Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 14. Mai 2007

2. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

8.) b.) Um die paarweise Verschiedenheit der Funktionswerte $y_1(x), y_2(x)$ und $y_3(x)$ zu garantieren, beschränken wir uns auf das Intervall $I =]1, \infty[$. Speziell für die angegebenen Funktionen y_1, y_2 und y_3 müssen für alle $x \in I$ die Funktionswerte $h(x), g(x)$ und $f(x)$ das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 1+x & 1+2x+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(x) \\ g(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Äquivalent dazu ist das Schema

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & x-1 & x^2-1 & \vdots & 1 \\ 0 & x & 2x+x^2 & \vdots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & x-1 & x^2-1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & x^2-x & \vdots & -1 \end{array}\right),$$

woraus wir nach kurzer Rechnung die Lösungen

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-x^2}, \quad x \mapsto g(x) = -\frac{2x+1}{x-x^2} \quad \text{und} \quad x \mapsto h(x) = \frac{2}{1-x}$$

erhalten. Für eine beliebige von y_1, y_2 und y_3 verschiedene Lösung $x \mapsto y(x)$ dieser DGL gilt mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{\frac{y(x)-y_2(x)}{y(x)-y_1(x)}}{\frac{y_3(x)-y_2(x)}{y_3(x)-y_1(x)}} = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{y(x)-x}{y(x)-1}}{\frac{1}{x}} = c \quad \Leftrightarrow \ldots \quad y(x) = \frac{x^2-c}{x-c}.$$

Umgekehrt sind alle Funktionen dieser Schar Lösungen der DGL. Für $c_2 = 0$ und $c_3 = 1$ sind y_2 und y_3 in dieser Lösungsschar enthalten. Indem wir $c_1 = \infty$ zulassen, ist auch y_1 erfasst und es handelt sich bei der Schar

$$x \mapsto y_C(x) = \frac{x^2-C}{x-C} \qquad (C \in \overline{\mathbb{R}})$$

tatsächlich um die allgemeine Lösung der ermittelten Riccati'schen DGL.