Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 4. Juli 2007

9. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

37.) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$z \mapsto p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

mit

$$p(\lambda) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad p'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} i a_i \lambda^{i-1} \;=\; 0\,.$$

Eine Funktion der Form $x \mapsto y(x) = ce^{\lambda x}$ ist niemals Lösung dieser DGL, denn es müsste gelten

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad e^{\lambda x} \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = c\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i e^{\lambda x} \;=\; ce^{\lambda x} p(\lambda) \;=\; 0\,,$$

was einen Widerspruch darstellt. Ebenso gibt es keine Lösung der Form $x \mapsto y(x) = cxe^{\lambda x}$, denn es müsste in diesem Fall gelten

$$\begin{aligned}
\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad e^{\lambda x} \;&=\; \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = c\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \frac{d^l}{dx^l} x\, \frac{d^{i-l}}{dx^{i-l}} e^{\lambda x} \\
&=\; c\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \frac{d^l}{dx^l} x\, \lambda^{i-l}\, e^{\lambda x} \;=\; c\left(a_0 x e^{\lambda x} \;+\; \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{l=0}^{1} \binom{i}{l} \frac{d^l}{dx^l} x\, \lambda^{i-l}\, e^{\lambda x} \right) \\
&=\; ca_0 x e^{\lambda x} \;+\; c\sum_{i=1}^{n} a_i (x\lambda^i e^{\lambda x} + i\,\lambda^{i-1}\, e^{\lambda x}) \;=\; ce^{\lambda x}\left(a_0 x + \sum_{i=1}^{n} a_i x \lambda^i \;+\; \sum_{i=1}^{n} i\, a_i \lambda^{i-1} \right) \\
&=\; ce^{\lambda x}\left(x \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \;+\; \sum_{i=1}^{n} i\, a_i\, \lambda^{i-1} \right) \;=\; 0\,,
\end{aligned}$$

ebenfalls ein Widerspruch.

Für eine Lösung der Form $x \mapsto y(x) = cx^2 e^{\lambda x}$ muss gelten

$$\begin{aligned}
e^{\lambda x} \;&=\; c\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}\left(x^2 e^{\lambda x}\right) \;=\; c \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \frac{d^l}{dx^l}(x^2) \cdot \frac{d^{i-l}}{dx^{i-l}}\, e^{\lambda x} \\
&=\; c \cdot \left(a_0 x^2 e^{\lambda x} \;+\; a_1 (x^2 \lambda e^{\lambda x} + i \cdot 2x \cdot e^{\lambda x}) \;+\; \sum_{i=2}^{n} a_i \sum_{l=0}^{2} \binom{i}{l} \frac{d^l}{dx^l}(x^2) \cdot \lambda^{i-l} e^{\lambda x} \right) \\
&=\; ce^{\lambda x}\left(a_0 x^2 + a_1 x^2 \lambda \;+\; + a_1 \cdot i \cdot 2x \;+\; \sum_{i=2}^{n} a_i \left(x^2 \lambda^i + i \cdot 2x \cdot \lambda^{i-1} + i(i-1) \cdot \lambda^{i-2} \right) \right) \\
&=\; ce^{\lambda x}\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i x^2 \lambda^i}_{=0} \;+\; \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} i\, a_i\, x \lambda^{i-1}}_{=0} \;+\; \sum_{i=2}^{n} i(i-1) a_i \lambda^{i-2} \right), \quad \text{also } c \;=\; \frac{1}{\sum\limits_{i=2}^{n} i(i-1) a_i \lambda^{i-2}} \;=\; \frac{1}{p''(\lambda)}\,.
\end{aligned}$$