Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 5. Juli 2006

11. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

52.) **(4 Punkte)** Man beweise den folgenden „Mittelwertsatz“ für vektorwertige Funktionen: Es sei $a < b$. Die Funktion $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ sei stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\overline{x} \in]a, b[$ mit

$$|g(b) - g(a)| \;\leq\; |g'(\overline{x})| \cdot (b - a)\,.$$

Hinweis: Man wende den bekannten Mittelwertsatz auf die Funktion

$$x \in [a, b] \;\mapsto\; h(x) \;:=\; \langle g(x),\, g(b) - g(a)\rangle$$

an.

53.) **(4 Punkte)** Es sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Auf $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(a, b)\}$ sei die Funktion r erklärt durch

$$r(x, y) \;=\; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\,.$$

Berechnen Sie

$$\Delta \log r \;:=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r \;+\; \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log r\,.$$

54.) **(4 Punkte)** Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \;\to\; \mathbb{R}$ sei **positiv homogen vom Grade** $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{R}^+}\, \forall_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \quad f(\lambda \cdot x) \;=\; \lambda^\alpha \cdot f(x)\,.$$

Man zeige

a.) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \cdot x_k \;=\; \alpha f(x)$,

b.) $\forall_{\lambda \in \mathbb{R}^+}\, \forall_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \quad \operatorname{grad} f(\lambda x) \;=\; \lambda^{\alpha - 1} \cdot \operatorname{grad} f(x)\,.$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $(\lambda,\, x) \mapsto f(\lambda \cdot x) \;-\; \lambda^\alpha \cdot f(x)$.

55.) **(4 Punkte)** Es sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathring{x} \in G$ mit $\operatorname{grad} f(\mathring{x}) \;\neq\; 0$. Zeigen Sie: Für die Richtungsableitungen

$$d_X f(\mathring{x}) \;:=\; \langle \operatorname{grad} f(\mathring{x}),\, X)\rangle \qquad (X \in \mathbb{R}^n)$$

gilt

$$\max\,\{d_X f(\mathring{x}) \mid \;\; |X| = 1\} \;=\; |\operatorname{grad} f(\mathring{x})|$$

und das Maximum wird in $X := \frac{\operatorname{grad} f(\mathring{x})}{|\operatorname{grad} f(\mathring{x})|}$ angenommen.

56.) **(4 Punkte)** Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullumgebung. Die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ sei in U definiert. Es existiere $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)$. Ferner existiere $\frac{\partial f}{\partial y}$ in U und sei stetig in $(0, 0)$. Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie: $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) - f(x, 0) + f(x, 0) - f(0, 0)$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 12. Juli 2006, 11:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek. Die **Klausur** findet am 24. Juli 2006 von 14:30 Uhr bis 16:30 Uhr im Max-Scheer-Hörsaal sowie im Turing-Hörsaal statt.