die Reihe $P(t)$ ist.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Montag, den 7. Mai, **10:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.