Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 22. November 2006

5. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

23.) Mit f sind auch die Funktionen

$$(x,y) \in [a,b]^2 \mapsto g(x,y) = \frac{f(x)}{f(y)} \qquad \text{und} \qquad (x,y) \in [a,b]^2 \mapsto h(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$

stetig und positiv, insbesondere also Riemann-integrierbar auf $[a,b]^2$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} g(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_a^b \frac{f(x)}{f(y)}\,dx\,dy = \left(\int_a^b \frac{1}{f(y)}\,dy\right)\cdot\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$
$$= \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

sowie ebenfalls

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} h(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_a^b \frac{f(y)}{f(x)}\,dx\,dy = \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b f(y)\,dy\right)$$
$$= \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b f(x)\,dx\right).$$

Zusammen gilt also

$$\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_{[a,b]\times[a,b]} [g(x,y)+h(x,y)]\,d(x,y)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{[a,b]\times[a,b]} \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right] d(x,y) = \int_{[a,b]\times[a,b]} \left[\frac{f(y)^2+f(x)^2}{2f(x)f(y)}\right] d(x,y).$$

Wegen $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; 2ab \le a^2+b^2$ für $a,b \in \mathbb{R}$ ist der Integrand nach unten beschränkt durch 1 und wir erhalten

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} \left[\frac{f(y)^2+f(x)^2}{2f(x)f(y)}\right] d(x,y) \ge \int_{[a,b]\times[a,b]} 1\,d(x,y) = (b-a)^2.$$

24.) Die Linearität des Operators S sowie die Stetigkeit von f wurde in den Übungen gezeigt. Für $f \in C^0(Q)$ mit $\|f\|_\infty = 1$ ist

$$|(Sf)(x)| = \left|\int_{Q_x} |f(\xi)|\,d\xi\right| \le |Q_x|\cdot 1 \le |Q| \qquad \forall_{x\in Q},$$

also $\|S\| \le |Q|$. Für $x \in Q \mapsto f(x) \equiv 1 \in C^0(Q)$ ist $\|f\|_\infty = 1$ und

$$|(Sf)(b_1,\ldots,b_n)| = \int_Q 1\,dx = |Q|,$$

d.h. es gilt sogar Gleichheit $\|S\| = |Q|$.

Es sei nun $f \in C^0(Q)$ mit $\|f\|_{\alpha;\infty} = 1$. Für alle $x \in Q$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)} S(f)(x)\right| &\leq e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)} \int_{Q_x} |f(\xi)|\, d\xi \\
&= e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)} \int_{Q_x} e^{\alpha(\xi_1+\ldots+\xi_n)} \underbrace{e^{-\alpha(\xi_1+\ldots+\xi_n)} |f(\xi)|}_{\leq 1}\, d\xi \\
&\leq e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)} \cdot \int_{Q_x} e^{\alpha(\xi_1+\ldots+\xi_n)}\, d(\xi_1, \ldots, d\xi_n) \\
&= e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)} \left(\int_{a_1}^{x_1} e^{\alpha\xi_1}\, d\xi_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_{a_n}^{x_n} e^{\alpha\xi_n}\, d\xi_n\right) \\
&= e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)} \left(\frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x_1} - e^{\alpha a_1}\right]\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x_n} - e^{\alpha a_n}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha(a_1 - x_1)}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha(a_n - x_n)}\right) \overset{a_i - x_i < 0, \alpha > 0}{\leq} \frac{1}{\alpha^n},
\end{aligned}$$

d.h. es ist $\|S\|_{\alpha;\infty} \leq \frac{1}{\alpha^n}$.