



Würzburg, den 13. Dezember 2006

## 9. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

38.) (5 Punkte)

a.) Es sei  $a > 0$ . Berechnen Sie den Inhalt des Bereiches, der von der archimedischen Spirale

$$\phi \mapsto a \cdot \begin{pmatrix} \phi \cdot \cos(\phi) \\ \phi \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\phi \in [0, 2\pi])$$

und dem Intervall  $[0, 2a\pi]$  begrenzt wird.

b.) Es sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  der Bereich, der von den Kurven

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4, \quad ay + bx = 0 \quad \text{und} \quad ay - bx = 0 \quad (a, b > 0)$$

im ersten und im vierten Quadranten begrenzt wird. Berechnen Sie

$$\int_B \left(1 - \frac{y}{x}\right)^2 d(x, y).$$

39.) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Integrale

$$\int_{\phi[K]} f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_K f(\phi(u)) |\det D\phi(u)| du$$

unter den im Transformationssatz genannten Voraussetzungen existieren.

40.) (5 Punkte) (Fläche von Vincenzo Viviani) Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

mit dem Kreiszyylinder

$$x^2 - Rx + y^2 \leq 0$$

oberhalb der  $x - y$ -Ebene.

**Hinweis:** Skizzieren Sie eine Aufsicht und beachten Sie, dass die Grundfläche des Zylinders in Polarkoordinaten gegeben ist durch  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $0 \leq r \leq R \cos \phi$ . (Begründung?)

41.) (6 Punkte) Es sei

$$K_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$$

die euklidische Kugel im  $\mathbb{R}^n$  mit Radius  $r > 0$  und

$$I_n := \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2})^n dt.$$

Zeigen Sie

a.)  $\mu(K_r^n) = r^n \mu(K_1^n)$ ,

b.)  $\mu(K_1^{n+1}) = \mu(K_1^n) \cdot I_n$ ,

c.)  $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$ ,

d.)  $\mu(K_1^n) = \frac{2\pi}{n} \mu(K_1^{n-2})$

und leiten Sie daraus eine explizite Formel für das Kugelvolumen  $\mu(K_r^n)$  ab.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 20. Dezember, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.

Am 20.12.2006 ab ca. 18 Uhr nach dem Weihnachtskolloquium findet im Foyer des Info-Gebäudes die alljährliche Weihnachtsfeier der Fachschaft Mathe/Info statt. Hierzu sind alle Interessierten herzlich eingeladen.