Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 5. Februar 2007

12. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

53.) a.) Es sei f messbar. Dann ist

$$B(f_+ \leq \alpha) \;=\; \begin{cases} B(f \leq \alpha) & : \; \alpha \geq 0 \\ \emptyset & : \; \alpha < 0 \end{cases}$$

und

$$B(f_- \leq \alpha) \;=\; \begin{cases} B(f \geq -\alpha) & : \; \alpha \geq 0 \\ \emptyset & : \; \alpha < 0 \end{cases}.$$

Folglich sind f_+ und f_- messbar. Seien umgekehrt f_+ und f_- messbar, so gilt

$$B(f \leq \alpha) \;=\; \begin{cases} B(f_+ \leq \alpha) & : \; \alpha \geq 0 \\ B(f_- \geq -\alpha) & : \; \alpha < 0 \end{cases}.$$

Damit ist auch f messbar. Sind f_+ und f_- messbar, so ist ferner

$$B(|f| \leq \alpha) = \begin{cases} B(f_+ \leq \alpha) \cap B(f_- \leq \alpha) & : \; \alpha \geq 0 \\ \emptyset & : \; \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Damit ist $|f|$ messbar.

b.) Nein. Man wähle etwa eine nicht L-messbare Teilmenge A von $B = [0,1]$ und definiere

$$f(x) := \begin{cases} -1 & : \; x \in A \\ 1 & : \; x \in [0,1] \backslash A \end{cases}.$$

Dann ist $|f| \equiv 1$ messbar auf B aber f ist nicht messbar, denn es ist beispielsweise $B(f \leq \frac{1}{2}) = A$ nicht messbar.