JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 13. Juli 2007

# 10. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

42.) a.) Für $\lambda \neq -1$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto y_{\text{hom}}(x) \;=\; c \cdot e^{(1+\lambda)\ln x} \;=\; c \cdot x^{1+\lambda}\,.$$

Ein Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto y_s(x) = c(x) \cdot x^{1+\lambda}\,,$$

was (auch für $\lambda = -1$!) auf die Bestimmungsgleichung

$$c' = \mu \cdot x^{-(1+\lambda)}$$

führt, also etwa

$$c(x) \;=\; \begin{cases} -\frac{\mu}{\lambda} x^{-\lambda} & : \text{ falls } \lambda \neq 0 \\ \mu \cdot \log x & : \text{ falls } \lambda = 0, \end{cases}$$

d.h. die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(x) = c \cdot x^{1+\lambda} \begin{cases} -\frac{\mu}{\lambda} x & : \text{ falls } \lambda \neq 0 \\ +\mu \log x \cdot x & : \text{ falls } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Zur Anpassung an die Anfangswerte müssen wir fordern

$$\eta = c \cdot \xi^{1+\lambda} \begin{cases} -\frac{\mu}{\lambda} \xi & : \text{ falls } \lambda \neq 0 \\ +\mu \log \xi \cdot \xi & : \text{ falls } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

also

$$c \;=\; \begin{cases} \frac{\eta + \frac{\mu}{\lambda}\xi}{\xi^{1+\lambda}} & : \text{ falls } \lambda \neq 0 \\ \frac{\eta - \mu \log \xi \cdot \xi}{\xi} & : \text{ falls } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Die gesuchte charakteristische Funktion ist dann gegeben durch

$$(x;\xi,\eta,\lambda,\mu) \;\mapsto\; y(x;\xi,\eta,\lambda,\mu) \;=\; \begin{cases} \frac{\eta + \frac{\mu}{\lambda}\xi}{\xi^{1+\lambda}} \cdot x^{1+\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} x & : \lambda \neq 0 \\ \frac{\eta - \mu \log \xi \cdot \xi}{\xi} \cdot x \;+\; \mu \log x \cdot x & : \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Sie ist unendlich oft differenzierbar, da die rechte Seite $f$ der Differentialgleichung diese Eigenschaft hat.

b.) Es sei für festes $(\xi,\eta,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto a(x) = D_y f(x, y(x,\xi,\eta,\lambda,\mu), \lambda, \mu) \;=\; (1+\lambda) \cdot \frac{1}{x}$$

und

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto b(x) = D_{(\lambda,\mu)} f(x, y(x,\xi,\eta,\lambda,\mu), \lambda, \mu) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{y(x,\xi,\eta,\lambda,\mu)}{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann genügen die angegebenen Ableitungen nacheinander den AWP

$$
\begin{aligned}
&z' = a(x)z, \quad z(\xi) = -f(\xi, \eta, \lambda, \mu) \;=\; -\left(\frac{(1+\lambda)\eta}{\xi} + \mu\right), \\
&z' = a(x)z, \quad z(\xi) = 1, \\
&z' = a(x)z + b_1(x), \quad z(\xi) = 0, \\
&z' = a(x)z + b_2(x) \;=\; a(x)z + 1, \quad z(\xi) = 0\,.
\end{aligned}
$$