



Würzburg, den 12. Juli 2006

12. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

57.) Für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ sei die Funktion

$$(x, y) \mapsto f(x, y) := y^x.$$

gegeben.

- Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(1, 1)$ an.
- Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von f zur Stelle $(1, 1)$.
- Berechnen Sie $T_1|_{(1,1)}(1.01, 0.99)$ sowie $T_2|_{(1,1)}(1.01, 0.99)$ und vergleichen Sie die Werte mit einem Taschenrechner-Wert für $\alpha = 0.99^{1.01}$.

58.) a.) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$$

auf lokale und globale Extrema.

- b.) Es sei $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < \frac{\pi}{2}\}$. Untersuchen Sie die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

auf lokale Extrema.

59.) Auf

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ definiert. Untersuchen Sie f auf lokale und globale Extrema.

60.) Im \mathbb{R}^n seien die r Punkte a_1, \dots, a_r gegeben. Man zeige, dass es genau einen Punkt gibt, für welchen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x - a_1|^2 + \dots + |x - a_r|^2$$

minimal wird (Dabei sei $|\cdot|$ die euklidische Norm.) Bestimmen Sie diesen Punkt.

61.) Gegeben sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ sowie $\hat{x} \in G$ mit

$$f(x) = f(\hat{x}) + \langle a, x - \hat{x} \rangle + R(x) \quad \text{wobei} \quad \frac{R(x)}{|x - \hat{x}|} \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0.$$

Konstruieren Sie eine in \hat{x} stetige Funktion $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$f(x) = f(\hat{x}) + \langle \Delta(x), x - \hat{x} \rangle.$$

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr bewertet und muss daher nicht abgegeben werden. Musterlösungen finden sich spätestens ab Freitag, den 14. Juli auf der bekannten Internetseite. Die Klausur, zu welcher nur handschriftliche Unterlagen sowie Aufzeichnungen aus Vorlesung und Übung zugelassen sind, findet am 24. Juli 2006 von 14:30 Uhr bis 16:30 Uhr statt. Eine namentliche Zuteilung auf die Hörsäle sowie die Zulassung zur Klausur werden in der nächsten Woche bekanntgegeben.

An alle interessierten Studenten ergeht eine herzliche Einladung zur Akademischen Feier anlässlich der Erstbesetzung des Giovanni-Prodi-Lehrstuhls am Mittwoch, den 19. Juli 2006 ab 15:00 Uhr im Turing-Hörsaal.