Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 2. November 2006

3. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

12.) **(5 Punkte)** Gegeben sei im $\mathbb{R}^m$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \quad y(\mathring{x}) = \mathring{y} \qquad (f \in C^0(G)).$$

Weiter sei $\bar{I} \times \bar{Q}$ mit

$$\bar{I} = [\mathring{x} - a, \mathring{x} + a] \quad \text{und} \quad \bar{Q} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y - \mathring{y}| \le b\}$$

eine Quaderumgebung von $(\mathring{x}, \mathring{y})$, auf der die Picardsche Iteration definiert ist sowie eine Lipschitzkonstante $L > 0$ für f bzgl. y existiert. Beweisen Sie für die Picardschen Iterierten y_k und ihre Grenzfunktion y die Abschätzungen

a.) $\forall_{x \in \bar{I}} \forall_{k \in \mathbb{N}_0} \quad |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \le \frac{M}{L} \frac{(L|x-\mathring{x}|)^{k+1}}{(k+1)!}$

b.) $\forall_{x \in \bar{I}} \forall_{k \in \mathbb{N}_0} \quad |y(x) - y_k(x)| \le \frac{M}{L} \frac{(La)^{k+1}}{(k+1)!} e^{La}$,

wenn $M = \max\limits_{(x,y) \in \bar{I} \times \bar{Q}} |f(x,y)|$ und die Startfunktion y_0 gegeben ist durch $y_0 \equiv \mathring{y}$.

13.) **(5 Punkte)** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y^2 - x^2 .$$

a.) Zeigen Sie, dass es zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$ genau eine Lösung auf dem Intervall $\bar{I} = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ gibt.
Hinweis: Man bestimme ein $b > 0$, so dass auf $C^0(\bar{I} \mapsto \bar{Q})$ mit $\bar{Q} = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \le b\}$ für den Operator T aus der Vorlesung die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

b.) Wieviele Schritte der Picard-Iteration sind nötig, um diese Lösung bis auf einen Fehler $\le 10^{-2}$ zu approximieren? (Aufgabe 12.) Geben Sie eine derart approximierende Funktion explizit an.

14.) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$y(x) = \int_0^x 2y(t)\,dt + \frac{x^3}{3} - \frac{e^{-2x}}{2}.$$

eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Lösung besitzt und bestimmen Sie diese.

15.) **(4 Punkte)** Es sei $f : G \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass dann f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ sogar eine **globale** Lipschitz-Konstante besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie die Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit im $\mathbb{R}^n$ (Analysis I, Aufg. 29). Nehmen Sie an, es gibt Punktfolgen $(x_k \in K)_{k \in \mathbb{N}}$, $(x'_k \in K)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\forall_{k \in \mathbb{N}}\, x_k \ne x'_k$, so dass

$$\left(\left| \frac{f(x_k) - f(x'_k)}{x_k - x'_k} \right| \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

unbeschränkt ist.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 8. November, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.