Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

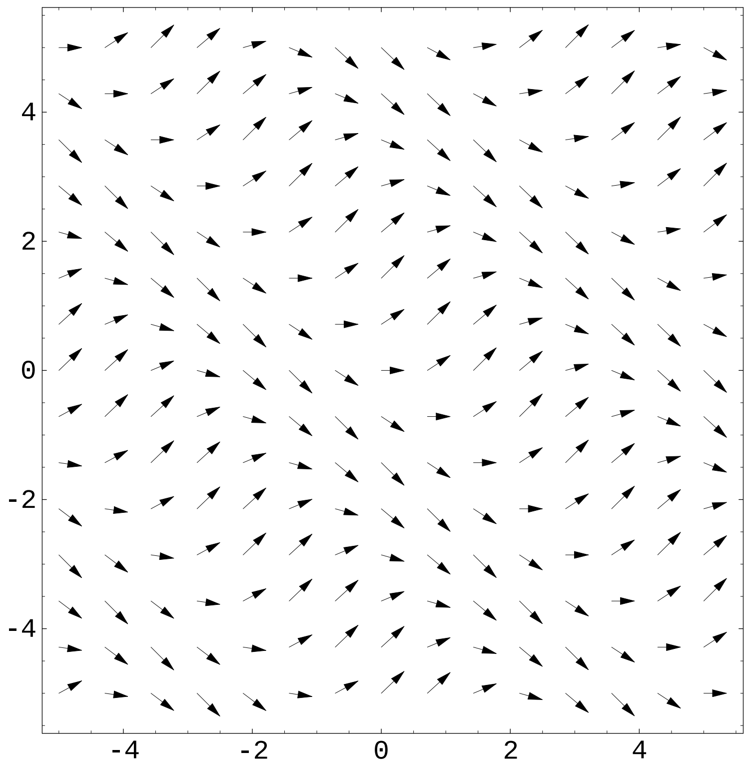
Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 14. Mai 2007

1. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

1.) a.) Richtungsfeld von $y' = \sin(x+y)$:



b.) Genau dann ist $x \mapsto y(x) = ax + b$ eine Lösung der DGL, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$a = \sin(x + ax + b) \quad \Leftrightarrow \quad a + 1 = 0, \sin b = a \quad \Leftrightarrow \quad a = -1, b = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Also handelt es sich bei den Funktionen

$$x \mapsto y_k(x) = -x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

um alle linearen Lösungen der DGL.

c.) Damit eine Funktion $x \mapsto y(x)$ an der Stelle (x_0, y_0) ein lokales Minimum oder Maximum aufweist, muss dort notwendigerweise gelten

$$y'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x_0 + y_0) = 0, \quad \text{also } x_0 + y_0 = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = k\pi - x_0 \,.$$

Lokale Maxima und Minima liegen folglich auf den Geraden $x \mapsto g_k(x) = k\pi - x$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3.) a.) Für $y(x) := (\text{Arcsin}\, x)^2$ $(x \in]-1,1[)$ ist

$$y'(x) = 2\text{Arcsin}\, x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad y''(x) = 2\text{Arcsin}\, x \cdot \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3} + \frac{2}{1-x^2}$$

und damit

$$\forall_{x\in]-1,1[} \qquad (1-x^2)y''(x) - xy'(x) = \frac{2\text{Arcsin}\, x \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - \frac{2x\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; 2.$$

Wegen $y(0) = y'(0) = 0$ erfüllt y das gegebene AWP.

b.) Wie etwa in Aufgabe 21 (Analysis II) gezeigt, besitzt y und damit auch y^2 eine Potenreihendarstellung $y^2(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ um $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = 1$. Da diese nach a.) in jedem Punkt $x \in]-1,1[$ die DGL löst, gilt folglich mit

$$\frac{d}{dx}y^2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dx^2}y^2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \;:$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k \;=\; 2\,,$$

woraus wir nach Koeffizientenvergleich speziell $2a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1$ erhalten. Ferner gilt $6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$. Für $k \geq 2$ erhalten wir zudem

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - ka_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{k+2} = \frac{k^2}{(k+2)(k+1)}a_k\,.$$

Insbesondere ergibt sich daraus, dass $a_k = 0$, falls k ungerade. Für gerades $k \geq 2$ gilt

$$a_{k+2} = \frac{k^2}{(k+2)(k+1)}a_k \;=\; \frac{k^2}{(k+2)(k+1)} \cdot \frac{(k-2)^2}{k(k-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{4\cdot 3} \cdot \frac{2}{2} \;=\; \frac{2}{(k+2)!} \prod_{l=1}^{\frac{k-2}{2}} (k-2l)^2\,.$$