Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 23. November 2006

6. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

25.) **(8 Punkte)** (**Cantor-Menge**) Ausgehend vom Intervall $C_0 := [0,1] \subset \mathbb{R}$ konstruieren wir induktiv Teilmengen C_k $(k \in \mathbb{N})$ dadurch, dass wir aus allen Teilintervallen, aus denen C_k besteht, das mittlere offene Drittel entfernen, um C_{k+1} zu erhalten (etwa entsteht C_1 aus C_0 durch Entfernen von $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Weiter sei $C := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}_0} C_k$. Zeigen Sie:

a.) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad C_k = \bigcup\limits_{(a_1,\ldots,a_k) \in \{0,2\}^k} \left[\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^i}, \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} \right].$

b.) $C = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; \forall_{i \in \mathbb{N}} \; a_i \in \{0,2\} \right\}.$

c.) C ist kompakt.

d.) C ist Jordan-messbar mit $\mu(C) = 0$.

e.) C ist überabzählbar.

Hinweis: Man führe die Annahme einer Surjektion $\phi : \mathbb{N} \to C$, $k \mapsto \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ik}}{3^i}$ dadurch zum Widerspruch, dass man nachweist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} \notin \phi[\mathbb{N}], \text{ wenn } \forall_{i \in \mathbb{N}} \; d_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{falls } a_{ii} = 0. \end{cases}$$

26.) **(4 Punkte)** Berechnen Sie

$$\int_1^{\infty} \left(\int_1^{\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3} \, dy \right) dx, \quad \int_1^{\infty} \left(\int_1^{\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3} \, dx \right) dy$$

sowie

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{[1,R] \times [1,R]} \frac{y-x}{(x+y)^3} \, d(x,y)\,.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Fubini?

27.) **(4 Punkte)** Zerlegen Sie die Einheitskreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$ so in zwei disjunkte Teilmengen A_1 und A_2, dass mit zwei geeigneten Drehungen $D_1, D_2 : S^1 \to S^1$ gilt

$$D_1[A_1] \cup D_2[A_2] = S^1 \backslash \{1\}\,.$$

Hinweis: Man setze beispielsweise $A_1 = \{e^{in} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 29. November, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.