Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 10. Januar 2007

9. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

38.) b.) Wir definieren verallgemeinerte Polarkoordinaten durch

$$x = \psi_1(r,\phi) \;=\; ar\cos\phi \qquad y \;=\; \psi_2(r,\phi) \;=\; br\sin\phi\,.$$

Dann ist

$$|\det D\psi(r,\phi)| \;=\; abr\,.$$

Es wird $\psi^{-1}[B]$ durch die Geraden $r=1$, $r=2$,$\phi=\frac{\pi}{4}$ und $\phi=-\frac{\pi}{4}$ begrenzt. Folglich gilt nach dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_B \left(1-\frac{y}{x}\right)^2 d(x,y) \;&=\; ab\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 (1-\frac{b}{a}\tan\phi)^2\, r\,dr\,d\phi \\
=\;& \frac{3ab}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\frac{b}{a}\tan\phi)^2\,d\phi \;=\; \frac{3ab}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\underbrace{2\frac{b}{a}\tan\phi}_{\text{ungerade}}+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\phi)\,d\phi \\
=\;& \frac{3ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{b^2}{a^2}\left[\tan\phi-\phi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right) \;=\; \frac{3ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{b^2}{a^2}\left(1-\frac{\pi}{4}+1-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
=\;& \frac{3ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{b^2}{a^2}(2-\frac{\pi}{2})\right)\,.
\end{aligned}$$

40.) Es sei M die Schnittfläche der Sphäre mit dem Kreiszylinder

$$0 \geq x^2 - Rx + y^2 \;=\; \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{R^2}{4} + y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}.$$

Der Zylinder selbst besitze die Grundfläche B. Die Fläche M besitzt dann die (explizite) Parametrisierung

$$(u,v)\in B \;\mapsto\; \begin{pmatrix} x_1(u,v)\\ x_2(u,v)\\ x_3(u,v)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2-(u^2+v^2)}\end{pmatrix}$$

und besitzt folglich den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
a_2(M) \;&=\; \int_B \left|\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{u}{\sqrt{R^2-(u^2+v^2)}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{v}{\sqrt{R^2-(u^2+v^2)}}\end{pmatrix}\right| d(u,v) \;=\; \int_B \left|\begin{pmatrix}\frac{u}{\sqrt{R^2-(u^2+v^2)}}\\ \frac{v}{\sqrt{R^2-(u^2+v^2)}}\\ 1\end{pmatrix}\right| d(u,v) \\
&=\; \int_B \sqrt{\frac{u^2}{R^2-(u^2+v^2)}+\frac{v^2}{R^2-(u^2+v^2)}+1}\,d(u,v) \;=\; R\int_B \frac{1}{\sqrt{R^2-(u^2+v^2)}}\,d(u,v)\,.
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten lässt sich B darstellen als Menge

$$\{(r,\phi)\,:\,-\frac{\pi}{2}\leq\phi\leq\frac{\pi}{2},\; 0\leq R\cos\phi\}$$

(Satz des Thales). Daher folgt mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} a_2(M) &= R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\phi}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr\,d\phi \;=\; -R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^{R\cos\phi}d\phi \\ &= -R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R\,(|\sin\phi|-1)\,d\phi \;=\; R^2\pi - 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\,d\phi \;=\; R^2\pi-2R^2 \;=\; R^2(\pi-2)\,. \end{aligned}$$

41.) a.) folgt unmittelbar aus Aufgabe 30b.)

b.) Es sei $B_t(n)$ der Schnitt der Hyperebene $x_{n+1} = t$ ($t \in [-1,1]$) mit der Kugel K_1^{n+1}, d.h. genauer

$$B_t(n) \;=\; \{\tilde{x}\in\mathbb{R}^n \,|\, |\tilde{x}|^2+t^2\le 1\} \;=\; \{\tilde{x}\in\mathbb{R}^n \,|\, |\tilde{x}|\le\sqrt{1-t^2}\}\,,$$

also gilt im Vergleich zu

$$K_1^n = B_0(n) \;=\; \{\tilde{x}\in\mathbb{R}^n \,|\, |\tilde{x}|\le 1\}$$

dass $B_t(n) = \sqrt{(1-t^2)}K_1^n$ und mit Aufgabe 30b.) folglich

$$\mu(B_t(n)) \;=\; (\sqrt{1-t^2})^n\mu(K_1^n)\,.$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt dann

$$\mu(K_1^{n+1}) \;=\; \int_{-1}^1\mu(B_t(n))\,dt \;=\; \int_{-1}^1(\sqrt{1-t^2})^n\,\mu(K_1^n)\,dt \;=\; \mu(K_1^n)\cdot I_n\,.$$

c.) Für $n\ge 2$ ist

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 1\cdot(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\,dt \;=\; \int_{-1}^1\frac{d}{dt}t\,(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\,dt \\ &= -\frac{n}{2}\int_{-1}^1 t(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}(-2t)\,dt + \underbrace{\left[t(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\right]_{-1}^1}_{=0} \\ &= n\int_{-1}^1(t^2-1+1)(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dt \;=\; n\int_{-1}^1(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\,dt - n\int_{-1}^1(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\,dt \\ &= nI_{n-2}-nI_n \quad\Leftrightarrow\quad I_n = \frac{n}{n+1}I_{n-2}\,. \end{aligned}$$

d.) Induktion über $n\ge 3$: Es ist $\mu(K_1^1) = 2,\ \mu(K_1^2) = \pi, \mu(K_1^3) \;=\; \frac{4\pi}{3}$ und damit

$$\mu(K_1^3) = \frac{2\pi}{3}\cdot 2 \;=\; \frac{2\pi}{3}\cdot\mu(K_1^1)\,,$$

was die Formel für $n = 3$ bestätigt. Sei die Aussage gezeigt für ein $n\ge 3$. Dann ist

$$\mu(K_1^{n+1}) \overset{b.)}{=} \mu(K_1^n)\cdot I_n \overset{c.),(IA)}{=} \frac{2\pi}{n}\mu(K_1^{n-2})\cdot\frac{n}{n+1}I_{n-2} \;=\; \frac{2\pi}{n+1}\mu(K_1^{n-2})I_{n-2} \overset{b.)}{=} \frac{2\pi}{n+1}\mu(K_1^{n-1})\,.$$

Mit der Rekursionsgleichung aus d.) ist mit a.)

$$\begin{aligned} \mu(K_r^n) &= r^n\cdot\begin{cases}\dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{(n-2)}\cdots\overbrace{\dfrac{2\pi}{2}}^{=\pi=\mu(K_1^2)} & \text{falls } n \text{ gerade}\\[2ex] \dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{(n-2)}\cdots\dfrac{2\pi}{3}\cdot\underbrace{2}_{=\mu(K_1^1)} & \text{falls } n \text{ ungerade, } n\ge 3\end{cases} \\ &= r^n\cdot\begin{cases}\dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}!} = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!} & \text{falls } n \text{ gerade}\\[2ex] \dfrac{2\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-1}{2})!}{n!} = \dfrac{2^n}{n!}\pi^{\frac{n-1}{2}}(\dfrac{n-1}{2})! & \text{falls } n \text{ ungerade, } n\ge \mathbf{1}.\end{cases} \end{aligned}$$