Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 8. November 2006

3. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

13.) b.) Für die k.te Picard-Iterierte gilt dann nach Aufgabe 12 mit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $L = 2b = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ und

$$M = \max_{(x,y)\in\bar{I}\times\bar{Q}} |y^2 - x^2| \le \max_{(x,y)\in\bar{I}\times\bar{Q}} \begin{cases} y^2 & : \ x^2 \le y^2 \\ x^2 & : \ y^2 < x^2 \end{cases} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

$$\|y - y_k\|_{\infty;\bar{I}} \ \le \ \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{\frac{4}{3\sqrt{2}}(k+1)!}\, e^{\frac{2}{3}} \ = \ \frac{3\sqrt{2}}{8\cdot(k+1)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} e^{\frac{2}{3}}\,.$$

Wir stellen dann fest, dass für $k \ge 3$ gilt

$$\|y - y_k\|_{\infty,\bar{I}} \ \le \ 8.6\cdot 10^{-3}$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \int_0^x (y_0^2(t) - t^2)\,dt \ = \ -\frac{x^3}{3} \\
y_2(x) &= \int_0^x (y_1^2(t) - t^2)\,dt \ = \ \int_0^x \left(\frac{t^6}{9} - t^2\right) dt \ = \ \frac{x^7}{63} - \frac{x^3}{3} \qquad \text{und} \\
y_3(x) &= \int_0^x (y_2^2(t) - t^2)\,dt \ = \ \int_0^x \left(\frac{t^7}{63} - \frac{t^3}{3}\right)^2 dt \ - \ \frac{x^3}{3} \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^{14}}{63^2} - \frac{2}{189}t^{10} + \frac{t^6}{9}\right) dt \ - \ \frac{x^3}{3} \ = \ \frac{1}{59535}x^{15} \ - \ \frac{2}{2079}x^{11} \ + \ \frac{1}{63}x^7 \ - \ \frac{1}{3}x^3\,.
\end{aligned}$$

14.) Bekanntermaßen ist eine stetig differenzierbare Funktion y genau dann eine Lösung der gegebenen Integralgleichung, wenn y das Anfangswertproblem

$$y' = 2y + x^2 + e^{-2x} \qquad y(0) = -\frac{1}{2}$$

löst. Diese inhomogene lineare skalare Differentialgleichung wiederum besitzt nach Satz 6.2.1 mit

$f \equiv 1$ sowie $g(x) = x^2 + e^{-2x}$ die eindeutig bestimmte, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[\int_0^x (t^2 + e^{-2t})e^{-2t}\,dt\right] e^{2x} \;=\; -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[\int_0^x t^2 e^{-2t}\,dt \;+\; \int_0^x e^{-4t}\,dt\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[-\frac{1}{2}\int_0^x t^2\,\frac{d}{dt}e^{-2t}\,dt \;-\; \frac{1}{4}e^{-4t}\Big|_0^x\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[\frac{1}{2}\int_0^x 2te^{-2t}\,dt \;-\; \frac{t^2}{2}e^{-2t}\Big|_0^x \;-\; \frac{1}{4}\left(e^{-4x} - 1\right)\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{2e^{2x}} + \left[-\frac{1}{2}\int_0^x t\frac{d}{dt}e^{-2t}\,dt \;-\; \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[\frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt \;-\; \frac{1}{2}t\,e^{-2t}\Big|_0^x \;-\; \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t}\Big|_0^x \;-\; \frac{x}{2}e^{-2x} \;-\; \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2x} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}\right] e^{2x} \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

15.) Angenommen, es existiert keine globale Lipschitz-Konstante von f auf K. Dann existieren Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \neq x'_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\frac{|f(x_k) - f(x'_k)|}{|x_k - x'_k|} \;\to\; \infty\,.$$

Da K kompakt und nach Aufgabe 23 (Analysis I) auch folgenkompakt ist, besitzt die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in K konvergente Teilfolge $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{\phi(k)} \;\to\; a \in K$. Auch die Folge $(x'_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge $(x'_{\psi(\phi(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x'_{\psi(\phi(k))})_{k\in\mathbb{N}} \to b \in K$. Zusammen ist also

$$\left(x_{\psi(\phi(k))},\, x'_{\psi(\phi(k))}\right) \;\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\; (a,b) \in K^2$$

und nach wie vor

$$\frac{|f(x_{\psi(\phi(k))}) - f(x'_{\psi(\phi(k))})|}{|x_{\psi(\phi(k))} - x'_{\psi(\phi(k))}|} \;\to\; \infty\,. \tag{1}$$

Falls $a = b$, so ist (1) ein direkter Widerspruch zur lokalen Lipschitzstetigkeit in einer Umgebung $U(a) \cap K$. Andernfalls gilt

$$\frac{|f(x_{\psi(\phi(k))}) - f(x'_{\psi(\phi(k))})|}{|x_{\psi(\phi(k))} - x'_{\psi(\phi(k))}|} \;\to\; \frac{|f(a) - f(b)|}{|a-b|}$$

was ebenfalls einen Widerspruch liefert, nämlich zu (1).