JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 25. Mai 2007

3. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

10.) a.) Es handelt sich (beispielsweise) um eine Riccati'sche DGL mit einer partikulären Lösung $y_p \equiv 0$. Genau dann ist $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine positive Lösung hiervon, wenn $z = \frac{1}{y-y_p} = \frac{1}{y} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine positive Lösung der linearen DGL

$$z' + b(x)z - c(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z' = -b(x)z + c(x)$$

ist. Deren allgemeine positive Lösung ist gegeben durch

$$x \in I(x_0, y_0) \mapsto z_{\text{allg.}}(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} c(t)e^{B(t)}\right) e^{-B(x)} \qquad (x_0 \in \mathbb{R}, y_0 > 0)$$

mit $B(x) := \int_{x_0}^{x} b(t)\,dt$. Es ist dabei $I(x_0, y_0) :=]\bar{x}, \infty[$, falls es $\bar{x} < x_0$ gibt mit $\int_{x_0}^{\bar{x}} c(t)e^{B(t)}\,dt = -y_0$, andernfalls sei $I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$. Somit ist

$$x \in I(x_0, y_0) \mapsto e^{B(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} c(t)e^{B(t)}\,dt\right)^{-1}$$

die allgemeine positive Lösung der Ausgangs-DGL. Speziell für $b(x) \equiv b$ und $x \mapsto c(x) \equiv c$ lautet diese

$$x \in I(x_0, y_0) \mapsto \frac{e^{b(x-x_0)}}{y_0 + c\int_{x_0}^{x} e^{b(t-x_0)}\,dt} = \frac{e^{bx}}{y_0 + \frac{c}{b}\left(e^{bx} - e^{bx_0}\right)} = \frac{1}{y_0 e^{-bx} + \frac{c}{b}(1 - e^{b(x_0-x)})}\,.$$

b.) Andernfalls gäbe es aus Stetigkeitsgründen $x_1 \in I$ mit $u(x_1) = v(x_1)$. Aus der Eindeutigkeit des linearen AWPs in z folgt die Eindeutigkeit eines jeden AWPs der ursprünglichen DGL und damit $u = v$ im Widerspruch zu $u(x_0) < v(x_0)$.

c.) Mit $B(x) \to \infty$ ist auch $e^{B(x)} \to \infty$ für $x \to \infty$. Nach Annahme existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{b(x)}{c(x)}$. In jedem Fall existiert dann $x_1 > x_0$ mit $\frac{c(x)}{b(x)} > m > 0$ für $x > x_1$. Damit ist für $x > x_1$

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} c(t)e^{B(t)}\,dt \;=\; y_0 + \int_{x_0}^{x_1} c(t)e^{B(t)}\,dt \;+\; \int_{x_1}^{x} \frac{c(t)}{b(t)} b(t)e^{B(t)}\,dt\,,$$

wobei

$$\int_{x_1}^{x} \frac{c(t)}{b(t)} b(t)e^{B(t)}\,dt \;>\; m\int_{x_1}^{x} b(t)e^{B(t)}\,dt \;=\; m\left(e^{B(x)} - e^{B(x_1)}\right) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty\,.$$

Mit der Regel von de l'Hospital gilt dann

$$\lim_{x\to\infty} y_{\text{allg.}}(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{e^{B(x)}}{y_0 + \int_{x_0}^{x} c(t)e^{B(t)}\,dt} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{e^{B(x)} \cdot b(x)}{c(x)e^{B(x)}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{b(x)}{c(x)}\,.$$

11.) a.) Für $b = 0$ gewinnen wir die Lösung schlicht durch Integration. Falls $b \neq 0$, so setzen wir für $x \in I$: $u(x) = ax + by(x) + c$. Für jede Lösung y des AWPs $y' = f(ax + by + c)$, $y(x_0) = y_0$ erfüllt dann u das AWP $u' = a + bf(u)$, $u(x_0) = ax_0 + by_0 + c$, denn es ist

$$u' = a + by' \ = \ a + bf(u) \quad \text{und} \quad u(x_0) = ax_0 + by(x_0) + c\,.$$

Umgekehrt erfüllt dann ersichtlich $y(x) = \frac{1}{b}(u(x) - ax - c)$ das Ausgangs-AWP, wenn u das obige AWP löst.

b.) Äquivalent im Sinne von a.) ist das AWP

$$u' = 1 + \sin u, \quad u(0) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Mit

$$F(x) = \int_0^x 1\,dt \ = \ x \quad \text{und} \quad G(u) := \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{1}{1 + \sin s}\,ds \ = \ -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \ + \ \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ist dann lokal um $x_0 = 0$ die eindeutige Lösung diese AWPs gegeben durch

$$x \mapsto u(x) = G^{-1}(F(x)) \ = \ G^{-1}(x) \ = \ \frac{\pi}{2} + 2\text{Arctan}x\,.$$

Nach a.) erfüllt dann

$$x \mapsto y(x) = u(x) - x = \frac{\pi}{2} + 2\text{Arctan}x \ - \ x$$

das ursprüngliche AWP.

14.) Gesucht ist eine Hamilton-Funktion $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto H(x, y)$ mit $\operatorname{grad} H = (-g, f)^T$. Es ist

$$H_x = -g \quad \Leftrightarrow \quad H(x, y) \ = \ \int -2x(1 - y^2)\,dx \ + \ c(y) \ = \ -x^2(1 - y^2) + c(y)$$

mit einer C^1-Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es ist dann für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H_y(x, y) = 2x^2y + c'(y) \overset{!}{=} f(x, y) = -2y(1 - x^2) \ \Leftrightarrow \ c'(y) = -2y \Leftrightarrow c(y) = -y^2 + k\,.$$

Somit ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto H(x, y) = -x^2(1-y^2) - y^2$ eine Hamiltonfunktion für das gegebene System.

Es ist genau dann $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine konstante Lösung, wenn gilt

$$[t \mapsto f(x(t), y(t))] \equiv 0 \equiv [t \mapsto g(x(t), y(t))] \ \Leftrightarrow \ (x \equiv \pm 1 \ \vee \ y \equiv 0) \wedge (x \equiv \pm 0 \ \vee \ y \equiv \pm 1)\,.$$

Daraus erhalten wir die konstanten Lösungen

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$