



Würzburg, den 23. April 2007

## 1. Übung zur Analysis IV (Differentialgleichungen)

Sommersemester 2007

1.) (4 Punkte) Gegeben sei die DGL

$$y' = \sin(x + y).$$

- Skizzieren Sie das Richtungsfeld sowie die Linien konstanter Steigung (Isoklinien).
- Bestimmen Sie alle linearen Lösungen der DGL.
- Wo liegen die relativen Minima und Maxima der restlichen Lösungen? Versuchen Sie, ihren Verlauf zu skizzieren.

2.) (5 Punkte) Lösen Sie die Anfangswertprobleme

a.)  $y' + 2y = \sin x, \quad y(0) = 0.$

b.)  $y' + (x - \frac{1}{x})y + \frac{xe^{-x^2}}{y} = 0, \quad y(1) = 1.$

c.)  $y' + y\phi' = \phi\phi', \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{mit } \phi \in C^1(I), x_0 \in I).$

3.) (4 Punkte) Gegeben sei für  $|x| < 1$  das Anfangswertproblem

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

- Zeigen Sie: Die Funktion  $x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2$  löst das obige Anfangswertproblem.
  - Bestimmen Sie eine Potenzreihendarstellung von  $x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2$  um  $x_0 = 0$  für  $|x| < 1$ .
- 4.) (4 Punkte) Es sei  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zeigen Sie: Genau dann gilt für jede Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x)y \quad (x \in ]0, 1])$$

die Eigenschaft

$$\frac{y(x)}{x} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0^+,$$

wenn gilt

$$-F(x) + \log x \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow 0^+,$$

für eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

5.) (5 Punkte) Wieviele Lösungen der Differentialgleichung

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x) \quad \left(x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \right)$$

gibt es, für welche

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x)$$

existiert? Geben Sie diese Lösung(en) an.