Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 20. Dezember 2006

10. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

42.) **(5 Punkte)** Berechnen Sie die Oberfläche der vierdimensionalen Kugel mit Radius $R > 0$, d.h. das dreidimensionale Areal

$$a_3(S_R^3)\,.$$

Hinweis: Parametrisieren Sie die obige Sphäre durch Polarkoordinaten: Benutzen Sie dabei, dass sich in einer Gleichung der Form $a^2 + b^2 = c^2$ mit $a \geq 0, c > 0$ die Größen a und b immer in der Form

$$a \;=\; c\cos u \quad b = c\sin u$$

mit einem Winkel $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ darstellen lassen. Beginnen Sie in diesem Sinne mit dem Ansatz

$$(x^2 + y^2 + z^2) + t^2 \;=\; R^2 \ldots .$$

43.) **(5 Punkte)** Es sei K ein kompakter J-messbarer Körper des $\mathbb{R}^3$, versehen mit einer stetigen Massendichte $\rho : K \to [0, \infty[$. Definiert sei

die **Masse** von K	durch	$M := \int_K \rho(x)\,dx \;\in \mathbb{R}$,
der **Schwerpunkt** von K	durch	$s := \int_K x\rho(x)\,dx \;\in \mathbb{R}^3$,
das **Trägheitsmoment** von K bzgl. g	durch	$T := \int_K d_g^2(x)\rho(x)\,dx \;\in \mathbb{R}$,

wobei g eine vorgegebene Gerade sei und $d_g(x)$ den Abstand des Punktes $x \in K$ von dieser Geraden bezeichne.

Es sei nun

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$$

ein Kreiszylinder der Höhe h, dessen Dichte proportional zum Quadrat des Abstandes von der Zylinderachse anwachse, d.h. es ist mit einem $\gamma > 0$:

$$\rho(x, y, z) \;=\; \gamma \cdot (x^2 + y^2)\,.$$

Bestimmen Sie die Masse und den Schwerpunkt des Körpers sowie das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse.

44.) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E \;=\; \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{a^2} \;+\; \frac{y^2}{b^2} \;+\; \frac{z^2}{c^2} \;\leq\; 1\right\}.$$

Hinweis: Man transformiere auf eine Kugel.

45.) **(5 Punkte)** Beweisen Sie für das äußere Lebesgue-Maß $\overline{\lambda}$ im $\mathbb{R}^n$: Die Bedingung

$$\overline{\lambda}(E \cap B) \;+\; \overline{\lambda}(E \backslash B) \;=\; \overline{\lambda}(E) \qquad \text{für alle } E \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

für die Lebesgue-Messbarkeit von B ist äquivalent zu

$$\overline{\lambda}(Q \cap B) \;+\; \overline{\lambda}(Q \backslash B) \;=\; |Q| \qquad \text{für alle Quader } Q \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

46.) **(5 Punkte)** Beweisen Sie die Aussagen des aufsteigenden und absteigenden Kettensatzes mit Hilfe der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes. Kann man im absteigenden Kettensatz auf die Voraussetzung $\lambda(B_1)$ verzichten?

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 10. Januar 2007, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtfest und alles Gute für das Jahr 2007!