Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 18. Oktober 2006

1. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

3.) Wegen

$$x^2+y^2+z^2 \;=\; x^2+y^2+\frac{16}{9}x^2 \;\le\; 3x^2+6y^2 \;\le\; 3$$

für $(x,y,z)\in T$ ist T beschränkt. Für $(x_0,y_0,z_0)\notin T$ ist

$$x_0^2+2y_0^2\neq 1 \quad \text{oder} \quad 4x_0-3z_0\neq 0$$

und folglich aus Stetigkeitsgründen auch

$$x^2+2y^2\neq 1 \quad \text{oder} \quad 4x-3\neq 0$$

in einer kleinen Umgebung $U(x_0,y_0,z_0)$, d.h. $\mathbb{R}^3\backslash T$ ist offen bzw. T ist abgeschlossen und wegen der Beschränktheit auch kompakt. Die stetige Funktion f nimmt auf T somit Maximum und Minimum an.

Für

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, \quad F(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_1(x,y,z)\\F_2(x,y,z)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}x^2+2y^2-1\\4x-3z\end{pmatrix}$$

ist $(x,y,z)\in T\Leftrightarrow F(x,y,z)=0$. Für $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{rg} DF(x,y,z)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2x & 4y & 0\\4 & 0 & -3\end{pmatrix} \;=\; 2 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)\neq(0,0)\,,$$

insbesondere hat wegen $(0,0,z)\notin T$ die Funktionalmatrix DF in T und folglich auch in Minimum und Maximum den vollen Rang 2. Mit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel gibt es dann Zahlen $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, so dass in einem Extremum (x_0,y_0,z_0) gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) \;=\; \lambda_1\cdot\operatorname{grad}F_1(x_0,y_0,z_0) \;+\; \lambda_2\cdot\operatorname{grad}F_2(x_0,y_0,z_0)\\ \Leftrightarrow\quad &\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \;=\; \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}2x_0\\4y_0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen erhalten wir folglich die fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= 2x_0\lambda_1 \;+\; 4\lambda_2\\ 1 &= 4y_0\lambda_1\\ -1 &= -3\lambda_2\\ 1 &= x_0^2+2y_0^2\\ 0 &= 4x_0+3z_0 \end{aligned}$$

Mit $\lambda_2=\frac{1}{3}$, was wir aus der dritten Gleichung erhalten, reduziert sich dies auf

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} &= x_0\lambda_1\\ 1 &= 4y_0\lambda_1\\ 1 &= x_0^2+2y_0^2\\ 0 &= 4x_0-3z_0 \end{aligned}$$

Eine Multiplikation von Zeile 1 mit $4y_0$ sowie Zeile 2 mit x_0 ergibt die Identität

$$-\frac{2}{3}y_0 = x_0\,,$$

was eingesetzt in die dritte Zeile auf die Bedingung $1 = \frac{22y_0^2}{9}$ bzw. $y_{0;(1,2)} = \pm\frac{3}{\sqrt{22}}$ führt. Dies impliziert die beiden Lösungen

$$x_{0;(1,2)} = \mp\frac{2}{\sqrt{22}} \qquad \text{sowie} \qquad z_{0;(1,2)} = \mp\frac{8}{3\sqrt{22}}\,.$$

Wir errechnen damit

$$f(x_{0;(1,2)}, y_{0;(1,2)}, z_{0;(1,2)}) = \pm\frac{11}{3\sqrt{22}}\,,$$

d.h. es liegt in $(x_{0;(1)}, y_{0;(1)}, z_{0;(1)})$ ein absolutes Minimum, in $(x_{0;(2)}, y_{0;(2)}, z_{0;(2)})$ ein absolutes Maximum von f in T vor.

4.) Unter Anwendung von Satz 5.5.3 (mit $t = y$), $I = \mathbb{R}^+$, den stetig diferenzierbaren Funktionen $x \mapsto a(x) = 0$ und $x \mapsto b(x) = x^2$ sowie der sogar auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ stetig partiell differenzierbaren Funktion $(y,x) \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{y}{x^2}$ gilt mit der dort angegebenen Formel

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^4}} \cdot \frac{-2y}{x^3}\right) dy + \operatorname{Arctan} 1 \cdot 2x - \operatorname{Arctan} 0 \cdot 0 = \int_0^{x^2} \frac{-2yx}{x^4+y^2}\, dy + \frac{\pi}{2} \cdot x \\ &= -x \ln(x^4+y^2)\Big|_0^{x^2} + \frac{\pi}{2}x = -x\left(\ln(2x^4 - \ln x^4)\right) + \frac{\pi}{2}x = -x\ln 2 + \frac{\pi}{2}x\,. \end{aligned}$$

Also ist mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)\frac{x^2}{2} + c\,.$$

Wegen $0 = F(0) = c$ ist also $F(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)\frac{x^2}{2}$.