JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 8. November 2006

4. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

16.) **(4 Punkte)** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Funktionen.

a.) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

$$\forall_{x \in I}\ \det(y_1(x), \ldots, y_m(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Die Funktionen } y_1, \ldots, y_m \text{ sind linear abhängig.} \qquad (1)$$

b.) Es seien die Funktionen $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{R}^m$ Lösungen eines linearen Systems $y' = A(x)y$ mit einer stetigen Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{m \times m}$. Begründen Sie in diesem Fall die Richtigkeit der Aussage (1).

17.) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 9y_1 - 5y_2 - 3y_3 + 4e^{-x} \\ y_2' &= 14y_1 - 8y_2 - 5y_3 + 9e^{-x} \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - 3e^{-x}\,. \end{aligned}$$

18.) **(4 Punkte)** Es sei $t \mapsto Y(t)$ eine Fundamentalmatrix des homogenen linearen Systems

$$y' = A(x)y \qquad A : I \to \mathbb{R}^{m \times m},\ A \text{ stetig}\,.$$

Konstruieren Sie ausgehend von $t \mapsto Y(t)$ eine weitere Fundamentalmatrix $t \mapsto Z(t)$ mit der Eigenschaft

$$Z(0) = E\,,$$

wenn E die $m \times m$-Einheitsmatrix bezeichnet.

19.) **(4 Punkte)** Gegeben sei die inhomogene skalare lineare Differentialgleichung n.ter Ordnung

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 y' + c_0 y = e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x)$$

mit $\alpha, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$. Für das entsprechende charakteristische Polynom p dieser DGL gelte $p(\alpha) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine partikuläre Lösung der Form

$$y(x) = e^{\alpha x}(a_0 + a_1 x)$$

gibt mit geeigneten $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

20.) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

nicht absolut konvergiert.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 15. November, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.