Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 29. Juni 2007

8. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

34.) a.) Äquivalent hierzu ist die DGL

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0 \qquad \text{Euler'sche DGL}\,.$$

Wir substituieren $u(t) := y(e^t)$ bzw. $y(x) = u(\log x)$ und formulieren die DGL hiermit um zu

$$u(\log x) - x\left(\dot u(\log x)\cdot\frac{1}{x}\right) + 2x^2\left(\ddot x(\log x)\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\dot u(\log x)\right)$$
$$+\quad x^3\left(\dddot u(\log x)\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3}\ddot u(\log x) - \frac{1}{x^3}\ddot u(\log x) + 2\frac{1}{x^3}\dot u(\log x)\right) = 0\,,$$

oder vereinfacht

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \quad u(t) - \dot u(t) - \ddot u(t) + \dddot u(t) = 0\,.$$

Das charakteristische Polynom dieser linearen DGL lautet $\chi(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$ und besitzt die Nullstelle $\lambda_1 = 1$, woraus es sich vermöge Polynomdivision in der Form $\chi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$ faktorisieren lässt. Also ist

$$\{t \mapsto e^t,\ t \mapsto te^t,\ t \mapsto e^{-t}\}$$

ein Fundamentalsystem der substituierten Gleichung und

$$\{x \mapsto x,\ x \mapsto x\log x,\ x \mapsto \frac{1}{x}\}$$

ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung.

b.) Das charakteristische Polynom lautet hier $\chi(\lambda) = \lambda^4 + 1$ und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\,.$$

Also ist

$$\{e^{(\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2})x},\ e^{(\frac{1}{\sqrt2}-i\frac{1}{\sqrt2})x},\ e^{(-\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2})x},\ e^{(-\frac{1}{\sqrt2}-i\frac{1}{\sqrt2})x},\ \}$$

ein komplexes und

$$\{e^{\frac{x}{\sqrt2}}\cos\frac{x}{\sqrt2},\ e^{\frac{x}{\sqrt2}}\sin\frac{x}{\sqrt2},\ e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\cos\frac{x}{\sqrt2},\ e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\sin\frac{x}{\sqrt2},\ \}$$

ein reelles Fundamentalsystem.

c.) Man errät leicht in $x\in\mathbb{R}\mapsto y_1(x) = x$ eine Lösung dieser DGL. Für eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung machen wir den Ansatz $x \mapsto y_2(x) = x\cdot z(x)$. Es muss also gelten

$$x\cdot z''(x) + 2z'(x) + x\,(x\cdot z'(x) + z(x)) - xz(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot z''(x) + (x^2+2)z'(x) = 0\,,$$

was sich für $x > 0$ oder $x < 0$ explizit formuliert zu

$$z''(x) = -\frac{x^2+2}{x}\,z'(x) \qquad \text{oder mit } w(x) = z'(x) \text{ zu} \qquad w'(x) = -\frac{x^2+2}{x}\,w(x)$$

mit einer Lösung $x \mapsto w(x) = e^{-\int x+\frac{2}{x}\,dx} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Folglich können wir für $x \mapsto y_2(x)$ jeweils auf $\mathbb{R}^-$ bzw. $\mathbb{R}^+$ wählen

$$x \in \mathbb{R}^- \mapsto y_2(x) = x \int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{t^2}{2}\,dt} \quad \text{bzw.} \quad x \in \mathbb{R}^+ \mapsto y_2(x) = x \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{t^2}{2}\,dt}\,.$$

Wir müssen noch zeigen, dass sich y_2 zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt: Wegen

$$\lim_{x\to 0} y_2(x) \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} y_2'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left[\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \lim_{x\to 0^-} \left[\int_{-1}^{x} \frac{d}{dt}(-\frac{1}{t})e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right] \\
&= \lim_{x\to 0^-} \int_{-1}^{x} -e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} y_2'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left[\int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[\int_{x}^{1} \frac{d}{dt}(\frac{1}{t})e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right] \\
&= \lim_{x\to 0^+} \int_{1}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + e^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0^-} y_2'(x)
\end{aligned}$$

ist $y_2 \in C^1(\mathbb{R})$ und damit auch $y_2 \in C^2(\mathbb{R})$, wobei y_2 aus Stetigkeitsgründen die DGL auch im Ursprung löst.